Technische Hochschule Nürnberg
Georg Simon Ohm

Übung Grundlagen der Elektrotechnik 2

Prof. Dr. C. Niebler

Nur für Dozentengebrauch, nicht zur Weitergabe an Studenten.

Dozenten Exemplar mit Lösungen für

Prof. Dr. C. Niebler

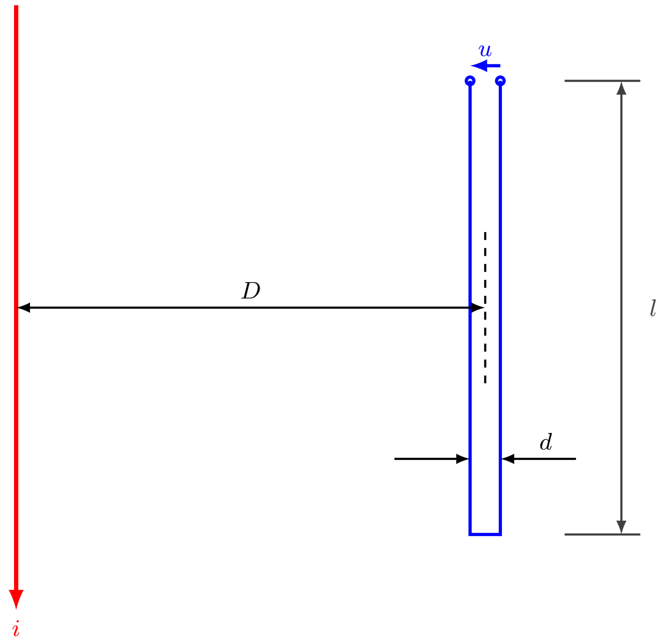
Inhaltsverzeichnis

12/1 Blitzableiter

Eine $l = 4\,\text{m}$ lange Verbindungsleitung, deren Leiter voneinander einen Abstand $d = 2\,\text{cm}$ haben, ist im Abstand $D = 3\,\text{m}$ parallel zu einem Blitzableiter verlegt. (Siehe Skizze).
$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\text{Vs/(Am)}$

a) Welche Spannung u (Betrag !) wird induziert, wenn der Blitzstrom i linear in $0{,}6\,\mu\text{s}$ auf $15\,\text{kA}$ ansteigt?

b) Ist die Spannung während dieser Zeit positiv oder negativ? (Begründung !)



Formeln:

$$u = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \tag{12/1.1}$$

$$\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{12/1.2}$$

$$H = \frac{i \cdot N}{l} \qquad \text{für Zylinder:} \qquad H = \frac{i \cdot N}{2 \cdot \pi \cdot r} \tag{12/1.3}$$

Magnetischer Fluss Φ; Flussdichte B; Feldstärke H;
Magnetische Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$; In Luft $\mu_r = 1$

Berechnung:

$$u = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{mit } N = 1 \qquad u = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad \text{mit } B \perp A \qquad \Phi = B \cdot A = \underbrace{\mu \cdot H}_{B} \cdot \underbrace{l \cdot d}_{A}$$

$$H = \frac{i}{2 \cdot \pi \cdot D} \qquad \text{Abhängigkeit vom Abstand } d \text{ vernachlässigbar } d \ll D.$$

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} \underbrace{=}_{linearer Anstieg} -\frac{\Phi}{t} = -\mu \cdot l \cdot d \cdot \frac{i}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot t} = -\frac{\mu \cdot i \cdot l \cdot d}{2 \cdot \pi \cdot D \cdot t}$$

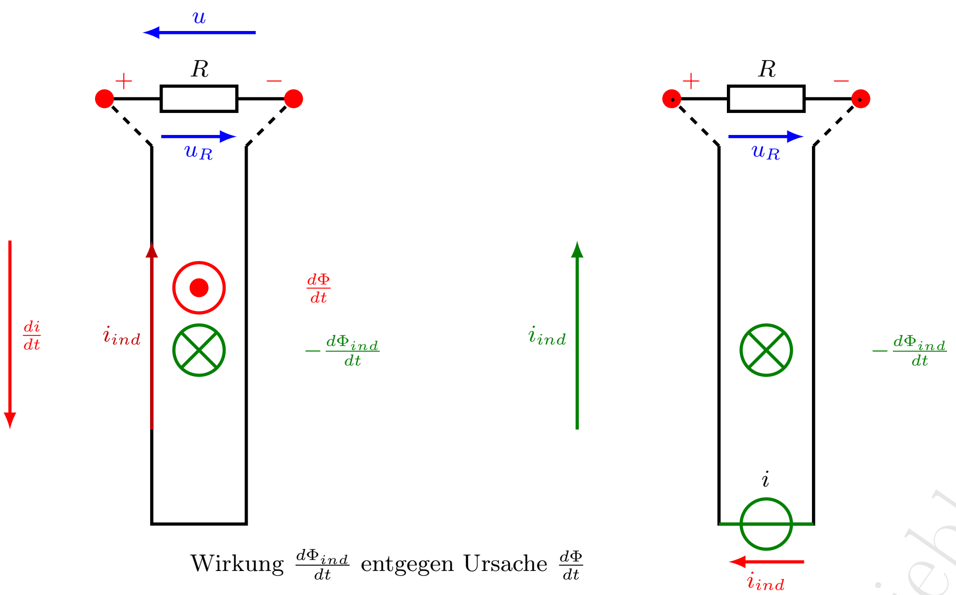
$$= -\frac{1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/(Am)} \cdot 15000\,\mathrm{A} \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{2 \cdot \pi \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-134\,\mathrm{V}}}$$

Leitung symmetrisch zur Mittellinie bei 2,99 m und 3,01 m

$$\text{mit } \Phi = \frac{\mu \cdot i \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{D + d/2}{D - d/2}$$

$$u = -\frac{\mu_0 \cdot 15 \cdot 10^3\,\mathrm{A} \cdot 4\,\mathrm{m}}{0{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \underbrace{\ln \frac{3{,}01\,\mathrm{m}}{2{,}99\,\mathrm{m}}}_{6{,}66 \cdot 10^{-3}} = -133{,}7\,\mathrm{V}$$

<u>Lentzsche Regel:</u>



Wirkung $\frac{d\Phi_{ind}}{dt}$ entgegen Ursache $\frac{d\Phi}{dt}$

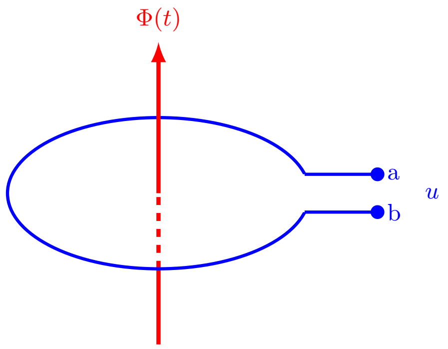
u hat negatives Vorzeichen, da Polung von i_{ind} entgegen Bezugspfeilen aus Skizze ($u_R = -u$)

12/2 Drahtschleife

Eine Drahtschleife $N = 1$ wird von einem zeitlich veränderlichen Fluss durchsetzt.
$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot (1 - e^{-t/T})$ mit $\Phi_0 = 60 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs}$ und $T = 1\,\mathrm{ms}$.

a) Berechnen Sie die Spannung u für $t = 0{,}5 \cdot T$!

b) Geben Sie die Polarität der Anschlussklemmen der Drahtschleife a-b für diesen Zeitpunkt an und begründen Sie ihre Angabe!



Formeln:

$$u = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \tag{12/2.1}$$

Berechnung:

a) Spannung u für $t = 0{,}5 \cdot T$

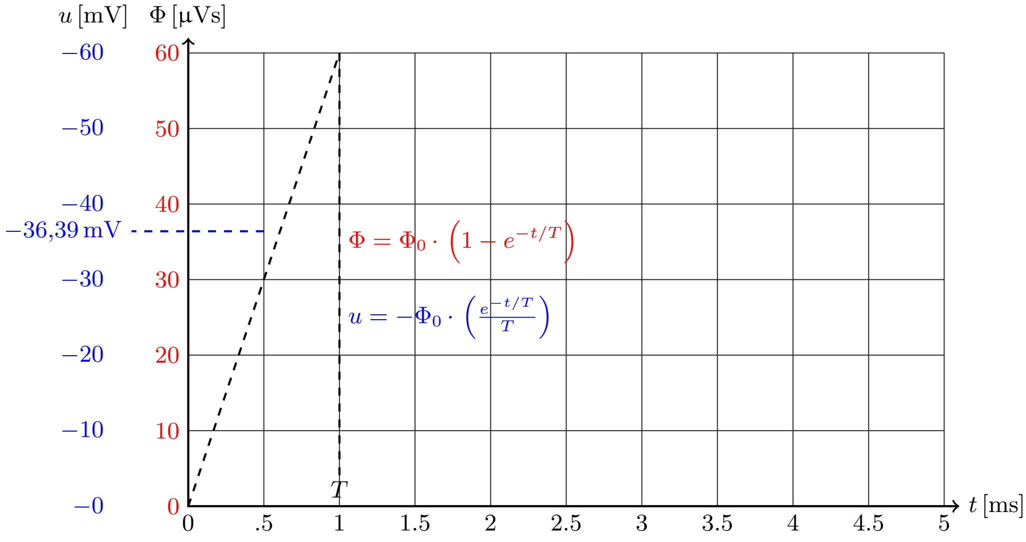
$$\begin{aligned}
u &= -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{mit } N = 1\\
&= -\frac{d\left(\Phi_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)}{dt}\\
&= -\Phi_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\\
&= -\Phi_0 \cdot \left[-e^{-\frac{t}{T}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{T}\right)}_{\text{Nachdifferenzieren}}\right]
\end{aligned}$$

mit $t = 0{,}5 \cdot T \qquad T = 1\,\mathrm{ms}$

$$u = -60 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs} \cdot \left[-e^{-0{,}5} \cdot \left(-\frac{1}{1\,\mathrm{ms}}\right)\right] = \underline{\underline{-36{,}39\,\mathrm{mV}}}$$

b) Polarität der Spannung u für $t = 0{,}5 \cdot T$

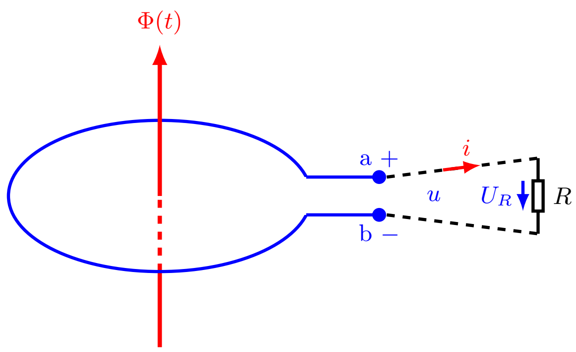
$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \text{Linke-Hand für Stromrichtung}$$



Induzierte Spannung bei zunehmendem Fluss

<u>Lenzsche Regel:</u>

$$\text{Klemme a} \Rightarrow +$$
$$\text{Klemme b} \Rightarrow -$$

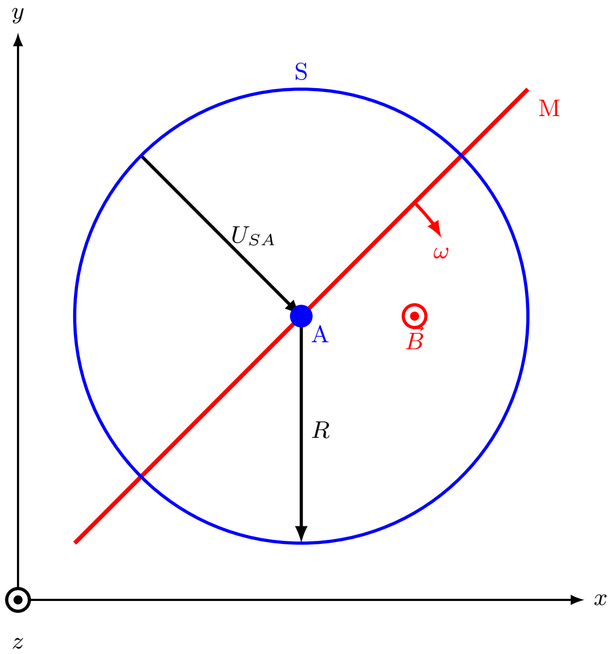


12/3 Metallstab

Ein Metallstab M rotiert um die Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω.
Der Metallstab schleift auf dem Metallring S. Senkrecht zu dem Metallstab und Metallring wirkt eine homogene magnetische Flussdichte $\vec{B} = B_z \cdot \vec{e}_z$
Zwischen Schleifring und Achse wird eine Gleichspannung U_{SA} gemessen.

Berechnen Sie die Flussdichte B_z.

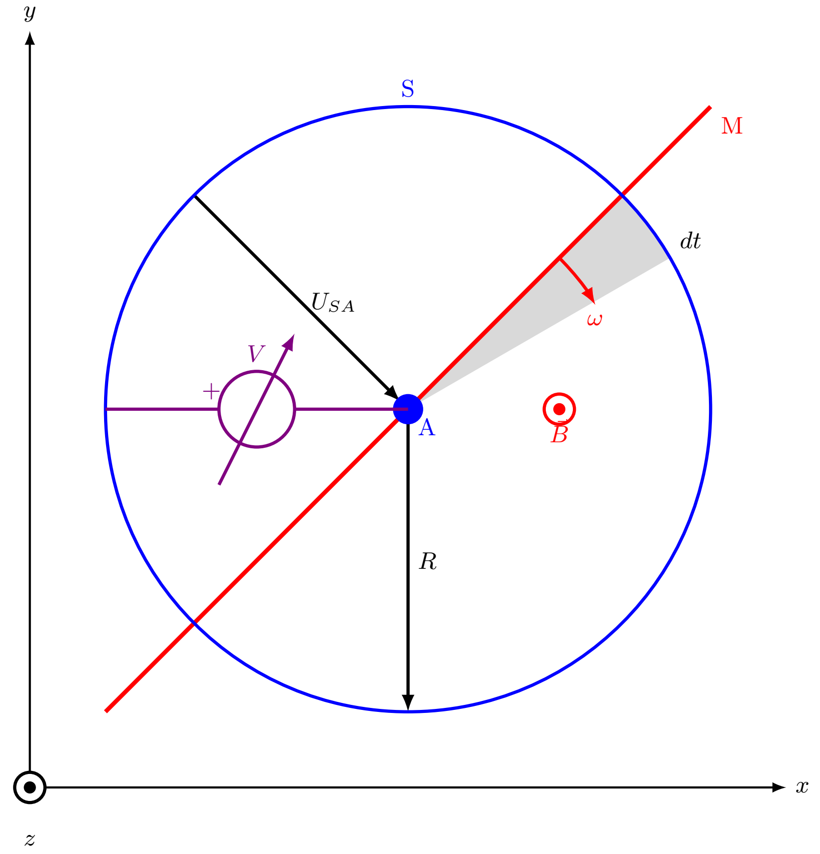
$R = 2\,\mathrm{cm}$; $\omega = 100 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\mathrm{s}}$; $U_{SA} = 25\,\mathrm{mV}$.



Formeln:

$$u_{ind} = -N \cdot \left(\underbrace{\frac{dB(t)}{dt} \cdot A(t)}_{\text{Ruheinduktion}} + \underbrace{\frac{B(t)}{dt} \cdot dA(t)}_{\text{Bewegungsinduktion}} \right) \tag{12/3.1}$$

Berechnung:



Bewegungsinduktion! $N = 1$, homogenes zeitlich unverändertes Feld $B \perp$ zu ω

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot \frac{dA(t)}{dt}$$

Der Metallstab überstreicht im Zeitintervall dt den vom Fluß Φ durchsetzten Kreissektor mit der Fläche

$$dA(t) = \underbrace{R^2 \cdot \pi}_{\text{Kreisfläche}} \cdot \underbrace{\frac{\omega \cdot dt}{2\pi}}_{\text{Segment}}$$

$$dA(t) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \omega \cdot dt$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \omega$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \omega$$

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \omega$$

$$|u_{ind}| = |B_z| \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \omega$$

$$|B_z| = \frac{2 \cdot U_{SA}}{R^2 \cdot \omega} = \frac{2 \cdot 25\,\mathrm{mV}}{(2\,\mathrm{cm})^2 \cdot 100 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{0{,}398\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}}$$

Alternativ:
Bewegungsinduktion mit $v(r) = \omega \cdot r$ (radiusabhängig)

$$|u_{ind}| = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \int v \cdot |B_z| \cdot dr = \omega \cdot |B_z| \int_{r=0}^{R} r \cdot dr = \omega \cdot |B_z| \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot |B_z| \cdot R^2$$

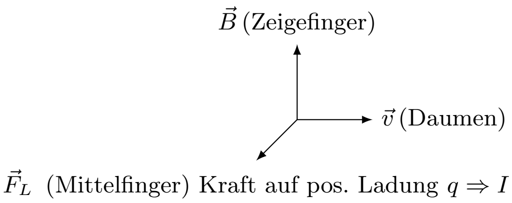
$$|B_z| = \underline{\underline{0{,}398 \, \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}}$$

Richtung der Lorenzkraft $\vec{F}_L$ wirkt so, daß positive Ladungsträger q zum Zentrum (A) gedrückt werden (entspricht der technischen Stromrichtung I).

$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B});\qquad (F_L = q \cdot v \cdot B$, wenn $v \perp B)$

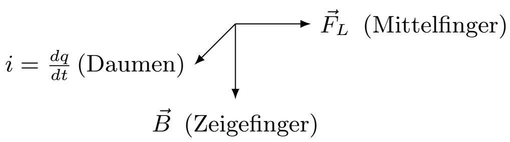
Rechte Hand Regel:
Der **Daumen** zeigt in Richtung der Ursache:
a.) Bewegter Leiter im Magnetfeld: Die Relativbewegung $\vec{v}$ des Leiters im Magnetfeld
b.) Strom durch Leiter im Magnetfeld: Die technische Stromrichtung I bzw. Bewegungsrichtung der positiven Ladung q
Der **Zeigefinger** zeigt senkrecht zum Daumen in Richtung der magnetischen Feldlinien, also der Vermittlung (auch Verknüpfung), also dem Magnetfeld $\vec{B}$
Der **Mittelfinger** zeigt senkrecht zu Daumen und Zeigefinger in Richtung der Wirkung, der Lorentzkraft $\vec{F}_L$

a.) Bewegter Leiter im Magnetfeld



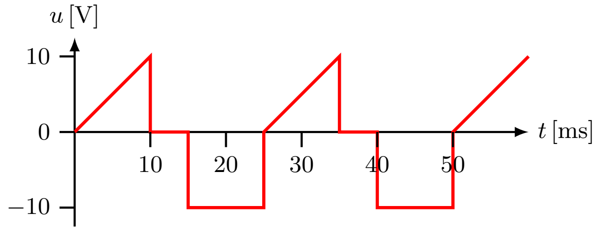
Da U_{SA} positiv, muß B_z negativ sein. $\Rightarrow B_z = \underline{\underline{-0{,}398 \, \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}}$

b.) Strom durch Leiter im Magnetfeld:



12/4 Spannungsverlauf

Gegeben ist die dargestellte Spannung:



a) Ermitteln Sie die Frequenz der Grundschwingung!

b) Berechnen Sie den Gleichrichtwert der Spannung!

c) Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung!

d) Berechnen Sie den Formfaktor der Spannung!

e) Nun wird die dargestellte Spannung an einen Ohmschen Widerstand von $100\,\Omega$ angelegt. Welche Verlustleistung tritt im Widerstand auf?

Formeln:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\cdot\int_{t=0}^{T} |u(t)|\cdot dt \qquad \text{Gleichrichtwert} \qquad (12/4.1)$$

$$U = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{t=0}^{T} u^2(t)\cdot dt} \qquad \text{Effektivwert} \qquad (12/4.2)$$

$$F = \frac{U}{\overline{|u|}} = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}} \qquad (12/4.3)$$

Berechnung:

a) Grundschwingung mit $T = 25\,\text{ms}$:

$$f = \frac{1}{T} = 40\,\text{Hz}$$

b) Gleichrichtwert der Spannung:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\cdot(F_{\triangle} + F_{\square}) = \frac{1}{25\,\text{ms}}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 10\,\text{V}\cdot 10\,\text{ms} + 10\,\text{V}\cdot 10\,\text{ms}) = \frac{150\,\text{V}\cdot\text{ms}}{25\text{ms}} = \underline{\underline{6\,\text{V}}}$$

c) Effektivwert der Spannung:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\cdot dt}$$

$$U^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{10\,\text{ms}}\left(\frac{10\,\text{V}}{10^{-2}\,\text{s}}\cdot t\right)^2\cdot dt + \int_{15\,\text{ms}}^{25\,\text{ms}}(-10\,\text{V})^2\cdot dt\right)$$

$$= \frac{1}{25\,\text{ms}}\left(\frac{100\,\text{V}^2}{10^{-4}\,\text{s}^2}\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{10\,\text{ms}} + 100\,\text{V}^2\cdot[t]_{15\,\text{ms}}^{25\,\text{ms}}\right)$$

$$= \frac{100\,\text{V}^2}{25\,\text{ms}}\left(10^4\frac{1}{\text{s}^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{-6}\,\text{s}^3 + 10\,\text{ms}\right) = 53{,}33\,\text{V}^2$$

$$U = \sqrt{53{,}33}\,\text{V} = \underline{\underline{7{,}30\,\text{V}}}$$

d) Formfaktor der Spannung:

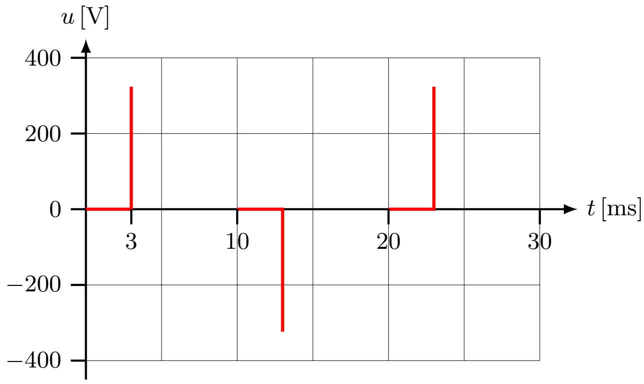
$$F = \frac{U}{\overline{|u|}} = \frac{7{,}30\,\mathrm{V}}{6\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{1{,}22}}$$

e) Verlustleistung im Widerstand:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{53{,}33\,\mathrm{V}^2}{100\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}533\,\mathrm{W}}}$$

12/5 Phasenanschnitt

Berechnen Sie den Effektivwert dieser sinusförmigen Spannung mit Phasenanschnitt.

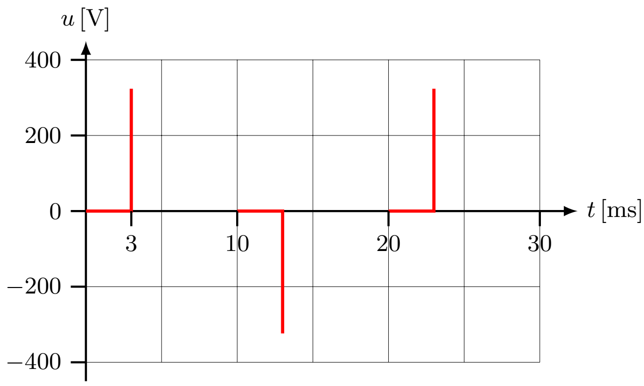


Formeln:

$$U = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} u^2(t) \cdot dt} \qquad \text{Effektivwert} \qquad (12/5.1)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad (12/5.2)$$

Berechnung:



Periodendauer $T = 20\,\text{ms}$, da Symmetrie in einer Periode. Betrachtung nur einer Sinus-Halbwelle mit $\frac{1}{2} \cdot T = 10\,\text{ms}$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20\,\text{ms}} = 314\,\frac{1}{\text{s}}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \dots 3\,\text{ms} \\ 400\,\text{V} \cdot \sin(\omega t) = 400\,\text{V} \cdot \sin(314\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t) & \text{für } t = 3\,\text{ms} \dots 10\,\text{ms} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T/2} \int_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} (400\,\text{V} \cdot \sin(\omega t))^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T/2} \cdot (400\,\text{V})^2 \int_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} \sin^2(\omega t) \cdot dt \end{aligned}$$

$$\text{mit } \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{(400\,\text{V})^2}{10\,\text{ms}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} 1\,dt - \int_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} \cos(2\omega t) \cdot dt \right) \\ &= \frac{(400\,\text{V})^2}{10\,\text{ms}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\Big[t\Big]_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} - \left[\sin(2\omega t) \cdot \frac{1}{2\omega}\right]_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}} \right) \\ &= \frac{(400\,\text{V})^2}{20\,\text{ms}} \cdot \left(7\,\text{ms} - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \underbrace{\left(sin(\cancel{2} \cdot \frac{2\pi}{\cancel{20\,\text{ms}}} \cdot \cancel{10\,\text{ms}} \right)}_{sin(2\pi)=0} - sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{20\,\text{ms}} \cdot 3\,\text{ms}\right) \right) \\ &= \frac{(400\,\text{V})^2}{20\,\text{ms}} \cdot \left(7\,\text{ms} - \frac{20\,\text{ms}}{4\pi} \cdot \underbrace{(-sin(0{,}6\pi))}_{-0{,}951} \right) \\ &= \frac{(400\,\text{V})^2}{20\,\text{ms}} \cdot 8{,}51\,\text{ms} = 68109\,\text{V}^2 \end{aligned}$$

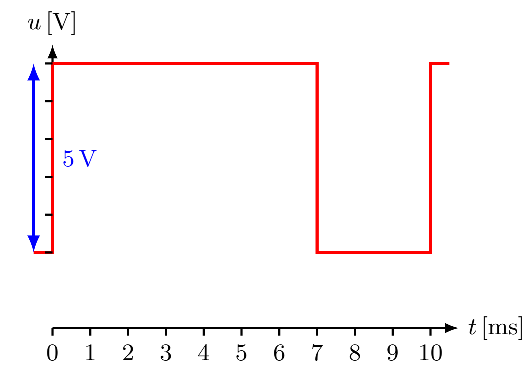
$$U = 400\,\text{V} \cdot \sqrt{\frac{8{,}51\,\text{ms}}{20\,\text{ms}}} = \underline{\underline{261\,\text{V}}}$$

Zum Vergleich: Sinus ohne Phasenanschnitt hätte einen Effektivwert von

$$U_{(sin)} = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{2}} = 283\,\text{V}$$

12/6 Rechteckspannung

Gegeben ist eine periodische Rechteckspannung mit der Periodendauer von 10 ms.
Berechnen Sie den Effektivwert, wenn der arithmetische Mittelwert gleich Null ist.



Formeln:

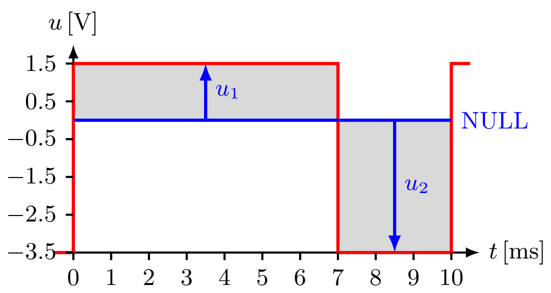
$$\overline{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} u(t) \cdot dt \qquad \text{Arithmetischer Mittelwert} \qquad (12/6.1)$$

$$U = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} u^2(t) \cdot dt} \qquad \text{Effektivwert} \qquad (12/6.2)$$

Berechnung:

a) Arithmetischer Mittelwert $\overline{u} = 0$

$\Rightarrow$ Fläche ober- und unterhalb der Nulllinie muß gleich sein!
$\Rightarrow$ Wo ist die Nulllinie?



$u_1 + (-u_2) = 5\,\mathrm{V} \rightarrow u_2 = -(5\,\mathrm{V} - u_1)$

Fläche:

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{7\,\mathrm{ms}} u_1\cdot dt - \int_{7\,\mathrm{ms}}^{10\,\mathrm{ms}} u_2\cdot dt\right) \overset{!}{=} 0$$

$$u_1\cdot 7\,\mathrm{ms} - u_2\cdot 3\,\mathrm{ms} = 0$$

$$u_1\cdot 7\,\mathrm{ms} - (5\,\mathrm{V} - U_1)\cdot 3\,\mathrm{ms} = 0$$

$$(7\,\mathrm{ms} + 3\,\mathrm{ms})\cdot u_1 = 15\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{ms}$$

$$u_1 = \frac{15\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{ms}}{10\,\mathrm{ms}} = \underline{\underline{1{,}5\,\mathrm{V}}}$$

$$u_2 = -(5\,\mathrm{V} - 1{,}5\,\mathrm{V}) = \underline{\underline{-3{,}5\,\mathrm{V}}}$$

Alternativ mit Beträgen

$|u_1| + |u_2| = 5\,\mathrm{V} \rightarrow |u_2| = 5\,\mathrm{V} - |u_1|$

Fläche:

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{7\,\mathrm{ms}} u_1\cdot dt - \int_{7\,\mathrm{ms}}^{10\,\mathrm{ms}} u_2\cdot dt\right) \overset{!}{=} 0$$

$$u_1\cdot 7\,\mathrm{ms} - u_2\cdot 3\,\mathrm{ms} = 0$$

$$u_1\cdot 7\,\mathrm{ms} - (5\,\mathrm{V} - |u_1|)\cdot 3\,\mathrm{ms} = 0$$

$$(7\,\mathrm{ms} + 3\,\mathrm{ms})\cdot |u_1| = 15\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{ms}$$

$$|u_1| = \frac{15\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{ms}}{10\,\mathrm{ms}} = \underline{1{,}5\,\mathrm{V}} \qquad |u_2| = 5\,\mathrm{V} - 1{,}5\,\mathrm{V}) = \underline{3{,}5\,\mathrm{V}}$$

Da u_1 positives Vorzeichen in der Skizze hat, muss u_2 ein negatives Vorzeichen erhalten.

$$\Rightarrow u_1 = \underline{\underline{1{,}5\,\mathrm{V}}} \qquad u_2 = \underline{\underline{-3{,}5\,\mathrm{V}}}$$

b) Effektivwert

$$U^2 = U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int (u(t))^2\cdot dt$$

$$= \frac{1}{10\,\mathrm{ms}}\left(\int_0^{7\,\mathrm{ms}} (1{,}5\,\mathrm{V})^2\cdot dt + \int_{7\,\mathrm{ms}}^{10\,\mathrm{ms}} (-3{,}5\,\mathrm{V})^2\cdot dt\right)$$

$$= \frac{1}{10\,\mathrm{ms}}\cdot\left(2{,}25\,\mathrm{V}^2\cdot[t]_0^{7\,\mathrm{ms}} + 12{,}25\,\mathrm{V}^2\cdot[t]_{7\,\mathrm{ms}}^{10\,\mathrm{ms}}\right)$$

$$= \frac{1}{10\,\mathrm{ms}}\cdot\left(2{,}25\,\mathrm{V}^2\cdot 7\,\mathrm{ms} + 12{,}25\,\mathrm{V}^2\cdot(10\,\mathrm{ms} - 7\,\mathrm{ms})\right) = 5{,}25\,\mathrm{V}^2$$

$$U = \sqrt{5{,}25\,\mathrm{V}^2} = \underline{\underline{2{,}29\,\mathrm{V}}}$$

13/1 Scheinersatzwiderstände

Der Eingangswiderstand eines linearen Zweipols beträgt bei der Frequenz $f = 800\,\text{Hz}$ $Z = 600\,\Omega$, sein Phasenwinkel ist $\varphi = 30\,^\circ$ induktiv.

a) Berechnen Sie die Schaltungselemente R_r und L_r der gleichwertigen Reihenersatzschaltung!

b) Berechnen Sie die Schaltungselemente R_p und L_p der gleichwertigen Parallelersatzschaltung!

c) Wie ändern sich die Scheinersatzwiderstände (Betrag und Phase) beider Ersatzschaltungen, wenn die Frequenz $f' = 600\,\text{Hz}$ beträgt?

Formeln:

$\underline{Z}$	Scheinwiderstand (Impedanz)	(13/1.1)
$Z = \lvert\underline{Z}\rvert$	Betrag des Scheinwiderstandes	(13/1.2)
$X = \omega \cdot L$	Blindwiderstand (Reaktdanz)	(13/1.3)
$B = -\dfrac{1}{\omega \cdot L}$	Blindleitwert (Suszepdanz)	(13/1.4)

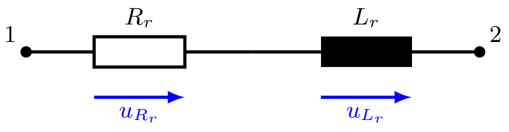
Berechnung:

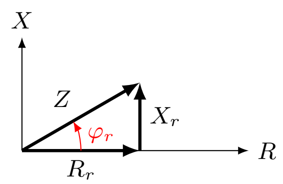
a) Widerstandsebene:

$$R_r = Z \cdot \cos(\varphi_r) = 600\,\Omega \cdot \cos(30^\circ) = \underline{520\,\Omega}$$

$$X_r = Z \cdot \sin(\varphi_r) = 600\,\Omega \cdot \sin(30^\circ) = 300\,\Omega$$

$$L_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{X_r}{2\pi f} = \frac{300\,\Omega}{2\pi \cdot 800\,\frac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{60\,\text{mH}}}$$





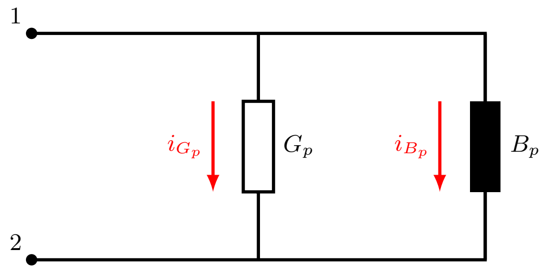
b) Leitwertebene:

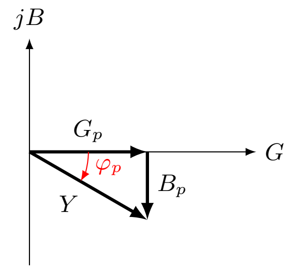
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{600\,\Omega} = 1{,}667\,\text{mS}; \qquad \varphi_p = -\varphi_r = -30^\circ$$

$$G_p = Y \cdot \cos(\varphi_p) = 1{,}667\,\text{mS} \cdot \cos(-30^\circ) = 1{,}443\,\text{mS} \Rightarrow R_p = \frac{1}{G_p} = \underline{\underline{693\,\Omega}}$$

$$B_p = Y \cdot \sin(\varphi_p) = 1{,}667\,\text{mS} \cdot \sin(-30^\circ) = -0{,}833\,\text{mS} \Rightarrow X_p = -\frac{1}{B_p} = 1200\,\Omega$$

$$L_p = -\frac{1}{\omega \cdot B_p} = -\frac{1}{2\pi f \cdot B_p} = \frac{-1}{2\pi \cdot 800\,\frac{1}{\text{s}} \cdot (-0{,}833 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\Omega})} = \underline{\underline{239\,\text{mH}}}$$





c) Frequenz f'
Reihenschaltung:

$$R'_r \stackrel{!}{=} R_r = 520\,\Omega$$

$$X'_r = \omega' \cdot L_r = 2\pi \cdot 600\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}06\,\Omega\mathrm{s} = 226\,\Omega$$

$$Z'_r = \sqrt{R'^2_r + X'^2_r} = \sqrt{520^2 + 226^2}\,\Omega = \underline{\underline{567\,\Omega}}$$

$$\varphi'_r = \arctan\frac{\Im}{\Re} = \arctan\frac{X'_r}{R'_r} = \arctan\frac{226\,\Omega}{520\,\Omega} = \underline{\underline{23{,}5\,^\circ}}$$

Parallelschaltung:

$$G'_p \stackrel{!}{=} G_p = 1{,}443\,\mathrm{mS}$$

$$B'_p = \frac{-1}{\omega' \cdot L_p} = \frac{-1}{2\pi \cdot 600\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}239\,\Omega\mathrm{s}} = \frac{-1}{901\,\Omega} = -1{,}11\,\mathrm{mS}$$

$$Y'_p = \sqrt{G'^2_r + B'^2_r} = \sqrt{1{,}443^2 + (-1{,}11)^2}\,\mathrm{mS} = 1{,}82\,\mathrm{mS}$$

$$Z'_p = \frac{1}{Y'_p} = \underline{\underline{549\,\Omega}}$$

$$\varphi'_p = \arctan\frac{-1{,}11\,\mathrm{mS}}{1{,}443\,\mathrm{mS}} = \underline{\underline{-37{,}6\,^\circ}}$$

13/2 Verbraucherleistung

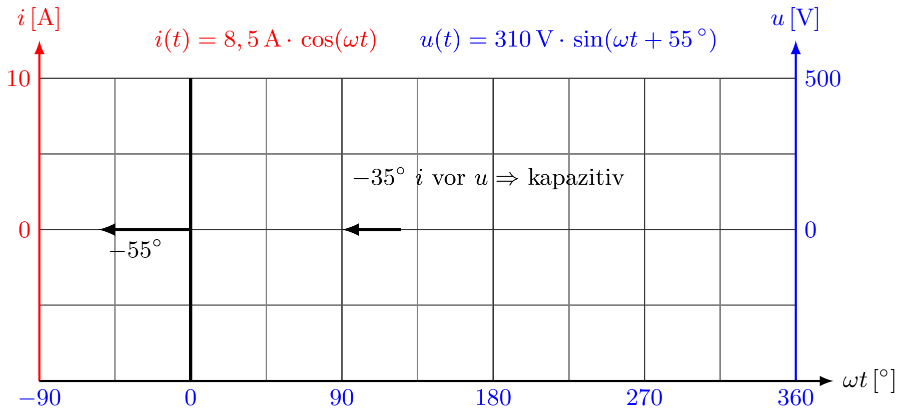
An einem Verbraucher liegt die Spannung $u(t) = 310\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 55\,^\circ)$ an, er nimmt einen Strom von $i(t) = 8,5\,\mathrm{A} \cdot \cos(\omega t)$ auf.

a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Momentanwertes der Verbraucherleistung!

b) Berechnen Sie die Schein-, Wirk- und Blindleistung!

Merksatz:
Kondensat**or**, Strom eilt v**or**
Induktivit**ät**, Strom ist zu sp**ät**

Berechnung:



a) Leistungsverlauf

$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t) \cdot i(t) \qquad \text{Momentane Leistung} \\
p(t) &= 310\,\mathrm{V} \cdot 8{,}5\,\mathrm{A} \cdot \sin x \cdot \cos y \\
&\quad \text{mit } x = \omega t + 55^\circ = \omega t + 0{,}96\,\mathrm{rad} \qquad y = \omega t \\
&\quad \text{und } \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)] \Rightarrow \\
p(t) &= \widehat{u} \cdot \widehat{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)] \\
&= 310\,\mathrm{V} \cdot 8{,}5\,\mathrm{A} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(\cancel{\omega t} + 0{,}96 - \cancel{\omega t}) + \sin(\omega t + 0{,}96 + \omega t)\right] \\
&= \underbrace{310\,\mathrm{V} \cdot 8{,}5\,\mathrm{A} \cdot \frac{1}{2}}_{S=1318\,\mathrm{VA}} \cdot \left[\underbrace{\sin(0{,}96)}_{0{,}819} + \sin(2\omega t + 0{,}96)\right] \\
p(t) &= \underline{\underline{1079\,\mathrm{W} + 1318\,\mathrm{VA} \cdot \sin(2\omega t + 0{,}96)}}
\end{aligned}
$$

b) S Schein-, P Wirk- und Q Blindleistung

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t) &= \sin(\omega t + 90^\circ) \\
\varphi_i &= +90^\circ \quad \varphi_u = +55^\circ \\
\varphi_u - \varphi_i &= +55^\circ - 90^\circ = -35^\circ
\end{aligned}$$

$$S = U \cdot I = \frac{\widehat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\widehat{i}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{u} \cdot \widehat{i} = \frac{2635}{2}\,\mathrm{VA} = \underline{\underline{1318\,\mathrm{VA}}}$$

$$P = S \cdot \cos(-35^\circ) = S \cdot 0{,}819 = \underline{\underline{1079\,\mathrm{W}}}$$

$$Q = S \cdot \sin(-35^\circ) = S \cdot (-0{,}576) = \underline{\underline{-756\,\mathrm{var}}} \qquad \text{Lies: Volt-Ampere-reaktiv}$$

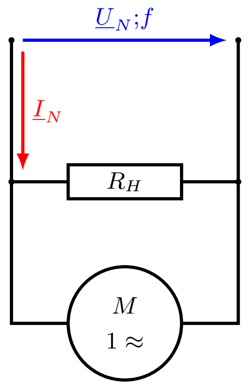
13/3 Blindleistungskompensation

Die Daten der beiden Verbraucher am Einphasen-Wechselstromnetz sind:
Heizwiderstand R_H: Aufgenommene Leistung $P_H = 1,5\,\text{kW}$
Motor M: Aufgenommene Leistung $P_{auf} = 2,5\,\text{kW}$
Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0,7$
$U_N = 230\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$

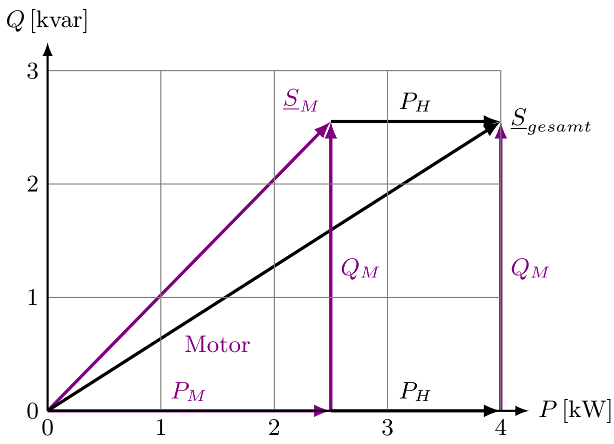
a) Wie groß ist der dem Netz entnommene Strom I_N?

b) Welche Phasenverschiebung hat der Strom $\underline{I}_N$ zu der Spannung $\underline{U}_N$?

c) Welche Kapazität muss ein Kondensator, parallel zu den Verbrauchern geschaltet, haben, damit der Blindstrom voll kompensiert wird?



Berechnung:



$$\underline{S}_{gesamt} = \sqrt{(P_M + P_H)^2 + Q_M^2}$$

a) Nennstrom

$$\varphi = \arccos(0{,}7) = 45{,}6^\circ$$

$$S_M = \frac{P_{auf}}{0{,}7} = \underline{3571\,\mathrm{VA}} \qquad \text{Motor Scheinleistung}$$

$$Q_M = S_M \cdot \sin\varphi = 3571\,\mathrm{VA} \cdot 0{,}7141 = \underline{2551\,\mathrm{var}} \qquad \text{Motor Blindleistung}$$

$$P = P_{auf} + P_H = \underline{4\,\mathrm{kW}} \qquad \text{Gesamte Wirkleistung}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_M^2} = \underline{4744\,\mathrm{VA}} \qquad \text{Gesamte Scheinleistung}$$

$$I_N = \frac{S}{U_N} = \frac{4744\,\mathrm{VA}}{230\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{20{,}63\,\mathrm{A}}}$$

b) Phasenverschiebung

$$\varphi_N = \arccos\frac{P}{S} = \arccos\frac{4000\,\mathrm{W}}{4744\,\mathrm{VA}} = \underline{\underline{32,52^\circ}}$$

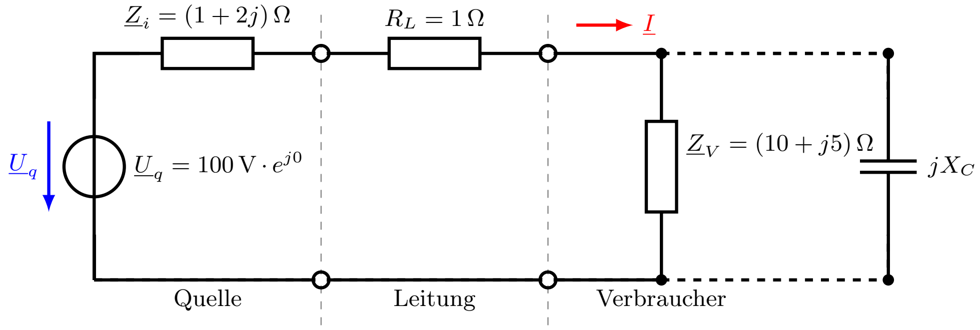
c) Kompensation

$$|Q_C| = Q_M = 2551\,\mathrm{var} = U_N^2 \cdot \omega \cdot C$$

$$C = \frac{2551\,\mathrm{var}}{2\pi \cdot 50\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (230\,\mathrm{V})^2} = \underline{\underline{153{,}6\,\mu\mathrm{F}}}$$

13/4 Energieübertragung

Die Skizze zeigt ein System zur elektrischen Energieübertragung bestehend aus Quelle, Leitung und Verbraucher. Das System soll mit einem parallel geschalteten Kondensator X_C so optimiert werden, dass die Leitungsverluste P_{VRL} minimal werden.



a) Bestimmen Sie X_C so, dass der Blindleistungsbedarf des Verbrauchers verschwindet.

b) Berechnen Sie die Verlustleistung P_{VRL} der Leitung und die Wirkleistung P_W im Verbraucher.

Berechnung:

a) Verbraucher $\underline{Z}_V \,||\, X_C$, daher Ersatzschaltbild für $\underline{Z}_V$ (ESB) in Parallelform erforderlich

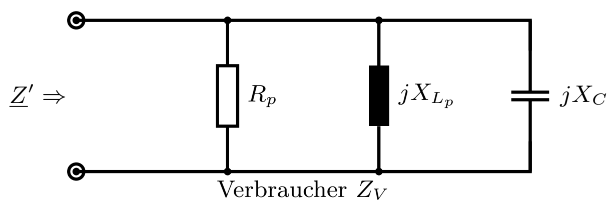
$$\underline{Z}_V = R_V + jX_V = (10 + j5)\,\Omega \qquad \text{Scheinwiderstand, entspricht einer Reihenschaltung}$$

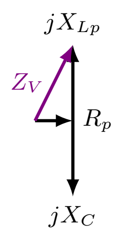
$$Z_V^2 = R_V \cdot R_p = R_V^2 + X_V^2 \qquad \text{Umwandlung in Parallel-ESB}$$

$$R_p = R_V + \frac{X_V^2}{R_V} = (10 + \frac{25}{10})\,\Omega = 12{,}5\,\Omega$$

$$Z_V^2 = X_V \cdot X_{L_p} = R_V^2 + X_V^2 \qquad \text{Umwandlung in Parallel-ESB}$$

$$X_{L_p} = X_V + \frac{R_V^2}{X_V} = (5 + \frac{100}{5})\,\Omega = 25\,\Omega$$





$$\underline{Z}' = \underline{Z}_V || jX_C$$

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_{Lp}} + \frac{1}{jX_C}$$

Leitungsverluste sind minimal, wenn die Blindleistung = 0 wird (Kompensation)

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{R_p} + \cancel{\frac{1}{jX_{Lp}}} + \cancel{\frac{1}{jX_C}} \qquad \Rightarrow \underline{Z}' = R_p$$

$$\Im(\underline{Z}') = 0 \quad \text{oder} \quad |X_C| \stackrel{!}{=} |X_{L_p}| \text{ also}$$

$$X_C = -X_{L_p} = \underline{\underline{-25\,\Omega}}$$

$$\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_i + R_L + \underline{Z}'$$

$$\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_i + R_L + R_p = (1 + j2 + 1 + 12{,}5)\,\Omega = (14{,}5 + j2)\,\Omega$$

$$|\underline{Z}_{ges}| = \sqrt{14{,}5^2 + 2^2}\,\Omega = 14{,}64\,\Omega$$

$$I = \frac{U}{|Z_{ges}|} = \frac{100\,\mathrm{V}}{14{,}64\,\Omega} = 6{,}83\,\mathrm{A}$$

b) Verlust- und Wirkleistung

$$P_{VR_L} = I^2 \cdot R_L = (6{,}83\,\mathrm{A})^2 \cdot 1\,\Omega = \underline{\underline{46{,}7\,\mathrm{W}}}$$

$$P_W = I^2 \cdot R_p = (6{,}83\,\mathrm{A})^2 \cdot 12{,}5\,\Omega = \underline{\underline{583\,\mathrm{W}}}$$

13/5 Wechselstrommotor

Ein Einphasen- Wechselstrommotor liegt an einer Spannung von 230 V − 50 Hz und gibt eine Leistung von 2 kW ab, wobei sein Wirkungsgrad $\eta = 80\%$ und sein Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0,7$ beträgt.

a) Wie groß ist die Stromaufnahme des Motors?

b) Welche Kapazität muss parallelgeschaltet werden, um eine Blindstromkompensation auf $cos\varphi = 0{,}9$ zu erreichen?

c) Wie groß ist der dem Netz bei $cos\varphi = 0{,}9$ entnommene Strom?

Formeln:

$$S = U \cdot I \qquad \mathit{Scheinleistung} \tag{13/5.1}$$

$$P_{el} = S \cdot \cos(\varphi) \qquad \mathit{Wirkleistung} \tag{13/5.2}$$

$$P_{ab} = \eta \cdot P_{el} \tag{13/5.3}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \tag{13/5.4}$$

Berechnung:

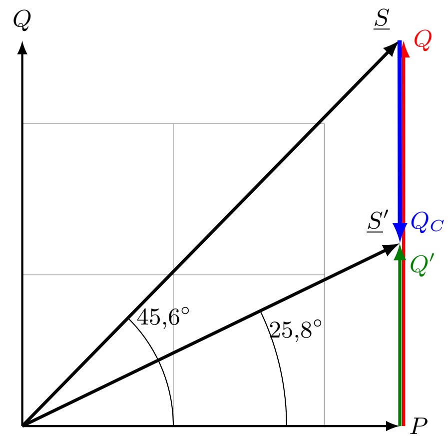
a) Stromaufnahme:

$$P_{el} = \frac{P_{ab}}{\eta} = \frac{2\,\mathrm{kW}}{0{,}8} = 2{,}5\,\mathrm{kW}$$

$$S = \frac{P_{el}}{\cos(\varphi)} = \frac{2{,}5\,\mathrm{kW}}{0{,}7} = 3{,}571\,\mathrm{kVA}$$

$$I = \frac{S}{U} = \frac{3{,}571\,\mathrm{kVA}}{230\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{15{,}5\,\mathrm{A}}}$$

b) Kapazität:



$$\varphi = \arccos(0{,}7) = 45{,}6^\circ$$
$$Q = S \cdot \sin(45{,}6^\circ) = 3{,}571\,\text{kVA} \cdot 0{,}714 = 2{,}55\,\text{kvar}$$
$$\varphi' = \arccos(0{,}9) = 25{,}86^\circ$$
$$S' = \frac{P}{\cos\varphi'} = \frac{2{,}5\,\text{kW}}{0{,}9} = 2{,}778\,\text{kVA}$$
$$Q' = S' \cdot \sin\varphi' = 2{,}778\,\text{kVA} \cdot 0{,}435 = 1{,}209\,\text{kvar}$$

für Kompensation muß gelten:

$$Q + Q_C - Q' = 0$$
$$\Rightarrow Q_C = Q' - Q = 1{,}209\,\text{kvar} - 2{,}55\,\text{kvar} = -1{,}341\,\text{kvar}$$
$$|Q_C| = \frac{U^2}{|X_C|} \quad \Rightarrow |X_C| = \frac{U^2}{|Q_C|} = \frac{(230\,\text{V})^2}{1341\,\text{var}} = 39{,}4\,\Omega = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$$
$$C = \frac{1}{\omega |X_C|} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\frac{1}{\text{s}} \cdot 39{,}4\,\frac{\text{V}}{\text{A}}} = 8{,}06 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{As}}{\text{V}} = \underline{\underline{80{,}6\,\mu\text{F}}}$$

c) Stromaufnahme bei $\cos\varphi = 0{,}9$:

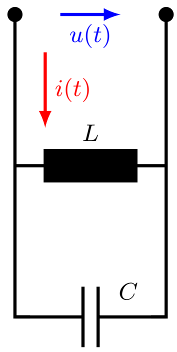
$$S' = U \cdot I' \Rightarrow I' = \frac{S'}{U} = \frac{2778\,\text{VA}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{12{,}1\,\text{A}}}$$

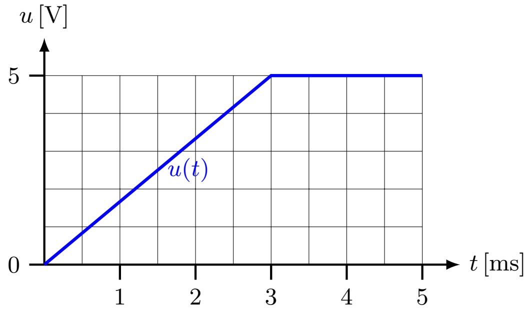
Nicht auf $cos(\varphi) = 1$ kompensieren, da dann Schwingkreis !

13/6 Parallelschaltung von L und C

An der Parallelschaltung von L und C liegt die Spannung $u(t)$ (siehe Diagramm).
Bei $t = 0$ ist $i_L = 0$.
Berechnen Sie den Strom i bei $t = t_2$!

$$U_0 = 5\,\mathrm{V}$$
$$t_1 = 3\mathrm{ms}$$
$$t_2 = 5\mathrm{ms}$$
$$L = 6\,\mathrm{mH}$$
$$C = 100\,\mu\mathrm{F}$$





Formeln:

$$i_C = C \cdot \frac{du}{dt} \tag{13/6.1}$$
$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{13/6.2}$$
$$\text{KNP: } \sum i = 0 \tag{13/6.3}$$

Berechnung:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t)$$
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \tag{1}$$
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{2}$$

$$\text{aus } 1 \quad i_C(t_2) = 0 \quad \text{zum Zeitpunkt } t_2 = 5\,\text{ms} \quad \frac{du}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow i(t_2) = i_L(t_2)$$

$$\text{aus } 2 \qquad di_L = \frac{1}{L} \cdot u_L \cdot dt \qquad \Big| \int$$

$$\big[i_L(t)\big]_{t_a}^{t_b} = i_L(t_b) - i_L(t_a) = \frac{1}{L} \int_{t_a}^{t_b} u_L \cdot dt$$

für $0 \le t \le t_1$

$$i_L(t_1) - \underbrace{i_L(t=0)}_{0} = \frac{1}{L} \int_0^{t_1} \frac{U_0}{t_1} \cdot t \cdot dt = \frac{U_0}{L \cdot t_1} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_1} = \frac{U_0 \cdot t_1}{2 \cdot L}$$

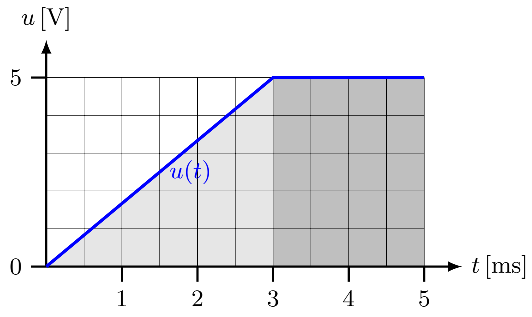
$$i_L(t_1) = \frac{5\,\text{V} \cdot 3 \cdot \,\text{ms}}{2 \cdot 6 \cdot \frac{\text{mVs}}{\text{A}}} = 1{,}25\,\text{A}$$

für $t_1 \le t \le t_2$

$$i_L(t_2) - i_L(t_1) = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} U_0 \cdot dt = \frac{U_0}{L} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$i_L(t_2) = 1{,}25\,\text{A} + \frac{5\,\text{V} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{s}}{6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 1{,}25\,\text{A} + 1{,}67\,\text{A} = \underline{\underline{2{,}92\,\text{A}}}$$

Alternativ Graphisch: i_L ist proportional zur *Fläche* $\cdot \frac{1}{L}$ + const.



$$i(t_2) = \frac{1}{L} \cdot \underbrace{\left(\frac{U_0 \cdot t_1}{2} + U_0(t_2 - t_1)\right)}_{\text{Fläche}} = \frac{1}{6\,\text{mH}} \cdot \left(\frac{5\,\text{V} \cdot 3\,\text{ms}}{2} + 5\,\text{V} \cdot (5-3)\,\text{ms}\right)$$

$$= \frac{(7{,}5 + 10) \cdot 10^{-3}\,\text{Vs}}{6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = \underline{\underline{2{,}92\,\text{A}}}$$

Warum ist $i_L(t_2) - i_L(t_1) \neq 0$? Strom ändert sich noch, nur Spannung ist konstant.
Wenn $u = konstant \rightarrow$ Strom steigt unendlich an. $u = L\frac{di}{dt} \Rightarrow i(t) = 1/L \int u(t)dt$

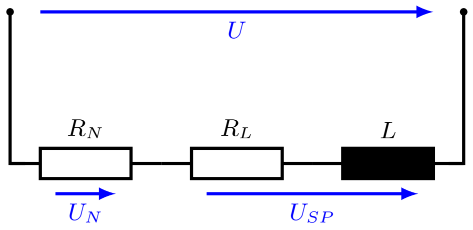
13/7 Werte R_L und L einer Spule

Aus den drei gemessenen sinusförmigen Spannungen U, U_N, und U_{SP} lassen sich die Werte R_L und L einer Spule bestimmen.

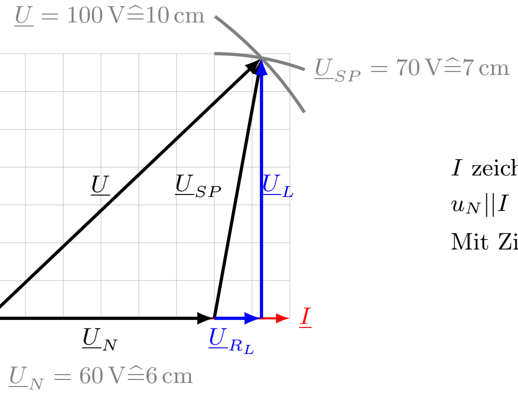
$$U = 100\,\mathrm{V}$$
$$U_N = 60\,\mathrm{V}$$
$$U_{SP} = 70\,\mathrm{V}$$
$$R_N = 60\,\Omega$$
$$f = 50\,\mathrm{Hz}$$

a) Zeichnen Sie ein qualitatives Zeigerdiagramm der Spannungen!

b) Bestimmen Sie R_L und L!



Berechnung:

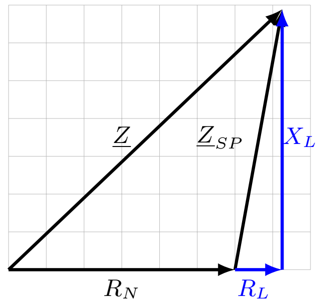


I zeichnen
$u_N || I$
Mit Zirkel U und U_{SP}

$$I = \frac{U_N}{R_N} = \frac{60\,\mathrm{V}}{60\,\Omega} = \underline{\underline{1\,\mathrm{A}}}$$
$$\underline{U}_{SP} = 70\,\mathrm{V} = \sqrt{U_{RL}^2 + U_L^2}$$

Widerstandsoperatoren:

Impedanzdreieck wie Spannungsdreieck



$$Z_{SP} = \frac{U_{SP}}{I} = \frac{70\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}} = 70\,\Omega \quad \text{(Nur Effektivwerte - ohne Winkel)}$$

$$Z_{SP}^2 = R_L^2 + X_L^2 = (70\,\Omega)^2$$

$$X_L^2 = (70\,\Omega)^2 - R_L^2 \tag{1}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}} = 100\,\Omega$$

$$Z^2 = (R_N + R_L)^2 + X_L^2 = (100\,\Omega)^2$$

$$X_L^2 = (100\,\Omega)^2 - (R_N + R_L)^2$$

$$= (100\,\Omega)^2 - (R_N^2 + 2 \cdot R_N \cdot R_L + R_L^2) \tag{2}$$

$$(70\,\Omega)^2 - \cancel{R_L^2} = (100\,\Omega)^2 - R_N^2 - 2 \cdot R_N \cdot R_L - \cancel{R_L^2} \qquad \text{(1 in 2)}$$

$$2 \cdot R_N \cdot R_L = (100\,\Omega)^2 - R_N^2 - (70\,\Omega)^2$$

$$R_L = \frac{(100\,\Omega)^2 - R_N^2 - (70\,\Omega)^2}{2 \cdot R_N} = \frac{(100\,\Omega)^2 - (60\,\Omega)^2 - (70\,\Omega)^2}{2 \cdot 60\,\Omega}$$

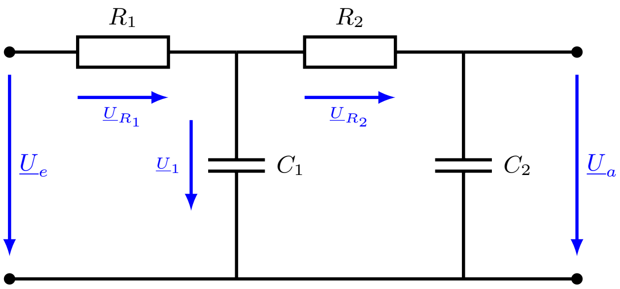
$$= \frac{1500\,\Omega^2}{2 \cdot 60\,\Omega} = \underline{\underline{12{,}5\,\Omega}}$$

$$\text{in (1)} \qquad X_L = \sqrt{(70\,\Omega)^2 - (12{,}5\,\Omega)^2} = 68{,}87\,\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{68{,}87\,\Omega}{2\pi \cdot 50\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{0{,}219\,\mathrm{H}}}$$

14/1 Zeigerdiagramm

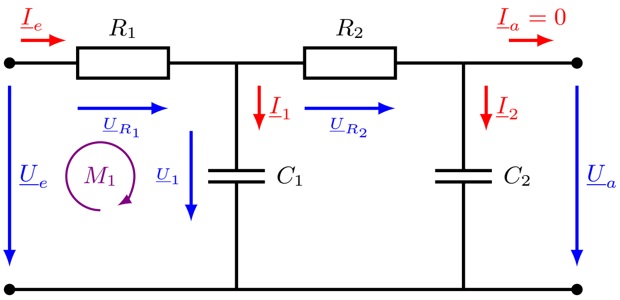
Gegeben ist die Ausgangsspannung $U_a = 5\,\text{V}\cdot e^{j0°}$ und $R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 1\,\text{k}\Omega$
Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm aller Spannungen und aller Ströme!
Maßstäbe: $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{V}$; $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{mA}$ Entnehmen Sie dem Zeigerdiagramm Betrag und Phasenwinkel der Spannung U_e !



Formeln:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad \text{Eulersche Formel} \tag{14/1.1}$$

R-C Ketten sind u.a. ein Ersatzbild für Leitungen (Kapazität pro Längeneinheit)
Berechnung:



$$\underline{U}_a = 5\,\text{V}\cdot e^{j0°}$$

$$\underline{I}_a = 0, \text{ da kein Lastwiderstand angeschlossen ist!}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_a}{\underline{jX}_2} = \frac{5\,\text{V}\cdot e^{j0°}}{1\text{k}\Omega\cdot e^{-j90°}} = 5\,\text{mA}\cdot e^{j90°} = j5\,\text{mA} \quad \text{(Strom eilt vor)} \quad 5\,\text{mA}\angle+90°$$

$$\underline{U}_{R_2} = R_2\cdot\underline{I}_2 = 1\,\text{k}\Omega\cdot e^{-j90°} = 1\,\text{k}\Omega\cdot 5\,\text{mA}\angle+90° = 5\,\text{V}\angle+90\,°$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_a + \underline{U}_{R_2} = 5\,\text{V} + j5\,\text{V} \quad \text{(Vektoren addieren)} \quad = \sqrt{2}\cdot 5\,\text{V}\angle+45°\sqrt{2}\cdot 5\,\text{V}\cdot e^{j45°}$$

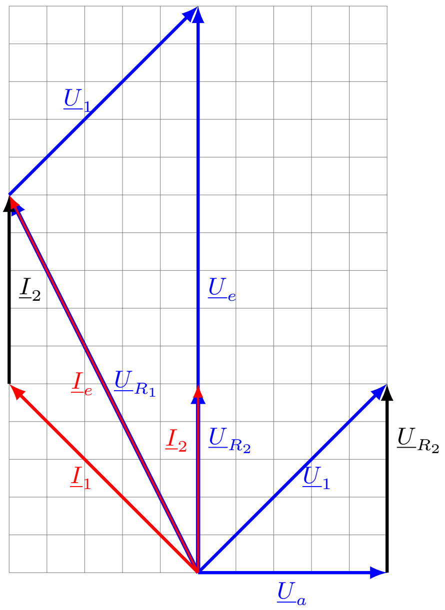
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{jX}_1} = \frac{\sqrt{2}\cdot 5\,\text{V}\cdot e^{j45°}}{1\text{k}\Omega\cdot e^{-j90°}} = \sqrt{2}\cdot 5\,\text{mA}\cdot e^{j135°} = 5\cdot(-1+j)\,\text{mA} \quad \text{(Strom eilt 90° vor)}\ 5\,\text{mA}\angle+135°$$

$$\underline{I}_e = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \sqrt{2}\cdot 5\,\text{mA}\angle+135° + 5\,\text{mA}\angle+90° \quad \text{(Vektoren addieren)}$$

Jetzt zeichnen oder rechnerisch: (jedoch aufwendiger)

$$\begin{aligned}
\underline{I}_e &= I_1 \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) + I_2 \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)\\
&= I_1 \cdot (\cos 135^\circ + j\sin 135^\circ) + I_2 \cdot (\cos 90^\circ + j\sin 90^\circ)\\
&= |\underline{I}_1| \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + |\underline{I}_2| \cdot (0 + j)\\
&= [\cancel{\sqrt{2}} \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + j\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}) + j \cdot 5]\,\mathrm{mA} = (-5 + j10\,\mathrm{mA})\\
&\quad |\underline{I}_e| = \sqrt{10^2 + 5^2}\,\mathrm{mA} = 11{,}18\,\mathrm{mA}\\
&\quad \tan\varphi = \frac{\Im}{\Re} = \tan\frac{10}{-5} = \tan -2 \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{-2}{=} - 1{,}107\,\mathrm{rad} \mathrel{\widehat{=}} -63{,}435^\circ\\
&\quad \text{(Definitionsbereich } \tan\varphi[-\pi/2 \cdots \pi/2] \text{ beachten!)}\\
&= 11{,}18 \cdot e^{j116{,}565^\circ}\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{R_1} &= R_1 \cdot \underline{I}_e\\
&\quad \text{(Nur zur Vollständigkeit) } \underline{U}_{R_1} = 1\,\mathrm{k}\Omega \cdot 11{,}18 \cdot e^{j116{,}565^\circ}\,\mathrm{mA} = 11{,}18 \cdot e^{j116{,}565^\circ}\,\mathrm{V}\\
\underline{U}_e &= \underline{U}_{R_1} + \underline{U}_1 = \underline{\underline{15\,\mathrm{V} \cdot e^{+j90^\circ}}} \quad \text{(Vektoren addieren)}
\end{aligned}$$



ReihenfolgeU_a $I_2, U_{R_2}, U_1, I_1, I_e, U_{R_1}$)
$U_a \widehat{=} 5\,\mathrm{cm}\angle 0^\circ \quad (5 + j0)$
$U_{R_2} \widehat{=} 5\,\mathrm{cm}\angle 90^\circ \quad (0 + j5)$
$U_1 \widehat{=} 7{,}07\,\mathrm{cm}\angle 45^\circ \quad (5 + j5)$
$I_1 \widehat{=} 7{,}07\,\mathrm{cm}\angle 135^\circ \quad (-5 + j5)$
$I_2 \widehat{=} 5\,\mathrm{cm}\angle 90^\circ \quad (0 + j5)$
$I_2 \widehat{=} 5\,\mathrm{cm}\angle 90^\circ \quad (-5 + j5) \rightarrow (0 + j5)$ addiert zu I_1
$I_e \widehat{=} 11{,}18\,\mathrm{cm}\angle 116{,}5^\circ (-5 + j10)$
$U_{R_1} \widehat{=} 11{,}18\,\mathrm{cm}\angle 116{,}5^\circ \quad (-5 + j10)$
$U_1 \widehat{=} 7{,}07\,\mathrm{cm}\angle 45^\circ \quad (-5 + j10) \rightarrow (5 + j5)$ addiert zu U_{R_1}

$$\begin{aligned}
\sum M_1 = 0 &= U_{R_1} + U_1 - U_e\\
U_e &= 15\,\mathrm{V} \cdot e^{j90^\circ}
\end{aligned}$$

14/2 Gesamtwiderstand

Von der Schaltung (Bild 1) sind die Zeiger $\underline{U}_0$ und $\underline{I}_0$ gegeben (Bild 2).

a) Ist der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ induktiv, ohmsch oder kapazitiv? (Stichwortartige Begründung !)

b) Vervollständigen Sie Bild 2 zu einem qualitativen Zeigerdiagramm aller Ströme und Spannungen. (Rechte Winkel oder Parallelen sind zu kennzeichnen. Alle Ströme und Spannungen müssen im Schaltbild (Bild 1) und im Zeigerbild unmissverständlich benannt werden.)

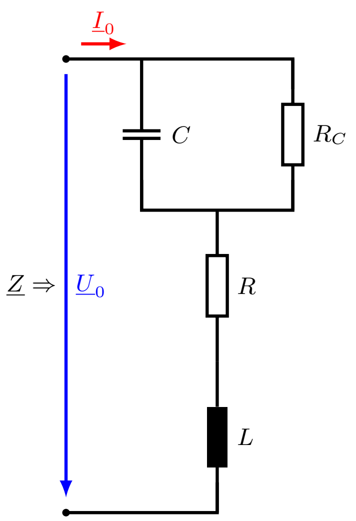


Bild 1

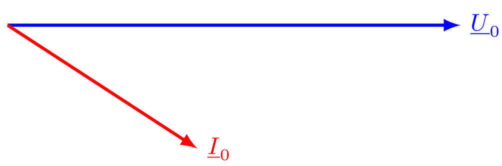


Bild 2

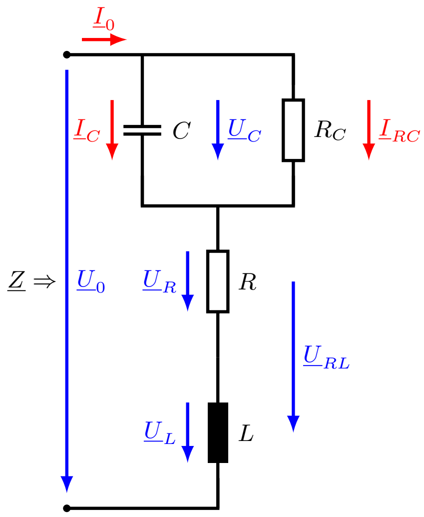
Merksätze:

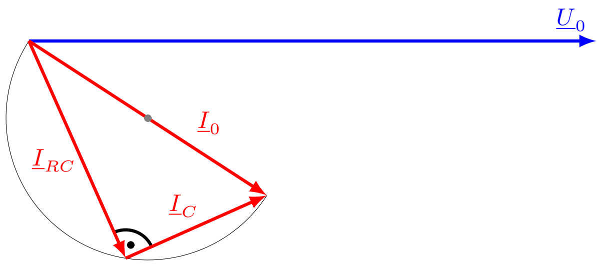
$$\text{Ohm'scher Widerstand: Strom und Spannung in Phase} \tag{14/2.1}$$
$$\text{Kondensator: Strom eilt } 90^\circ \text{ vor} \tag{14/2.2}$$
$$\text{Induktivität: Spannung eilt } 90^\circ \text{ vor} \tag{14/2.3}$$

Berechnung:

a) Induktiv, da nacheilender Strom.

b) Schaltbild mit Strom- und Spannungspfeilen ergänzen, Zeigerdiagramm erstellen.

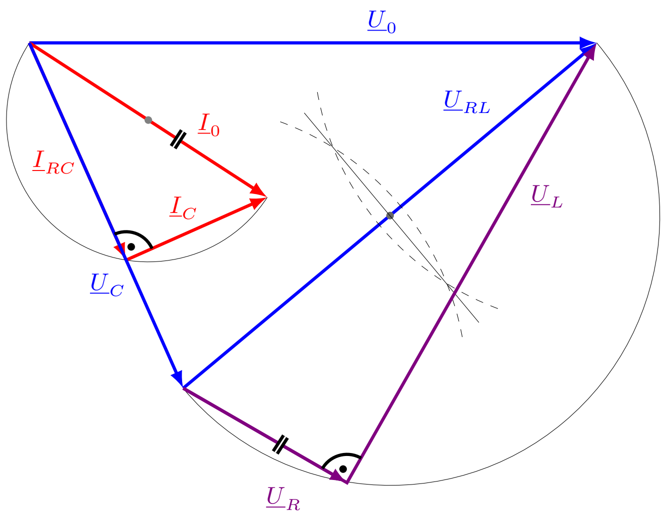




$\underline{I}_0 = \underline{I}_{RC} + \underline{I}_C$ und

$\underline{I}_C \perp \underline{I}_{RC}$ (Thaleskreis) und

$\underline{I}_C$ eilt $\underline{I}_{RC}$ vor.



$\underline{U}_C \,||\, \underline{I}_{RC}$

$\underline{U}_0 = \underline{U}_C + \underline{U}_{RL}$

$\underline{U}_R \,||\, \underline{I}_0$

$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$

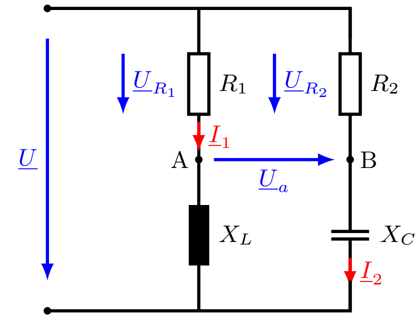
$\underline{U}_L \perp \underline{U}_R$ (oder $\underline{U}_L \perp \underline{I}_0$)

$\underline{U}_L$ eilt $\underline{U}_R$ vor

14/3 Brückenschaltung

Zeichnen Sie zu der abgebildeten Brückenschaltung ein maßstäbliches Zeigerdiagramm aller Ströme und Spannungen.
Entnehmen Sie dem Zeigerdiagramm die Spannung U_a und geben Sie von dieser Spannung Betrag und Phasenwinkel an.

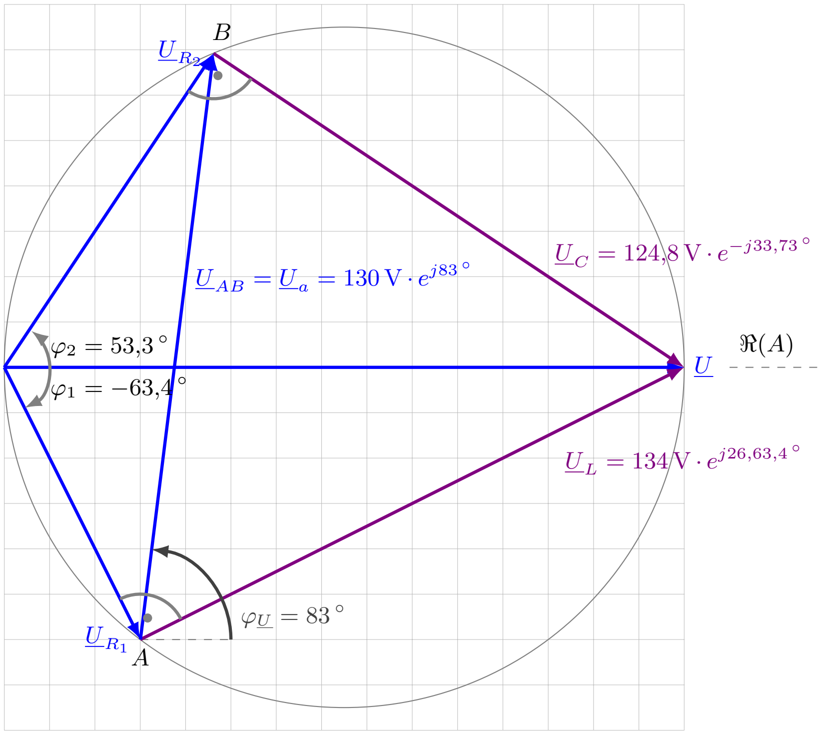
Maßstäbe: $10\,\mathrm{V} \mathrel{\widehat{=}} 1\mathrm{cm}$ $\quad 0,2\,\mathrm{A} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ (Platzbedarf in x und y 15 cm)
$R_1 = 100\,\Omega$ $\quad R_2 = 80\,\Omega$ $\quad X_L = 200\,\Omega$ $\quad X_C = -120\,\Omega$ $\quad \underline{U} = 150\,\mathrm{V} \cdot e^{j0^\circ}$



Berechnung:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 + 200^2}\,\Omega = 223{,}6\,\Omega$$
$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{80^2 + (-120)^2}\,\Omega = 144{,}2\,\Omega$$
$$\varphi_1 = \arctan \frac{\Im}{\Re} = \arctan \frac{200\,\Omega}{100\,\Omega} = \arctan 2 = 63{,}4\,^\circ$$
$$\varphi_2 = \arctan \frac{-120\,\Omega}{80\,\Omega} = \arctan(-1{,}5) = -56{,}3\,^\circ$$
$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = 223{,}6\,\Omega \cdot e^{j63{,}4\,^\circ}$$
$$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = 144{,}2\,\Omega \cdot e^{-j56{,}3\,^\circ}$$
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{150\,\mathrm{V} \cdot e^{j0^\circ}}{223{,}6\,\Omega \cdot e^{j63{,}4\,^\circ}} = 0{,}67\,\mathrm{A} \cdot e^{-j63{,}4\,^\circ} \approx 3{,}4\,\mathrm{cm}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{150\,\mathrm{V} \cdot e^{j0^\circ}}{144{,}2\,\Omega \cdot e^{-j56{,}3\,^\circ}} = 1{,}04\,\mathrm{A} \cdot e^{j56{,}3\,^\circ} \approx 5{,}2\,\mathrm{cm}$$
$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$
$$\underline{U}_{R_1} = I_1 \cdot R_1 = 0{,}671\,\mathrm{A} \cdot e^{j63{,}4\,^\circ} \cdot 100\,\Omega = 67{,}1\,\mathrm{V} \cdot e^{-j63{,}4\,^\circ}$$
$$\underline{U}_{R_2} = I_2 \cdot R_2 = 1{,}04\,\mathrm{A} \cdot 80\,\Omega = 83{,}2\,\mathrm{V} \cdot e^{j56{,}3\,^\circ}$$
$$\underline{U}_a = \underline{U}_{R_2} - \underline{U}_{R_1}$$
$$\underline{U}_L = X_L \cdot \underline{I}_1 = 200\,\Omega \cdot e^{j90^\circ} 0{,}67\,\mathrm{A} \cdot e^{-j63{,}4\,^\circ} = 134\,\mathrm{V} \cdot e^{j26{,}6\,^\circ}$$
$$\underline{U}_C = X_C \cdot \underline{I}_2 = 120\,\Omega \cdot e^{-j90^\circ} \cdot 1{,}04\,\mathrm{A} \cdot e^{j56{,}3\,^\circ} = 124{,}8\,\mathrm{V} \cdot e^{-j33{,}7\,^\circ}$$

Zeigerdiagramm Teil 1: (Maßstäblich)



$y = 15\,\mathrm{cm}$

Kreis da

$\underline{U}_{R_2} + \underline{U}_C = \underline{U}$

$\underline{U}_{R_1} + \underline{U}_L = \underline{U}$

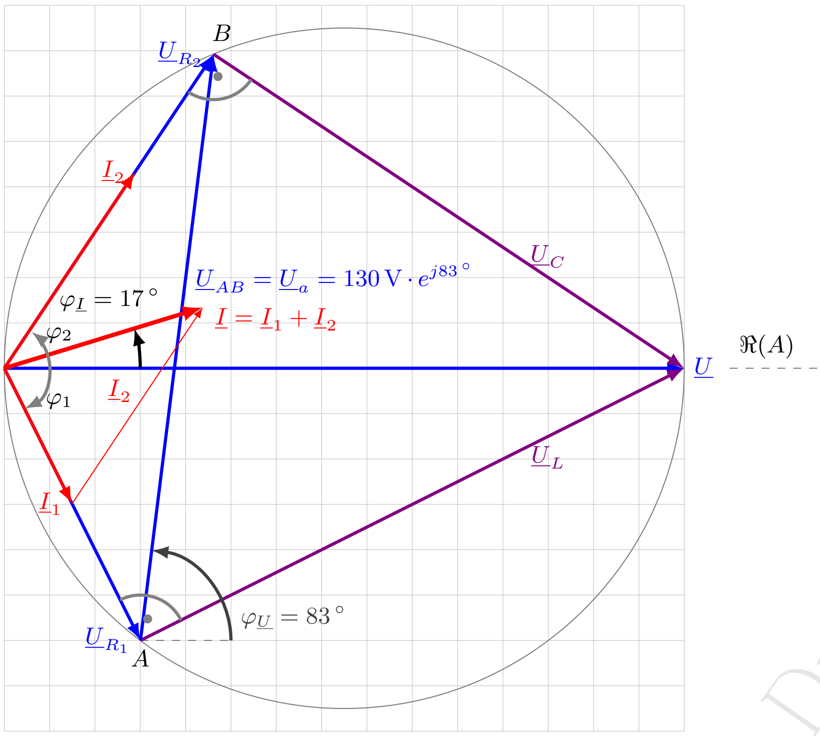
$\underline{U}_{R_2} \perp \underline{U}_C$

$\underline{U}_{R_1} \perp \underline{U}_L$

A und B einzeichnen

Messen $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_a$

Zeigerdiagramm vollständig:



$\underline{I}_1 \approx 3{,}4\,\mathrm{cm}$

$\underline{I}_2 \approx 5{,}2\,\mathrm{cm}$

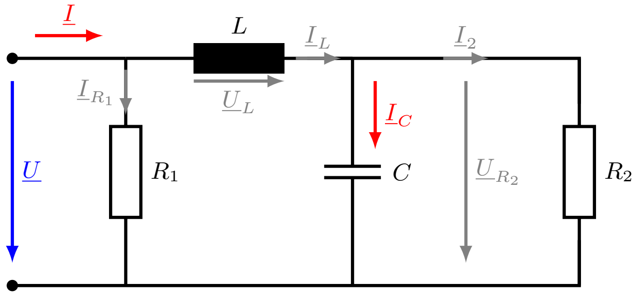
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

14/4 Zeigerdiagramm Netzwerk

Zeichnen Sie für das abgebildete Netzwerk ein maßstäbliches Zeigerdiagramm aller Spannungen und Ströme.
Wie groß muß der Widerstand R_1 sein damit der Strom I der Spannung U um $30\,^\circ$ nacheilt?

$\varphi_u - \varphi_i = 30\,^\circ$
$R_2 = |X_L| = |X_C| = 10\,\mathrm{k}\Omega$
$\underline{I}_C = 1\,\mathrm{mA} \cdot e^{j90\,^\circ}$

<u>Maßstäbe:</u>
$1\,\mathrm{V} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}8\mathrm{cm}$
$1\,\mathrm{mA} \mathrel{\widehat{=}} 5\mathrm{cm}$



Berechnung: (Platz in $x = \pm 10\,\mathrm{cm}$ und $x = 10\,\mathrm{cm}$

$R_2 = |X_C| = 10\,\mathrm{k}\Omega$ (Stomteiler, mit gleichem Betrag des Stroms)
mit $|\underline{I}_{R_2}| = |\underline{I}_C| = 1\,\mathrm{mA}$

$$\underline{I}_C = 1\,\mathrm{mA} \cdot e^{j90\,^\circ} \Rightarrow \underline{I}_{R_2} = 1\,\mathrm{mA} \cdot e^{j0\,^\circ} \quad (\underline{I}_C \text{ eilt vor})$$

$$\underline{U}_{R_2} = R_2 \cdot \underline{I}_{R_2} = 10\,\cancel{\mathrm{k}}\Omega \cdot 1\,\cancel{\mathrm{m}}\mathrm{A} \cdot e^{j0\,^\circ} = 10\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ} \mathrel{\widehat{=}} 8\mathrm{cm}$$

$$\underline{I}_L = \underline{I}_{R_2} + \underline{I}_C = 1\,\mathrm{mA} \cdot e^{j0\,^\circ} + 1\,\mathrm{mA} \cdot e^{j90\,^\circ} = 1{,}41\,\mathrm{mA} \cdot e^{j45\,^\circ}$$

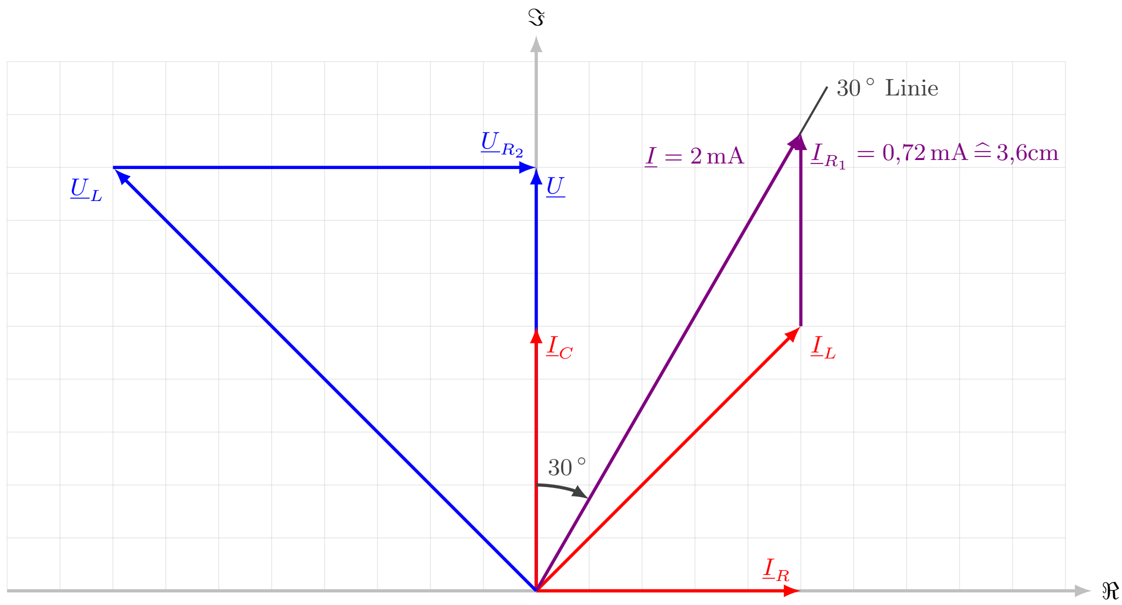
$$\underline{U}_L = \underline{I}_L \cdot j \cdot X_L = 1{,}41\,\mathrm{mA} \cdot e^{j45\,^\circ} \cdot j10\,\mathrm{k}\Omega = 14{,}1\,\mathrm{V} \cdot e^{j135\,^\circ} \mathrel{\widehat{=}} 11{,}3\mathrm{cm} \ (\underline{U}_L \text{ voreilend})$$

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_{R_2} = 14{,}1\,\mathrm{V} \cdot e^{j135\,^\circ} + 10\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ} = (-10 + j10 + 10)\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} \cdot e^{j90\,^\circ}$$

Zeichnen: $\varphi_u - \varphi_i = 30\,^\circ$ deshalb $30\,^\circ$, Linie zeichnen, Schnittpunkt mit $\underline{I}_L + \underline{I}_{R_1} \Rightarrow \underline{I} = 2\,\mathrm{mA} \cdot e^{j30\,^\circ}$

Ablesen: $\underline{I}_{R_1} = 0{,}72\,\mathrm{mA} \cdot e^{j90\,^\circ}$

$$R_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_{R_1}} = \frac{10\,\mathrm{V} \cancel{\cdot e^{j90\,^\circ}}}{0{,}72\,\mathrm{mA} \cancel{\cdot e^{j90\,^\circ}}} = \underline{\underline{13{,}89\,\mathrm{k}\Omega}}$$



$$\underline{I}_{R_2} = 1\,\text{mA} \cdot e^{j0\,°} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$$

$$\underline{I}_C = 1\,\text{mA} \cdot e^{j90\,°} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$$

$$\underline{I}_L = \underline{I}_{R_2} + \underline{I}_C \mathrel{\widehat{=}} 7{,}05\,\text{cm}$$

$$\underline{U}_L = 14{,}1\,\text{V} \cdot e^{j135\,°} \mathrel{\widehat{=}} 11{,}3\text{cm} \quad \underline{U}_L \perp \underline{I}_L$$

$$\underline{R}_{R_2} = 10\,\text{V} \cdot e^{j0\,°} \mathrel{\widehat{=}} 8\text{cm}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_{R_2}$$

Gerade für I, 30° nacheilend

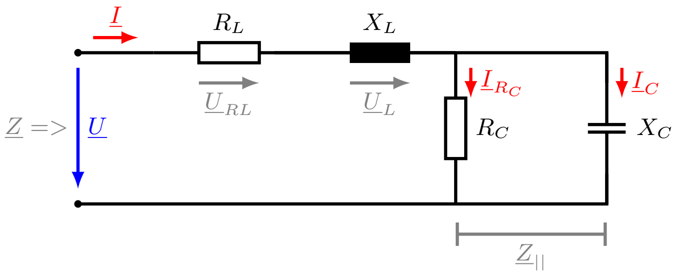
$$\underline{I}_L + \underline{I}_{R_1} = \underline{I}; \qquad \underline{I}_{R_1} || \underline{U}$$

$$\rightarrow \text{ ablesen } 3{,}6\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} \underline{I}_{R_1} = 0{,}72\,\text{mA} \cdot e^{j90\,°}$$

14/5 Blind- Wirk- und Scheinleistung

Von dem untenstehenden Schaltbild ist gegeben:
$R_L = X_L = 20\,\Omega \quad R_C = 200\,\Omega \quad X_C = -100\,\Omega \quad \underline{U} = 230\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ}$

a) Der Eingangswiderstand Z der Schaltung nach Betrag und Phasenwinkel
b) Sämtliche Ströme und Spannungen nach Betrag und Phasenwinkel
c) Wirk- Blind- und Scheinleistungsaufnahme der Schaltung
d) Qualitatives Zeigerdiagramm aller Ströme und Spannungen unter der Annahme, daß sich die Gesamtschaltung induktiv verhält.



Formeln:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad \text{Eulersche Formel} \tag{14/5.1}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{\pm j\varphi} = R \pm jX \tag{14/5.2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \tag{14/5.3}$$

$$\sin\varphi = \frac{X}{Z} \tag{14/5.4}$$

Berechnung:

a) Eingangswiderstand (ist ohmisch-kapazitiv)

$$\underline{Z}_{||} = \frac{R_C \cdot jX_C}{R_C + jX_C} = \frac{200 \cdot (-j100)}{200 - j100}\,\Omega = (40 - j80)\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{||} + R_L + X_L = [20 + 40 + j(20 - 80)]\,\Omega = \underline{\underline{(60 - j60)\,\Omega}} = \underline{\underline{84{,}85\,\Omega \cdot e^{-j45\,^\circ}}}$$

$$(\Rightarrow \varphi = -45\,^\circ)$$

b) Ströme

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{230\,\mathrm{V}\cdot e^{j0^\circ}}{84{,}5\,\Omega\cdot e^{-j45^\circ}} = \underline{\underline{2{,}71\,\mathrm{A}\cdot e^{j45^\circ}}} = \underline{\underline{(1{,}916 + j1{,}916)\,\mathrm{A}}}$$

Stromteiler

$$\begin{aligned}\underline{I}_{R_C} &= \underline{I}\cdot\frac{jX_C}{R_C + jX_C} = \underline{I}\cdot\frac{-j100}{200-j100} = \underline{I}\cdot\frac{-j}{2-j}\cdot\frac{2+j}{2+j} = \underline{I}\cdot\frac{1-j2}{4+1} = \underline{I}\cdot(0{,}2 - j0{,}4)\\ &= 2{,}71\,\mathrm{A}\cdot e^{j45^\circ}\cdot 0{,}447\cdot e^{-j63{,}4^\circ} = \underline{\underline{1{,}21\,\mathrm{A}\cdot e^{-j18{,}4^\circ}}} = \underline{\underline{(1{,}150 - j0{,}383)\,\mathrm{A}}}\\ \underline{I}_C &= \underline{I} - \underline{I}_{R_C} = (1{,}916 + j1{,}916)\,\mathrm{A} - (1{,}150 - j0{,}383)\,\mathrm{A} = \underline{\underline{(0{,}766 + j2{,}30)\,\mathrm{A}}}\\ &= \underline{\underline{2{,}42\,\mathrm{A}\cdot e^{+j71{,}6^\circ}}}\end{aligned}$$

alternativ

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \underline{I}\cdot\frac{R_C}{R_C + jX_C} = \underline{I}\cdot\frac{200}{200-j100} = \underline{I}\cdot\frac{1}{1-j0{,}5} \quad \text{konjugiert komplex erweitern}\\ &= \underline{I}\cdot\frac{1}{1-j0{,}5}\cdot\frac{1+j0{,}5}{1+j0{,}5} = \underline{I}\cdot\frac{1+j0{,}5}{1+0{,}5^2} = \underline{I}\cdot(0{,}8 + j0{,}4) = \underline{I}\cdot 0{,}894\cdot e^{0{,}5j}\\ &= 2{,}71\,\mathrm{A}\cdot e^{j45^\circ}\cdot 0{,}894\cdot e^{j26{,}6^\circ} = \underline{\underline{2{,}42\,\mathrm{A}\cdot e^{+j71{,}6^\circ}}} = \underline{\underline{(0{,}766 + j2{,}30)\,\mathrm{A}}}\end{aligned}$$

Spannungen

$$\begin{aligned}\underline{U}_{R_C} &= R_C\cdot\underline{I}_{R_C} = 200\,\Omega\cdot 1{,}21\,\mathrm{A}\cdot e^{-j18{,}4^\circ} = \underline{\underline{242\,\mathrm{V}\cdot e^{-j18{,}4^\circ}}}\\ \underline{U}_{R_L} &= R_L\cdot\underline{I} = 20\,\Omega\cdot 2{,}71\,\mathrm{A}\cdot e^{j45^\circ} = \underline{\underline{54{,}2\,\mathrm{V}\cdot e^{j45^\circ}}}\\ \underline{U}_L &= X_L\cdot\underline{I} = 20\,\Omega\cdot e^{j90^\circ}\cdot 2{,}71\,\mathrm{A}\cdot e^{j45^\circ} = \underline{\underline{54.2\,\mathrm{V}\cdot e^{j135^\circ}}}\end{aligned}$$

Zeigerdiagramm: Beginne mit $\underline{U}$ und $\underline{I}$ (50 V/cm; 1 A/cm)

$\underline{I}$ um Winkel $\varphi = 45\,^\circ$ voreilend, kapazitives Gesamtverhalten.

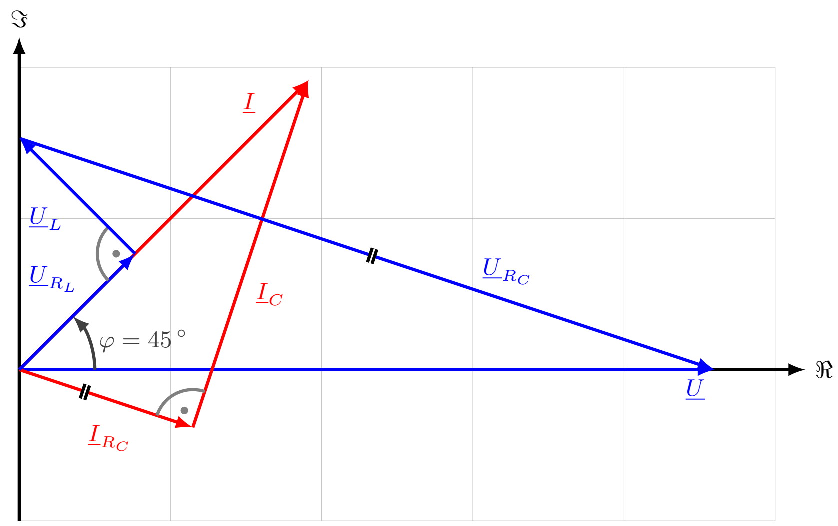
$\underline{I} = \underline{I}_{R_C} + \underline{I}_C$ $\quad (\underline{I}_C \perp \underline{I}_{R_C})$ $\quad (\underline{I}_C$ voreilend)

$\underline{U}_{R_L} \,||\, \underline{I}$

$\underline{U}_L \perp \underline{I}$ $\quad (\underline{U}_L$ voreilend)

$\underline{U}_{R_C} \,||\, \underline{I}_{R_C}$

$\underline{U}_{R_L} = \underline{U}_L + \underline{U}_{R_C} = \underline{U} \mathrel{\hat{=}} 4{,}6\,\text{cm}$



c) Scheinleistung

$$S = U \cdot I = 230\,\text{V} \cdot 2{,}71\,\text{A} = \underline{\underline{623\,\text{VA}}} \qquad \text{Scheinleistung}$$

$$P = S \cdot \cos\varphi = 623\,\text{VA} \cdot \cos(-45\,^\circ) = \underline{\underline{447\,\text{W}}} \qquad \text{Wirkleistung}$$

$$Q = S \cdot \sin\varphi = 623\,\text{VA} \cdot \sin(-45\,^\circ) = \underline{\underline{-447\,\text{VA}r}} \qquad \text{Blindleistung}$$

d) Annahme, daß sich die Gesamtschaltung induktiv verhält.

Reihenfolge: (25 V/cm; 1 A/cm)

Beginne mit $\underline{U} = 230\,\text{V} \cdot e^{j0\,^\circ}$ und $\underline{I} = 2{,}71\,\text{A} \cdot e^{-j45\,^\circ}$

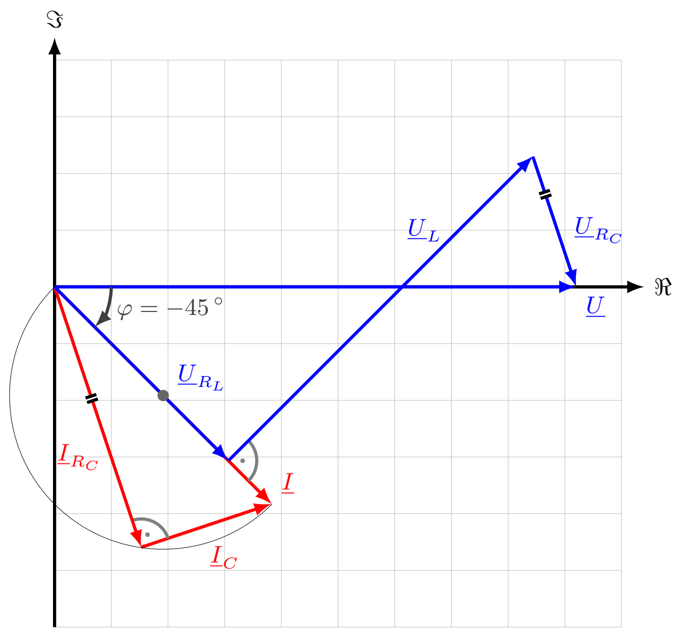
$\underline{I}$ um Winkel $\varphi = -45\,^\circ$ nacheilend, da induktives Gesamtverhalten.

$\underline{I} = \underline{I}_{R_C} + \underline{I}_C$ $(\underline{I}_C \perp \underline{I}_{R_C})$ ($\underline{I}_C$ voreilend) [Thaleskreis]

$\underline{U}_{R_C} \,||\, \underline{I}_{R_C}$ [Gerade von der Spitze $\underline{U}$]

$\underline{U}_{R_L} \,||\, \underline{I}$ [Gerade $\perp$ $\underline{U}_{RL}$]

$\underline{U}_L \perp \underline{I}$ ($\underline{U}_L$ voreilend)



$$\underline{U} = \underline{\underline{230\,\text{V} \cdot e^{j0\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 9{,}2\,\text{cm}$$

$$\underline{I} = \underline{\underline{2{,}71\,\text{A} \cdot e^{-j45\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}71\,\text{cm}$$

$$\underline{I}_{R_C} = \underline{\underline{2{,}42\,\text{A} \cdot e^{-j71{,}6\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}42\,\text{cm}$$

$$\underline{I}_C = \underline{\underline{1{,}21\,\text{A} \cdot e^{j18{,}4\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 1{,}21\,\text{cm}$$

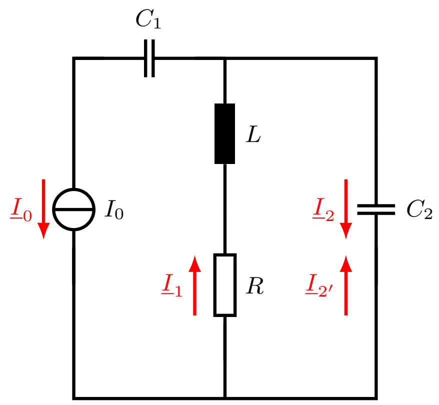
$$\underline{U}_{R_L} = \underline{\underline{108{,}4\,\text{V} \cdot e^{-j45\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 4{,}3\,\text{cm}$$

$$\underline{U}_{R_C} = \underline{\underline{60{,}4\,\text{V} \cdot e^{-j71{,}6\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}4\,\text{cm}$$

$$\underline{U}_L = \underline{\underline{190\,\text{V} \cdot e^{j45\,^\circ}}} \mathrel{\widehat{=}} 7{,}6\,\text{cm}$$

15/1 Komplexe Wechselstromrechnung Netzwerk Strom

Berechnen sie den Strom I_2
$I_0 = 3\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j30^\circ}$ $\quad C_1 = 1{,}2\,\mathrm{nF}$ $\quad L = 100\,\mu\mathrm{H}$
$R = 9{,}3\,\Omega$ $\quad C_2 = 820\,\mathrm{pF}$ $\quad f = 570\,\mathrm{kHz}$
Hinweis: Rechnung nur mit komplexen Größen
Kann I_2 größer als I_0 sein? Wenn ja, warum?



Berechnung:

C_1 spielt keine Rolle, da in Reihe mit Stromquelle.

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_2' \quad \text{, wegen Knotenpunkt } \underline{I}_0 - \underline{I}_1' - \underline{I}_2' = 0$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_2' = -\frac{R + jX_L}{R + j(X_L + X_{C_2})} \cdot \underline{I}_0$$

$$\text{mit } X_{C_2} = \frac{-1}{\omega C_2} = -\frac{1}{2\pi \cdot 570 \cdot 10^3 \cdot 820 \cdot 10^{-12}}\,\Omega = -340{,}51\,\Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot 570 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}\,\Omega = +358{,}14\,\Omega$$

$$X_{C_2} + X_L = (-340{,}51 + 358{,}14)\,\Omega = 17{,}63\,\Omega$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{9{,}3\,\Omega + j358{,}14\,\Omega}{9{,}3\,\Omega + j17{,}63\,\Omega} \cdot 3\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j30^\circ} = (-16{,}11 + j7{,}97) \cdot 3\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$= 17{,}97 \cdot e^{-j153{,}7^\circ} \cdot 3\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j30^\circ} = \underline{\underline{53{,}92\,\mathrm{mA} \cdot e^{j176{,}32^\circ}}}$$

$\underline{I}_2 > \underline{I}_0$, da sehr nahe an Resonanz ($X_L \approx |X_C|$)

15/2 Übergang Zeitabhängige zu Komplexen Größen

Bestimmen Sie den momentanen Strom $i_L(t)$ zum Zeitpunkt $t = T$

$u(t) = U_0 + \widehat{U}_1 \cdot cos(\omega t + \varphi)$

$U_0 = 2\,\mathrm{V}$ $\quad \widehat{U}_1 = 3\,\mathrm{V}$ $\quad f = 20\,\mathrm{kHz}$ $\quad \varphi = 50\,°$

$C = 130\,\mathrm{nF}$ $\quad R = 60\,\Omega$ $\quad L = 480\,\mu\mathrm{H}$ $\quad T = 26\,\mu\mathrm{s}$

Hinweise: An dieser Aufgabe sollen Sie den Übergang von der realen, zeitabhängigen Größe $u(t)$ in komplexe Größen $\underline{U}$, $\underline{I}$ und $\underline{I}_L$ und wieder zurück in die reale Größe $i_L(t)$ lernen. (Sehr grundsätzliche und wichtige Übung !)

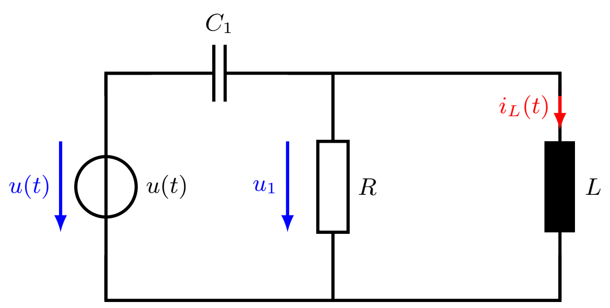
a) Wie wirkt sich der Gleichanteil der Spannung U_0 aus?

b) Übergang vom Zeitbereich in komplexen „Bild"-Bereich $u(t) \Rightarrow \underline{U}$

c) Berechnen Sie als Zwischenschritt den komplexen Strom $\underline{I}_L$!

d) Übergang von komplexen Bereich in Zeitbereich $\underline{I}_L \Rightarrow i_L(t)$

e) Achten Sie auf die Darstellung des Phasenwinkels $\omega t + \varphi$. (in Grad oder rad?!!)



Berechnung:

a) U_0 spielt wegen C keine Rolle - kein Gleichstrom!

Transformation in komplexen „Bildbereich“$u(t) \to \underline{U}$

$$\begin{aligned}
\underline{U} &= \frac{\widehat{U_1}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = \frac{3\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j50\,^\circ} = 2{,}12\,\mathrm{V} \cdot e^{j50\,^\circ} \\
\underline{Z}_C &= \frac{-1}{\omega C} = \frac{-j1}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 130 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}} = -j61{,}21\,\Omega \\
\underline{Z}_L &= j\omega L = j2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 480 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = +j60{,}32\,\Omega \\
\underline{Y}_{||} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = (\frac{1}{60} + \frac{1}{j60{,}32})\,\mathrm{S} = (16{,}67 - j16{,}58)\,\mathrm{mS} \\
\underline{Z}_{||} &= \frac{1}{\underline{Y}_{||}} = (30{,}16 + j30)\,\Omega \\
\underline{U}_1 = \underline{U}_L = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_{||}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{||}} &= 2{,}12\,\mathrm{V} \cdot e^{j50\,^\circ} \cdot \frac{(30{,}16 + j30)\,\Omega}{-j61{,}21\,\Omega + (30{,}16 + j30)\,\Omega} \\
&= 2{,}12\,\mathrm{V} \cdot e^{j50\,^\circ} \cdot \frac{(30{,}16 + j30)\,\Omega}{(30{,}16 - j31{,}21)\,\Omega} \\
&= 2{,}12\,\mathrm{V} \cdot e^{j50\,^\circ} \cdot (-0{,}0142 + j0{,}98) = 2{,}12\,\mathrm{V} \cdot e^{j50\,^\circ} \cdot 0{,}98 \cdot e^{j90{,}83\,^\circ} \\
&= 2{,}078\,\mathrm{V} \cdot e^{j140{,}83\,^\circ}
\end{aligned}$$

c) komplexer Strom

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{||}}{\underline{Z}_L} = \frac{2{,}078\,\mathrm{V} \cdot e^{j140{,}83\,^\circ}}{60{,}32\,\Omega \cdot e^{j90\,^\circ}} = \underline{\underline{34{,}45\,\mathrm{mA} \cdot e^{j50{,}83\,^\circ}}}$$

d) Übergang in den Zeitbereich

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \sqrt{2} \cdot |\underline{I}_L| \cdot \cos(\omega T + \varphi_{i_L}) = \sqrt{2} \cdot 34{,}45\,\mathrm{mA} \cdot \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t + 50{,}83\,^\circ) \\
&= 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(4 \cdot 10^4 \frac{1}{\mathrm{s}} + 50{,}83\,^\circ)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\text{mit } T = 26\,\mu\mathrm{s} \\
i_L(T) &= 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(\underbrace{3{,}267}_{\mathrm{rad}} + 50{,}83\,^\circ) \qquad \text{Achtung!} \\
&= 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(3{,}267 \cdot \frac{360\,^\circ}{2\pi} + 50{,}83\,^\circ) \\
&= 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(187{,}2\,^\circ + 50{,}83\,^\circ) = 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(238\,^\circ) \\
i_L(T) &= 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot \cos(238\,^\circ) = 48{,}72\,\mathrm{mA} \cdot (-0{,}529) = \underline{\underline{-25{,}79\,\mathrm{mA}}}
\end{aligned}$$

Rekapitulieren

Zusammenfassung An Tafel rekapitulieren

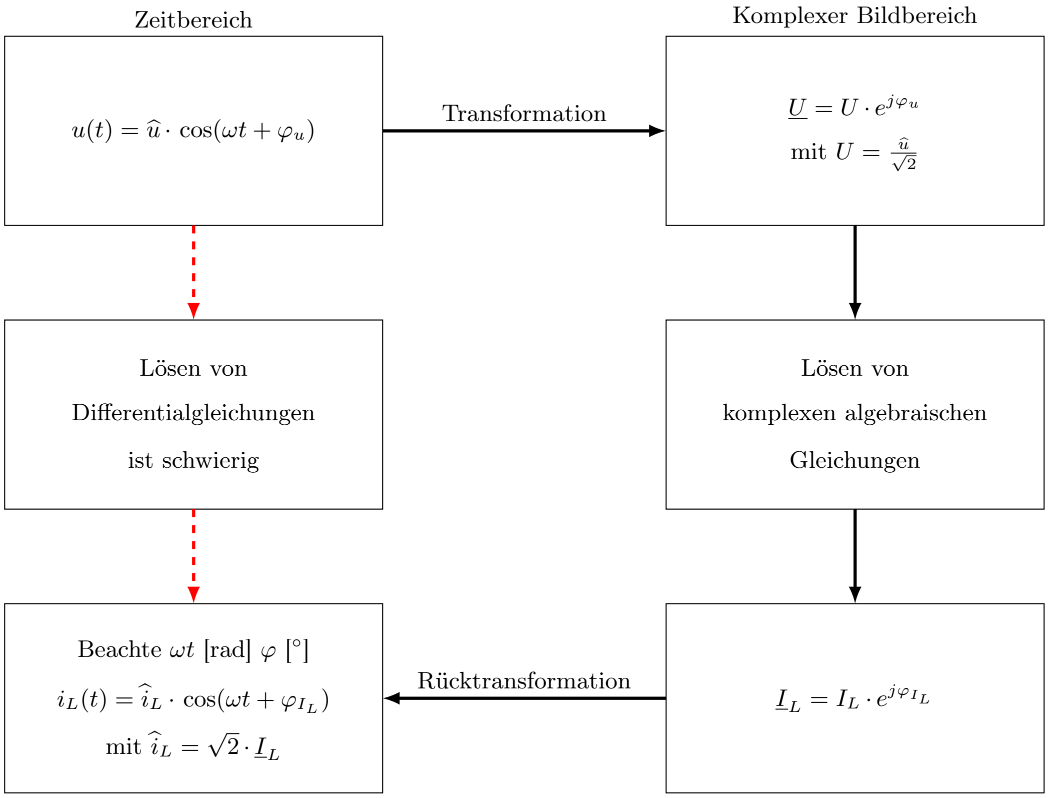
<u>1. Transformation:</u> $u(t) \Rightarrow \underline{U}$

<u>2. Lösung komplexer algebraischer Gleichungen:</u> Rechnung mit komplexem Effektivwert.

<u>3. Rücktransformation:</u> $\underline{I}_L \Rightarrow i_L(t)$

$\underline{U}$ komplexer Effektivwert

$U = |\underline{U}| = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ Effektivwert

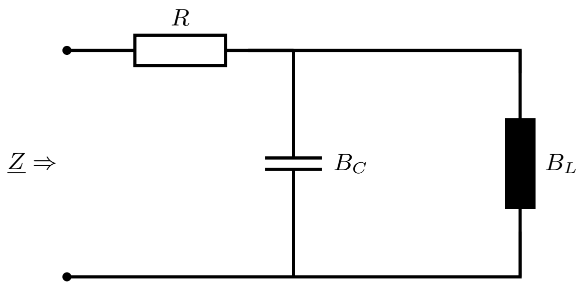


$\hat{i}_L$	Scheitelwert ($\hat{i}_L = \sqrt{2} \cdot I_L$)
$\underline{I}_L$	komplexer Effektivwert

15/3 Leitwert

Der Widerstand des abgebildeten Netzwerkes soll $\underline{Z} = 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot e^{j60\,^\circ}$ sein.

Wie groß müssen R und B_C sein, wenn $B_L = -3{,}33\,\mathrm{mS}$ ist?



Berechnung:

$$\underline{Z} \stackrel{!}{=} 10^3\,\Omega \cdot e^{j60\,^\circ} \quad = (500 + j866{,}25)\,\Omega$$
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j(B_C + B_L)} = \quad R \quad - j\frac{1}{(B_C + B_L)}$$

$\Re$

$$R = \underline{\underline{500\,\Omega}}$$

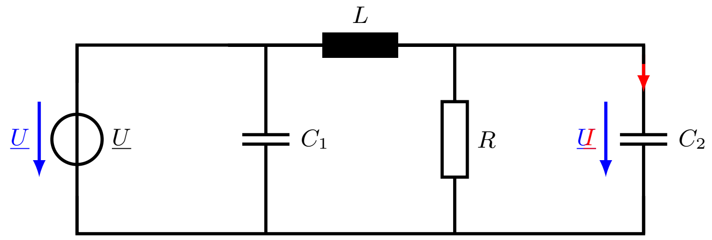
$\Im$

$$B_C + B_L = \frac{-1}{866{,}25}\,\mathrm{S} = -1{,}1547\,\mathrm{mS}$$
$$B_C = -1{,}1547\,\mathrm{mS} - B_L = -1{,}1547\,\mathrm{mS} + 3{,}33\,\mathrm{mS} = \underline{\underline{2{,}175\,\mathrm{mS}}}$$

15/4 Strom L-R-C

Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$

$$\underline{U} = 15\,\mathrm{V} \cdot e^{j20^\circ} \quad f = 1\,\mathrm{kHz}$$
$$C_1 = 9\,\mu\mathrm{F} \quad C_2 = 4\,\mu\mathrm{F} \quad R = 20\,\Omega \quad L = 2\,\mathrm{mH}$$



Berechnung:

C_1 unwirksam, da parallel zur Spannungsquelle.

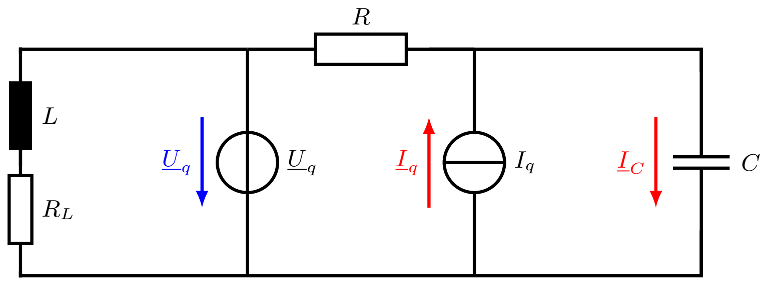
$$\omega = 2\pi f = 6283\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$
$$\underline{Z}_{RLC_2} = X_L + \underline{Z}_{||}$$
$$\underline{Y}_{||} = G + jB_{C_2}$$
$$G = \frac{1}{R} = 50\,\mathrm{mS}$$
$$B_{C_2} = \omega C_2 = 6283\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mu\mathrm{F} = 25{,}13\,\mathrm{mS} \Rightarrow$$
$$X_{C_2} = -\frac{1}{B_{C_2}} = -39{,}79\,\Omega$$
$$\underline{Y}_{||} = G + jB_{C_2} = (50 + j25{,}13)\,\mathrm{mS} = 55{,}96\,\mathrm{mS} \cdot e^{j26{,}7^\circ}$$
$$\underline{Z}_{||} = \frac{1}{\underline{Y}_{||}} = 17{,}87 \cdot e^{-j26{,}7^\circ} = (15{,}97 - j8{,}025)\,\Omega$$
$$X_L = \omega \cdot L = 6283\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{mH} = 12{,}57\,\Omega$$
$$\underline{Z}_{LRC_2} = \underline{Z}_{||} + jX_L = [15{,}97 + j(-8{,}025 + 12{,}57)]\,\Omega = (15{,}97 + j4{,}541)\,\Omega = 16{,}6\,\Omega \cdot e^{j15{,}9^\circ}$$
$$\underline{U}_{C_2} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_{||}}{\underline{Z}_{LRC_2}} = 15\,\mathrm{V} \cdot e^{j20^\circ} \cdot \frac{17{,}87 \cdot e^{-j26{,}7^\circ}}{16{,}6\,\Omega \cdot e^{j15{,}9^\circ}} = 16{,}15\,\mathrm{V} \cdot e^{-j22{,}6^\circ} = (14{,}91 - j6{,}21)\,\mathrm{V}$$
$$\underline{I} = \underline{U}_{C_2} \cdot jB_{C_2} = 16{,}15\,\mathrm{V} \cdot e^{-j22{,}6^\circ} \cdot 25{,}13\,\mathrm{mS} \cdot e^{j90^\circ}$$
$$= \underline{\underline{0{,}4058\,\mathrm{A} \cdot e^{j67{,}4^\circ}}} = \underline{\underline{(0{,}156 + j0{,}375)\,\mathrm{A}}}$$

15/5 Überlagerungsmethode

Berechnen Sie mit der Überlagerungsmethode den Strom $\underline{I}_C$

$$R = R_L = 10\,\Omega \quad L = 50\,\text{mH} \quad C = 100\,\mu\text{F}$$

$$f = 50\,\text{Hz} \quad \underline{U}_q = 5\,\text{V} \cdot e^{j20\,^\circ} \quad \underline{I}_q = 2\,\text{A} \cdot e^{-j60\,^\circ}$$

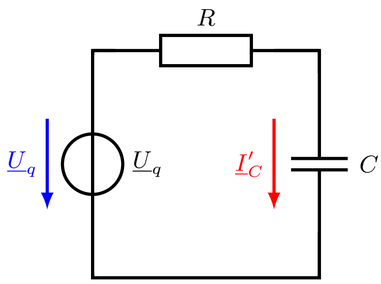


Berechnung:

$R_L + jX_L$ unwirksam, da parallel zur Spannungsquelle.

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\,\frac{1}{\text{s}} = 314{,}2\,\frac{1}{\text{s}}$

a) nur Spannungsquelle $\Rightarrow \underline{I}_q = 0$

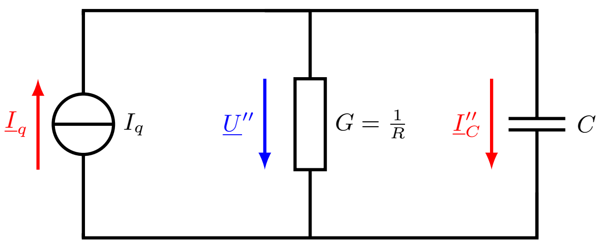


$$B_C = \omega \cdot C = 314{,}2\frac{1}{\text{s}} \cdot 100\,\mu\text{F} = 31{,}42\,\text{mS}$$

$$X_C = -\frac{1}{B_C} = -\frac{1}{31{,}42\,\text{mS}} = -31{,}831\,\Omega$$

$$\underline{I}'_C = \frac{\underline{U}_q}{R + jX_C} = \frac{4{,}698 + j1{,}710}{10 - j31{,}83}\,\text{A} = \underline{(-6{,}693 + j149{,}7)\,\text{mA}} = 149{,}8\,\text{mA} \cdot e^{j92{,}3\,^\circ}$$

b) Nur Stromquelle $\Rightarrow \underline{U}_q = 0$



$$\underline{I}_C'' = \underline{U}'' \cdot jB_C \qquad \underline{U}'' = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}_{||}$$

$$\text{oder Stromteiler } \underline{I}_C'' = \underline{I}_q \cdot \frac{R}{R - jX_C}$$

$$\underline{I}_q = 2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j60^\circ} = (1 - j1{,}732)\,\mathrm{A}$$

$$G = \frac{1}{R} = 100\,\mathrm{mS}$$

$$\underline{Y}_{||} = G + jB_C = (100 + j31{,}42)\,\mathrm{mS} = 0{,}105\,\mathrm{S} \cdot e^{j17{,}44^\circ}$$

$$\underline{Z}_{||} = \frac{1}{\underline{Y}_{||}} = 9{,}54\,\Omega \cdot e^{-j17{,}44^\circ}$$

$$\underline{U}'' = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}_{||} = 2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j60^\circ} \cdot 9{,}54\,\Omega \cdot e^{-j17{,}44^\circ}$$

$$= 19{,}08\,\mathrm{V} \cdot e^{-j77{,}44^\circ} = (4{,}15 - j18{,}62)\,\mathrm{V}$$

$$\underline{I}_C'' = \underline{U}'' \cdot jB_C = 19{,}08\,\mathrm{V} \cdot e^{-j77{,}44^\circ} \cdot 31{,}42\,\mathrm{mS} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$= 600\,\mathrm{mA} \cdot e^{j12{,}56^\circ} = \underline{(585{,}1 + j130{,}3)\,\mathrm{mA}}$$

oder alternativ:

$$\underline{I}_C'' = \underline{I}_q \cdot \frac{R}{R + jX_C}$$

Überlagerung

$$\underline{I}_C = \underline{I}_C' + \underline{I}_C'' = (-6{,}69 + j149{,}7 + 585{,}1 + j130,3)\,\mathrm{mA}$$

$$= \underline{\underline{(578{,}41 + j279{,}99)\,\mathrm{mA}}} = \underline{\underline{642{,}6\,\mathrm{mA} \cdot e^{+j25{,}38^\circ}}}$$

15/6 Momentan Leistung

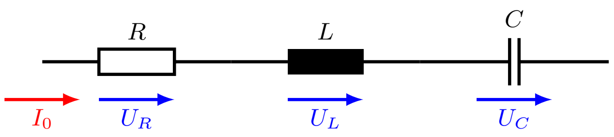
In der Reihenschaltung fließt der Strom

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ I_0 \cdot \sin(\omega t) \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

Der Kondensator ist zur Zeit $t = 0$ entladen.

a) Berechnen Sie die momentanen Spannungen an R, L und C zur Zeit $t_1 = 350\,\mu\text{s}$.
b) Welche Leistung nimmt die Schaltung in diesem Moment auf?
c) Hinweis: Rechnung mit komplexen Größen wäre hier falsch. Warum?

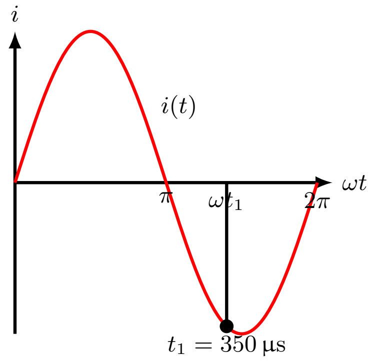
$$R = 12\,\Omega \qquad L = 1{,}3\,\text{mH} \qquad C = 8{,}7\,\mu\text{F}$$
$$f = 2\,\text{kHz} \qquad I_0 = 10\,\text{mA}$$

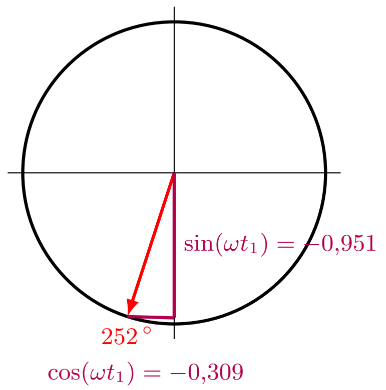


Berechnung:

$$\omega = 2\pi f = 1{,}257 \cdot 10^4\,\frac{1}{\text{s}}$$
$$\omega t_1 = 1{,}257 \cdot 10^4\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 350 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = 4{,}398\,[rad] \mathrel{\widehat{=}} 252\,^\circ$$

Zur Erklärung wie die Schwingung aussieht:





a) Berechnung der momentanen Spannung bei $t = t_1$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) = 10\,\text{mA} \cdot \sin\underbrace{\left(1{,}257 \cdot 10^4\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 350\,\mu\text{s}\right)}_{4{,}3995 rad}$$
$$= 10\,\text{mA} \cdot (-0{,}951) = -9{,}51\,\text{mA}$$

Für $t = t_1$:

$$u_R(T) = R \cdot i(t) = 12\,\Omega \cdot (-9{,}51\,\text{mA}) = \underline{\underline{-114{,}1\,\text{mV}}}$$

$$u_L(T) = L \cdot \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=T} = L \cdot I_0 \underbrace{\cdot\ \omega\ \cdot}_{\text{nachdifferenzieren}} \cos(\omega t)$$

$$= 1{,}3\,\text{mH} \cdot 10\,\text{mA} \cdot 1{,}257 \cdot 10^4\,\frac{1}{\text{s}} \cdot (-0{,}309) = \underline{\underline{-50{,}5\,\text{mV}}}$$

$$u_C(T) = \underbrace{U_0}_{0} + \frac{1}{C}\int_{t=0}^{T} I_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{\omega} \underbrace{\left| \cdot - \cos(\omega t) \right|_{t=0}^{T}}_{-\cos(\omega T)+\cos(0)=-(-0{,}309)+1=1{,}309}$$

$$= \frac{0{,}01\,\text{A} \cdot 1{,}309}{8{,}7 \cdot 10^{-6}\,\text{F} \cdot 1{,}257 \cdot 10^4\,\frac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{119{,}7\,\text{mV}}}$$

b) Momentanleistung bei $t = t_1$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)] \cdot i(t)$$

Für $t = T$:

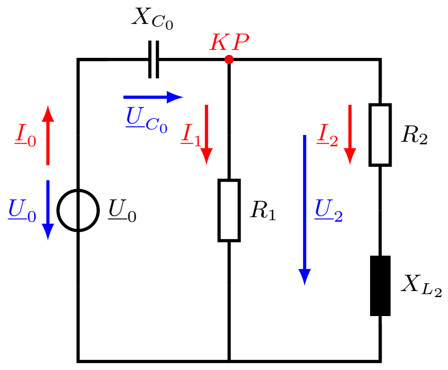
$$p(T) = u(T) \cdot i(T) = (-114{,}1 - 50{,}5 + 119{,}7)\,\text{mV} \cdot (-9{,}51)\,\text{mA}$$
$$= (-44{,}9)\,\text{mV} \cdot (-9{,}51)\,\text{mA} = \underline{\underline{0{,}427\,\text{mW}}}$$

c) Komplexe Größen verwenden den Effektivwert der Schwingung!

16/1 CLR Netzwerk

Von dem Netzwerk sind folgende Daten bekannt:

$R_1 = 1,2\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 470\,\Omega$ $\quad X_{C_0} = -906\,\Omega$ $\quad X_{L_2} = 628\,\Omega$
$\underline{I}_2 = 12\,\mathrm{mA} \cdot e^{j20^\circ}$



Berechnen Sie Schein- Wirk- und Blindleistung des Netzwerkes!

Berechnung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \qquad \text{mit } \underline{U}_0 = \underline{U}_{C_0} + \underline{U}_2 \qquad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Spannung U_2:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2} = (470 + j628)\,\Omega = 784{,}4\,\Omega \cdot e^{j53{,}19^\circ}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 9{,}413\,\mathrm{V} \cdot e^{j73{,}19^\circ} = (2{,}722 + j9{,}011)\,\mathrm{V}$$

Strom:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{R_1} = \frac{9{,}413\,\mathrm{V} \cdot e^{j73{,}19^\circ}}{1,2\,\mathrm{k\Omega}} = 7{,}844\,\mathrm{mA} \cdot e^{j73{,}19^\circ} = (2{,}268 + j7{,}5088)\,\mathrm{mA}$$
$$\begin{aligned}\underline{I}_0 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (2{,}268 + j7{,}5088 + 11{,}276 + j4{,}104)\,\mathrm{mA}\\ &= (13{,}544 + j11{,}613)\,\mathrm{mA} = 17{,}841\,\mathrm{mA} \cdot e^{j40{,}61^\circ}\end{aligned}$$

Spannung:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C_0} &= jX_{C_0} \cdot \underline{I}_0 = -j906\,\Omega \cdot 17{,}841\,\mathrm{mA} \cdot e^{j40{,}61^\circ} = 16{,}164\,\mathrm{V} \cdot e^{-j49{,}39^\circ}\\ &= (10{,}521 - j12{,}271)\,\mathrm{V}\\ \underline{U}_0 &= \underline{U}_{C_0} + \underline{U}_2 = (10{,}521 - j12{,}271 + 2{,}722 + j9{,}011)\,\mathrm{V}\\ &= (13{,}243 - j3{,}260)\,\mathrm{V} = 13{,}638\,\mathrm{V} \cdot e^{-j13{,}83^\circ}\end{aligned}$$

Scheinleistung:

$$\underline{S} = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = 13{,}638\,\mathrm{V} \cdot e^{-j13{,}83^\circ} \cdot 17{,}841\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j40{,}61^\circ} = 243{,}32\,\mathrm{mVA} \cdot e^{-j54{,}44^\circ}$$

$$S = |\underline{S}| = \underline{\underline{243{,}32\,\mathrm{mVA}}}$$

$$P = S \cdot \cos\varphi = 243{,}32\,\mathrm{mVA} \cdot \underbrace{\cos(-54{,}44)}_{0{,}5816} = \underline{\underline{141{,}50\,\mathrm{mW}}}$$

$$Q = S \cdot \sin\varphi = 243{,}32\,\mathrm{mVA} \cdot \underbrace{\sin(-54{,}44)}_{-0{,}813} = \underline{\underline{-197{,}93\,\mathrm{m\,var}}}$$

Zweiter Weg:

$$\underline{S} = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = \underline{I}_0 \cdot \underline{Z} \cdot \underline{I}_0^* = I_0^2 \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{Z} = jX_{C_0} + \frac{R_1 \cdot (R_2 - jX_{L_2})}{R_1 + R_2 - jX_{L_2}} = (445 - j622)\,\Omega = 764\,\Omega \cdot e^{-j54{,}44^\circ}$$

$$\underline{S} = I_0^2 \cdot \underline{Z} = (17{,}841\,\mathrm{mA})^2 \cdot 767\,\Omega \cdot e^{-j54{,}44^\circ} = 243{,}3\,\mathrm{mVA} \cdot e^{-j54{,}44^\circ}$$

$$S = 243{,}3\,\mathrm{mVA}$$

$$P = S \cdot \cos(-54{,}44^\circ) = 141{,}5\,\mathrm{mW}$$

$$Q = S \cdot \sin(-54{,}44^\circ) = -197{,}9\,\mathrm{m\,var}$$

16/1 Wirkleistung vs. Blindleistung

Was sind die Unterschiede von
Wirkleistungsanpassung und **Blindleistungskompensation**

Wirkleistungsanpassung

Maximale Wirkleistung bei Anpassung! $\underline{Z}_i^* \stackrel{!}{=} \underline{Z}_v$

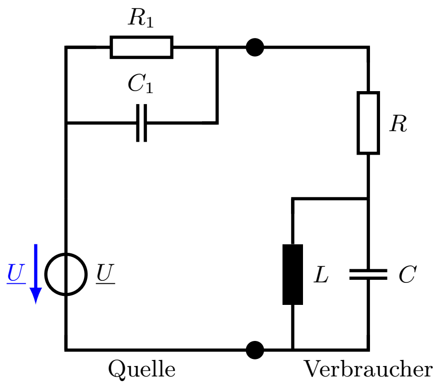
Blindleistungskompensation

Maximale Blindleistungskompensation bei $\cos(\varphi = 0)$

16/2 Wirkleistung

Welche Werte müssen R und C annehmen, damit im Verbraucher die maximale Wirkleistung umgesetzt wird?
Wie groß ist diese Wirkleistung ?

$R_1 = 20\,\Omega \quad C_1 = 3{,}18\,\mu\mathrm{F} \quad L = 0{,}6\,\mathrm{mH} \quad \underline{U} = 1\,\mathrm{V} \cdot e^{j20^\circ} \quad f = 1000\,\mathrm{Hz}$



Berechnung:

Phase von $\underline{U}$ ohne Bedeutung! (Berechnung über Impedanzen)
Maximale Wirkleistung bei Anpassung! $\underline{Z}_i^* \stackrel{!}{=} \underline{Z}_v$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{Hz} = 6283\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$
$$B_1 = \omega \cdot C_1 = 6283\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}18\,\mu\mathrm{F} = 0{,}02\,\mathrm{S}$$
$$X_L = \omega \cdot L = 6283\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{mH} = 3{,}77\,\Omega$$

Quelle:

$$\underline{Y}_i = G_1 + jB_1 = \frac{1}{R_1} + jB_1 = (0{,}05 + j0{,}02)\,\mathrm{S}$$
$$\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i} = (17{,}24 - j6{,}897)\,\Omega$$
$$R_i = 17{,}24\,\Omega \qquad X_i = -6{,}897\,\Omega$$

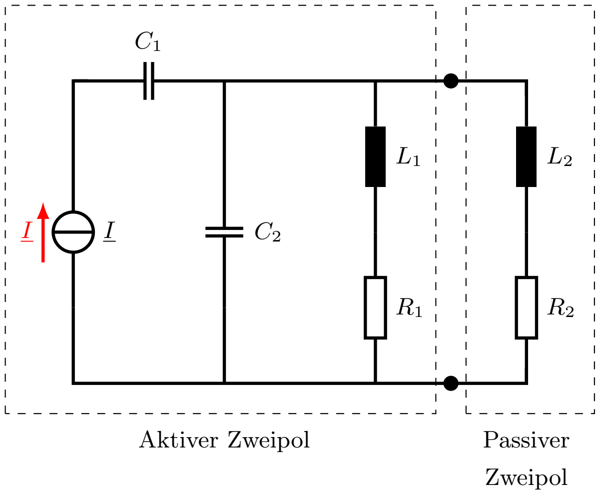
Anpassung, wenn $\underline{Z}_v = \underline{Z}_i^*$

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_v &= R_v + jX_v \stackrel{!}{=} (17{,}24 + j6{,}897)\,\Omega \quad \Rightarrow \\
R_v &= R = \underline{\underline{17{,}24\,\Omega}} \\
X_v &= 6{,}897\,\Omega \\
B_v &= B_L + B_C = \frac{-1}{X_v} = \frac{-1}{6{,}897\,\Omega} = -0{,}145\,\mathrm{S} \\
B_L &= \frac{-1}{X_L} = \frac{-1}{3{,}77\,\Omega} = -0{,}2653\,\mathrm{S} \\
B_C &= B_v - B_L = (-0{,}145 + 0{,}2653)\,\mathrm{S} = 0{,}1203\,\mathrm{S} \\
C &= \frac{B_C}{\omega} = \frac{0{,}1203\,\mathrm{S}}{6283\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{19{,}14\,\mu\mathrm{F}}}
\end{aligned}
$$

$$
P_{v,max} = \frac{U^2}{4 \cdot R_v} = \frac{1\,\mathrm{V}^2}{4 \cdot 17{,}24\,\Omega} = \underline{\underline{14{,}5\,\mathrm{mW}}}
$$

16/3 Abgebbare Wirkleistung

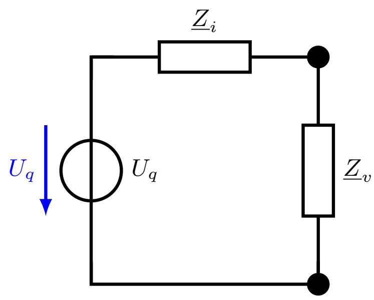
Um wieviel Prozent weicht die in dem passiven Zweipol umgesetzte Wirkleistung von der in dem aktiven Zweipol maximal abgebbaren Wirkleistung ab?
$C_1 = 2\,\text{nF}$ $C_2 = 3\,\text{nF}$ $L_1 = 2{,}5\,\mu\text{H}$ $R_1 = 20\,\Omega$ $L_2 = 3\,\mu\text{H}$ $R_1 = 15\,\Omega$ $f = 3\,\text{MHz}$



Berechnung:

C_1 spielt für die Berechnung der Wirkleistung keine Rolle, da in Reihe zu Stromquelle.

ESB:



Als ESB ist eine Stromquelle I_q mit parallelem $\underline{Z}_i$ und dazu parallelem $\underline{Z}_v$ möglich.

$$Z_i = jX_C||(R_1 + jX_{L1})$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 3\,\mathrm{MHz} = 18{,}85 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$X_{C_2} = \frac{-1}{\omega \cdot C_2} = \frac{-1}{18{,}85 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{nF}} = -17{,}68\,\Omega$$

$$X_{L_1} = \omega \cdot L_1 = 18{,}85 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}5\,\mu\mathrm{H} = 47{,}12\,\Omega$$

$$X_{L_2} = \omega \cdot L_2 = 18{,}85 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mu\mathrm{H} = 56{,}55\,\Omega$$

$$\underline{Z}_i = jX_{C_2}||(R_1 + jX_{L_1}) = \frac{-j17{,}68\,\Omega \cdot (20\,\Omega + j47{,}12\,\Omega)}{-j17{,}68\,\Omega + 20\,\Omega + j47{,}12\,\Omega} = \frac{-j17{,}68 \cdot (20 + j47{,}12)}{20 + j(47{,}12 - 17{,}68)}$$

$$= \frac{833{,}08 - j353{,}6}{20 + j29{,}44}\,\Omega = \frac{905{,}02 \cdot e^{-j23{,}0\,^\circ}}{35{,}59\,\Omega \cdot e^{j55{,}81\,^\circ}} = 25{,}428\,\Omega \cdot e^{-j78{,}81\,^\circ} = (4{,}935 - j24{,}94)\,\Omega$$

Verbraucherwiderstand:

$$\underline{Z}_v = (15 + j56{,}55)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_i + \underline{Z}_v = (4{,}935 - j24{,}94)\,\Omega + (15 + j56{,}55)\,\Omega = (19{,}94 + j31{,}61)\,\Omega$$

Anmerkung: $\underline{U}_q$ ist unbekannt, kürzt sich später heraus.

$$P_{v,max} = \frac{U_q^2}{4 \cdot R_i} = \frac{U_q^2}{4 \cdot 4{,}935\,\Omega} = \frac{U_q^2}{19{,}94\,\Omega}$$

$$P_v = I^2 \cdot R_v$$

$$I = \frac{U_q}{Z_{ges}} \qquad \text{Anmerkung: } I \text{ und } U_q \text{ Effektivwert; } Z \text{ Betrag}$$

$$P_v = \left(\frac{U_q}{Z_{ges}}\right)^2 \cdot R_v = \frac{U_q^2}{(19{,}94^2 + 31{,}61^2)\,\Omega^2} \cdot 15\,\Omega = U_q^2 \cdot \frac{15}{1397\,\Omega}$$

$$F_\% = 100\,\% \cdot \frac{P_v - P_{v,max}}{P_{v,max}} = 100\,\% \cdot \left(\frac{P_v}{P_{v,max}} - 1\right)$$

$$= 100\,\% \cdot \left(\frac{\cancel{U_q^2} \cdot 15}{1397\,\Omega} \cdot \frac{19{,}94\,\Omega}{\cancel{U_q^2}} - 1\right)$$

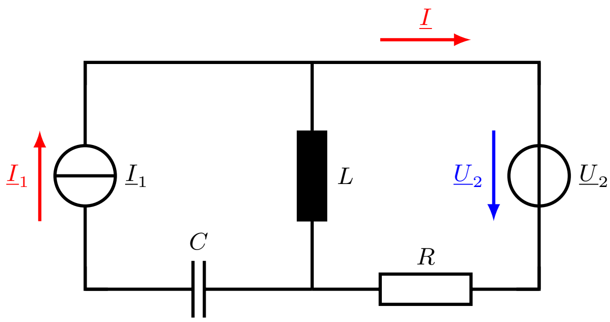
$$= 100\,\% \cdot (0{,}212 - 1) = \underline{\underline{-78{,}8\,\%}}$$

16/4 Wirkleistung Spannungsquelle

a) Berechnen Sie die Wirkleistung der Spannungsquelle $\underline{U}_2$.

b) Wird Wirkleistung aufgenommen oder abgegeben?

$R = 200\,\Omega \quad L = 80\,\mu\text{H} \quad C = 500\,\text{pF} \quad f = 1\,\text{MHz}$
$\underline{I}_1 = 10\,\text{mA} \cdot e^{j60\,°} \quad \underline{U}_2 = 3\,\text{V} \cdot e^{-j30\,°}$



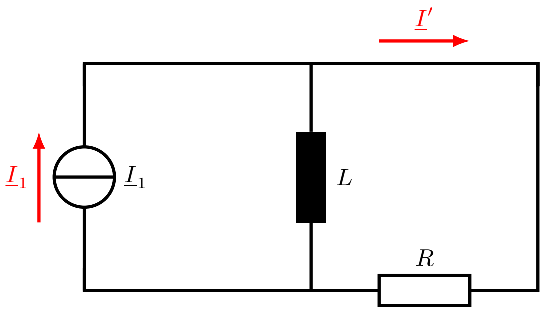
Berechnung:

C spielt keine Rolle, da in Reihe zu Stromquelle.

$$\text{Gesucht: } P = \Re(\underline{U}_2 \cdot \underline{I}^*)$$

Lösung mit Überlagerungsverfahren:

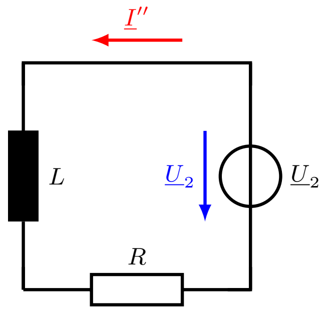
Nur Stromquelle:



Stromteiler:

$$
\begin{aligned}
X_L &= \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 1\,\text{MHz} \cdot 80\,\mu\text{H} = 503\,\Omega \\
\underline{I}' &= \underline{I}_1 \cdot \frac{jX_L}{R + jX_L} = 10\,\text{mA} \cdot e^{j60^\circ} \cdot \frac{j503}{200 + j503} \\
&= 10\,\text{mA} \cdot e^{j60^\circ} \cdot \underbrace{\frac{503 \cdot e^{j90^\circ}}{541{,}3 \cdot e^{j68{,}3^\circ}}}_{0{,}929\,\text{mA} \cdot e^{j21{,}7^\circ}} \\
&= 9{,}29\,\text{mA} \cdot e^{j81{,}7^\circ} = (1{,}34 + j9{,}19)\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

Nur Spannungquelle:



$$
\begin{aligned}
\underline{I}'' &= \frac{\underline{U}_2}{R + jX_L} = \frac{3\,\text{V} \cdot e^{-j30^\circ}}{(200 + j503)\,\Omega} = \frac{3\,\text{V} \cdot e^{-j30^\circ}}{541{,}3\,\Omega \cdot e^{j68{,}32^\circ}} \\
&= 5{,}54\,\text{mA} \cdot e^{-j98{,}32^\circ} = (-0{,}80 - j5{,}48)\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

Überlagerung - vorzeichenrichtg:

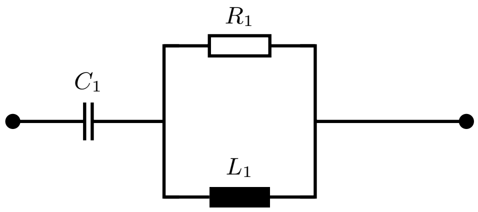
$$
\begin{aligned}
\underline{I} &= \underline{I}' - \underline{I}'' = (1{,}34 + j9{,}19 + 0{,}80 + j5{,}48)\,\text{mA} \\
&= (2{,}14 + j14{,}67)\,\text{mA} = \underline{14{,}83\,\text{mA} \cdot e^{j81{,}7^\circ}} \\
S &= \underline{U}_2 \cdot \underline{I}^* = 3\,\text{V} \cdot e^{-j30^\circ} \cdot 14{,}83\,\text{mA} \cdot e^{-j81{,}7^\circ} = 44{,}49\,\text{mVA} \cdot e^{-j111{,}7^\circ} \\
&= (\underbrace{-16{,}31}_{P} - j\underbrace{40{,}97}_{Q})\,\text{mVA} \Rightarrow \\
P &= \underline{\underline{-16{,}31\,\text{mW}}}
\end{aligned}
$$

Verbraucher-Zählpfeilsystem $\Rightarrow$ Spannungsquelle gibt Leistung ab.

16/5 Dualitätskonstante

Berechnen Sie zu der gegebenen Schaltung die duale Schaltung mit der Dualitätskonstanten.

$R_D^2 = 10000\,\Omega^2$
$R_1 = 80\,\Omega$
$L_1 = 50\,\mathrm{mH}$
$C_1 = 10\,\mu\,\mathrm{F}$



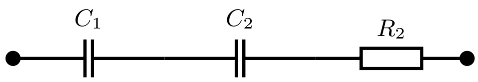
Formeln:

$$\underline{Z}_1(\omega) = R_D^2 \cdot \underline{Y}_2(\omega) \tag{16/5.1}$$

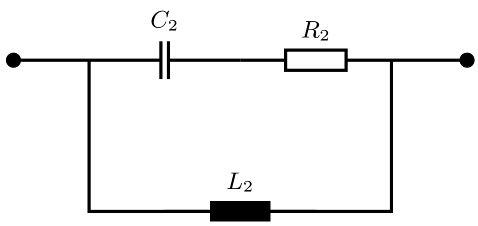
Berechnung:

Parallel ⇔ Serie
Leitwert ⇔ Widerstand
Kapazität ⇔ Induktivität
Parallelschaltung $R_1||L_1$ in Serienschaltung $R_2 + C_2$ Serienschaltung $C_1 + (R_2 + C_2)$ in Parallelschaltung $L_2||(R_2 + C_2)$

Zwischenschritt:



Duale Schaltung:

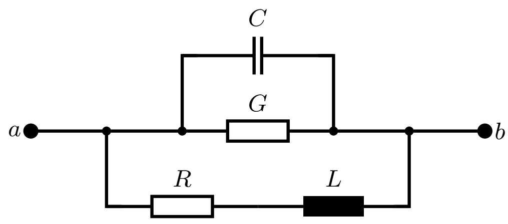


$$R_1 \cdot R_2 = R_D^2 \Rightarrow R_2 = \frac{R_D^2}{R_1} = \frac{10000\,\Omega^2}{80\,\Omega} = \underline{\underline{125\,\Omega}}$$

$$\text{(C zu L) aus: } \frac{L_2}{C_1} = R_D^2 \Rightarrow L_2 = R_D^2 \cdot C_1 = 10^4\,\Omega^{\cancel{2}} \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{s}}{\cancel{\Omega}} = 0{,}1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \underline{\underline{100\,\mathrm{mH}}}$$

$$\text{(L zu C) aus: } \frac{L_1}{C_2} = R_D^2 \Rightarrow C_2 = \frac{L_1}{R_D^2} = \frac{50\,\mathrm{mH}}{10000\,\Omega^2} = 5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\cancel{\mathrm{V}}\mathrm{s}}{\cancel{\mathrm{A}}} \cdot \frac{\mathrm{A}^{\cancel{2}}}{\mathrm{V}^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{5\,\mu\mathrm{F}}}$$

16/6 Dualitätskonstante verlustbehaftete Bauelemente



$R = 20\,\Omega \quad L = 1\,\mathrm{mH} \quad C = 100\,\mathrm{n\,F} \quad G = 2\,\mathrm{mS}$

a) Geben Sie das duale Schaltbild für den Zweipol $a - b$ an und berechnen Sie dessen Elemente für $R_D^2 = (100\,\Omega)^2$.

b) Welches verlustbehaftete Bauelement stellt die Reihenschaltung R und L dar?

c) Welches verlustbehaftete Bauelement stellt die Parallelschaltung G und C dar?

d) Interpretieren Sie das Ergebnis der Bauelementegrößen der beiden dualen Schaltungen in Bezug auf verlustbehaftete Bauelemente.

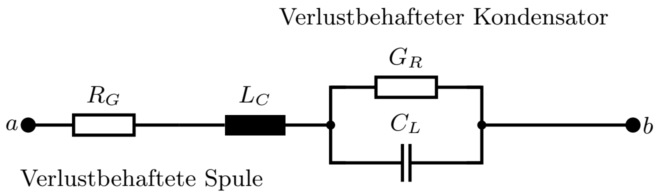
Formeln:

$$R \cdot R_{dual} = R_D^2 \quad = \quad \text{Dualitätskonstante} \qquad (16/6.1)$$

$$R_D^2 = \frac{L}{C} = \frac{L_{dual}}{C} = \frac{L}{C_{dual}} \qquad (16/6.2)$$

Berechnung:

Duales Netzwerk:
Parallel ⇔ Serie
Leitwert ⇔ Widerstand
Kapazität ⇔ Induktivität



a) Duale Bauelemente:

$$R_G = \frac{R_D^2}{R} = R_D^2 \cdot G = (100\,\Omega)^2 \cdot 2\,\mathrm{mS} = \underline{\underline{20\,\Omega}} \quad (= R\ !)$$

$$L_C = C \cdot R_D^2 = 100 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot (100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2 = \underline{\underline{1\,\mathrm{mH}}} = \quad (= L\ !)$$

$$G_R = \frac{R}{R_D^2} = \frac{20\,\Omega}{(100\,\Omega)^2} = \underline{\underline{2\,\mathrm{mS}}} \quad (= G\ !)$$

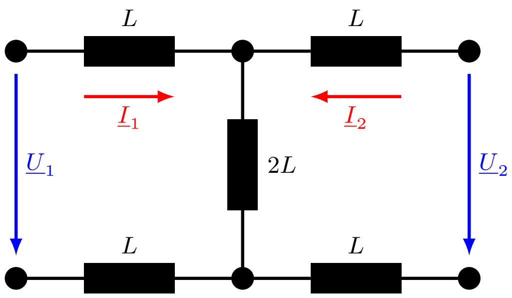
$$C_L = \frac{L}{R_D^2} = \frac{1\,\mathrm{mH}}{(100\,\Omega)^2} = \underline{\underline{100\,\mathrm{nF}}} \quad (= C\ !)$$

b) Verlustbehaftete Spule.

c) Verlustbehafteter Kondensator.

d) Die duale Schaltung ist die Reihenschaltung der gleichen verlustbehafteten Bauteile Spule und Kondensator.

16/7 Vierpol Y-Parameter



a) Berechnen Sie die $\underline{Y}$-Parameter des Vierpols in Abhängigkeit von L.

b) Bestimmen Sie die $\underline{Z}$-Parameter

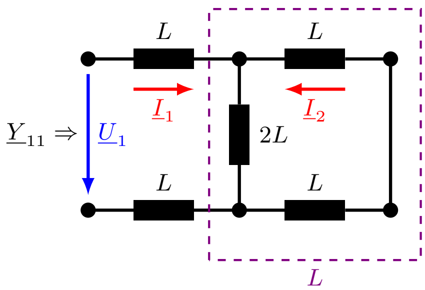
Berechnung:

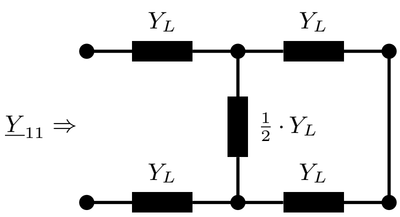
a) Y Parameter; Einträge in Leitwertmatrix; Achtung Serienschaltung $\underline{Y}_{Serie} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$!

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{Y}_L = \underline{\underline{\frac{1}{j\omega \cdot L}}} = \underline{\underline{-j\frac{1}{\omega \cdot L}}}$$

Y_{11}: $U_2 = 0$ d.h. Kurzschluß am Ausgang

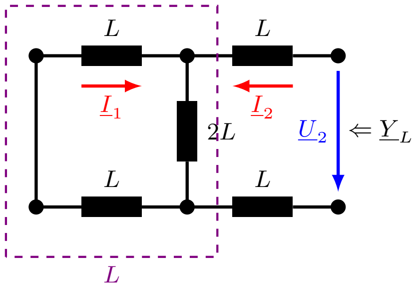




$$\frac{1}{2 \cdot X_L} = \frac{1}{2} \cdot Y_L$$
$$\frac{1}{2} \cdot Y_L + \frac{1}{2} \cdot Y_L = Y_L$$
$$\frac{1}{3 \cdot X_L} = \frac{1}{3} \cdot Y_L$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\Big|_{U_2=0} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L}}$$

Y_{12}: $U_1 = 0$ d.h. Kurzschluß am Eingang



aus $\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2$
folgt mit $\underline{U}_1 = 0$

$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\Big|_{U_1=0}$

$$\text{Stromteiler:} \quad -\underline{I}_1 = \frac{2 \cdot Z_L}{4 \cdot Z_L} \cdot \underline{I}_2 = \frac{1}{2} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{3 \cdot Z_L} = \underline{U}_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L$$

$$\underline{I}_1 = -\frac{1}{2} \cdot \underline{U}_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L = -\frac{1}{6} \cdot \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_L$$

$$\underline{Y}_{12} = \frac{-\frac{1}{6} \cdot \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_L}{\underline{U}_2} = \underline{\underline{-\frac{1}{6} \cdot \underline{Y}_L}}$$

$$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12} = \underline{\underline{-\frac{1}{6} \cdot \underline{Y}_L}} \text{ da spiegelsymmetrisch}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\Big|_{U_1=I_1=0} = \text{spiegelbildlich zu } \underline{Y}_{11} \text{ d.h.}$$

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{11} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L}}$$

b) Z-Parameter Leerlauf

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\Big|_{I_2=0} = 4 \cdot j\omega \cdot L = \underline{\underline{\underline{Z}_{22}}}$$

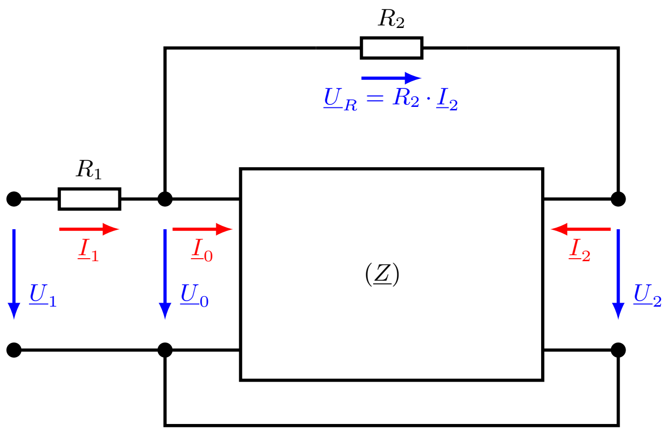
$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{I_1=0}$$

$$\underline{U}_1 = 2 \cdot X_L \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{2 \cdot X_L \cdot \underline{I}_2}{\underline{I}_2} = 2 \cdot X_L = 2 \cdot j\omega \cdot L = \underline{\underline{\underline{Z}_{21}}}$$

16/8 Spannung Vierpol

Berechnung Sie $\underline{U}_0$

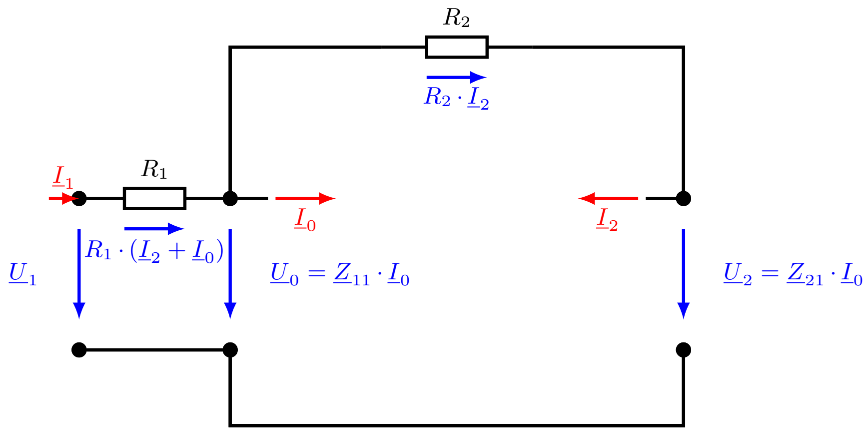


$$
\begin{aligned}
R_1 &= 300\,\Omega \\
R_2 &= 600\,\Omega \\
\underline{Z}_{11} &= 100\,\mathrm{k}\Omega \text{ reell} \\
\underline{Z}_{21} &= -2\,\mathrm{M}\Omega \text{ reell} \\
\underline{U}_1 &= 1{,}5\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Die $\underline{Z}$-Matrix des Vierpols ist gegeben:

$$
\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & 0 \\ \underline{Z}_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}
$$

Berechnung:



Aus $\underline{Z}$-Matrix folgt:

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_0 \tag{1}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_0 \tag{2}$$

Knoten 1:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_0 = 0 \tag{3}$$

Masche 1:

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_0 \tag{4}$$

Masche 2:

$$\underline{U}_0 = R_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \tag{5}$$

Zwei Gleichungen für zwei unbekante Ströme $\underline{I}_0$ und $\underline{I}_2$:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_0 &= R_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_0 && (1\&2 \text{ in } 5)\\
\Rightarrow \underline{I}_2 &= \frac{1}{R_2} \cdot (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21}) \cdot \underline{I}_0 && (6)\\
\underline{U}_1 &= \underline{I}_0 \cdot \underline{Z}_{11} + R_1(\underline{I}_0 + \underline{I}_2) && (7\ 1\&3 \text{ in } 4)\\
\underline{U}_1 &= \underline{I}_0 \cdot \underline{Z}_{11} + R_1 \cdot \underline{I}_0 + R_1 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21}) \cdot \underline{I}_0 && (6 \text{ in } 7)\\
&= \left[\underline{Z}_{11} + R_1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21})\right] \cdot \underline{I}_0\\
&= \left[100\,\mathrm{k\Omega} + 300\,\Omega + \frac{300\,\Omega}{600\,\Omega} \cdot \Big(100\,\mathrm{k\Omega} - (-2\,\mathrm{M\Omega})\Big)\right] \cdot \underline{I}_0\\
&= 0{,}103 + 0{,}5 \cdot (100 + 2000)\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_0 = 1{,}15\,\mathrm{M\Omega} \cdot \underline{I}_0\\
\Rightarrow \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_1}{1{,}15\,\mathrm{M\Omega}} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{1{,}15\,\mathrm{M\Omega}} = 1{,}3\,\mu\mathrm{A}\\
\underline{U}_0 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_0 = 100\,\mathrm{k\Omega} \cdot 1{,}3\,\mu\mathrm{A} = \underline{\underline{130{,}4\,\mathrm{mV}}}
\end{aligned}$$

Nicht gefragt:

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{R_2} \cdot (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21}) \cdot \underline{I}_0 = \frac{1}{600\,\Omega} \cdot 2{,}1\mathrm{M\Omega} \cdot 1{,}3\,\mu\mathrm{A} = 4{,}55\,\mathrm{mA} >> \underline{I}_0$$

Probe

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= 1{,}5\,\mathrm{V} = R_1 \cdot (\underline{I}_0 + \underline{I}_2) + \underline{I}_0 \cdot Z_{11}\\
&= 300\,\Omega \cdot (0{,}0013 + 4{,}55)\,\mathrm{mA} + 1{,}3\,\mu\mathrm{A} \cdot 100\,\mathrm{k\Omega} = 1{,}498\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Ist Ihnen aufgefallen, daß $\underline{Z}_{21}$ einen negativen Wert hat?

Ein Widerstand nimmt elektrische Leistung auf, also ein Verbraucher.
Dann muß also ein negativer Widerstand elektrische Leistung abgeben! Gibt es das in der Realität?

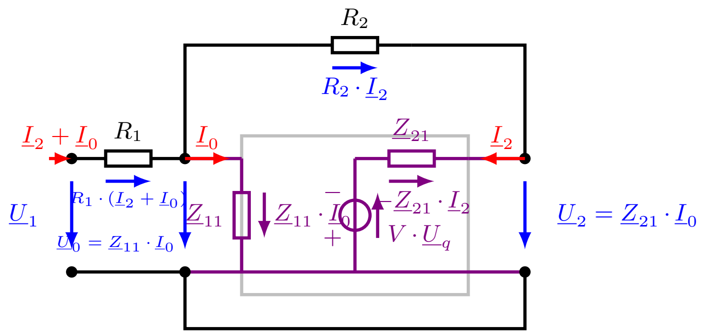
Was steckt in dem Vierpol?

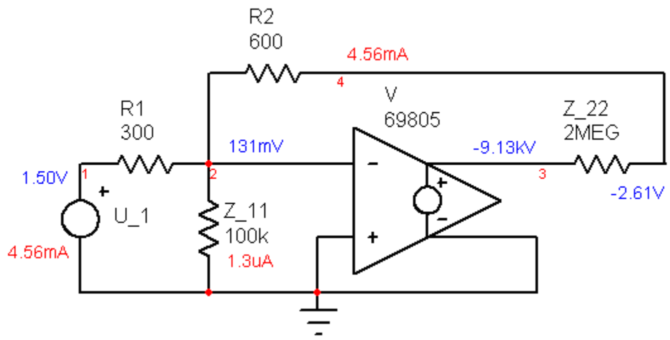
Passiver Vierpol:
Zum Beispiel mit 3 Widerständen in T oder Π Schaltung, ergibt jedoch keine Lösung!
Aus der $\underline{Z}$ Matrix ist ersichtlich, daß $\underline{Z}_{21} = 0$ und $\underline{Z}_{22} = 0$ sind, somit existiert keine Kopplung vom Ausgang zum Eingang, sondern nur in Vorwärtsrichtung.

Beispiel: Elektrodynamischer Lautsprecher der auf ein Kondensatormikrofon einwirkt. Kopplung nur vom Lautsprecher zum Mikrofon, nicht umgekehrt.

Aktiver Vierpol: (Für Fortgeschrittene)
Es muß sich um einen invertierenden Trennverstärker mit einem Eingangswiderstand von $100\,\mathrm{k\Omega}$ und einem Ausgangswiderstand von $2\,\mathrm{M\Omega}$ handeln. Die Verstärkung ist zu berechnen.

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_0 - R_2 \cdot \underline{I}_2 = 130{,}4\,\mathrm{mV} - 600\,\Omega \cdot 4{,}55\,\mathrm{mA} = -2{,}6\,\mathrm{V}$$
$$\underline{U}_q = \underline{U}_2 - \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 = -2{,}6\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{M\Omega} \cdot 4{,}55\,\mathrm{mA} = -9102{,}6\,\mathrm{V}$$
$$V = \frac{\underline{U}_q}{\underline{U}_0} = \frac{-9102{,}6\,\mathrm{V}}{130{,}4\,\mathrm{mV}} = -69805$$



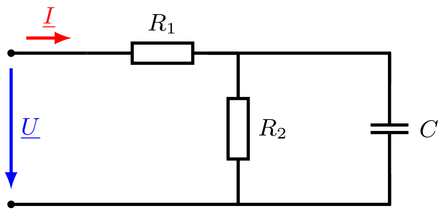


17/1 Stromortskurve

Konstruieren Sie die Stromortskurve $\underline{I} = \underline{g}(f)$ von dem abgebildeten Netzwerk!
Entnehmen Sie der Stromortskurve den Strom $\underline{I}$ für $f_0 = 2,5\,\text{kHz}$!

Gegeben sind: $R_1 = 15\,\Omega$; $R_2 = 50\,\Omega$; $C = 1{,}59\,\mu\text{F}$;
$0{,}5\,\text{kHz} \leq f \leq 2{,}5\,\text{kHz}$;
$\underline{U} = 10\,\text{V} =$ konstant

Maßstäbe: $5\,\text{mS} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm} : 10\,\Omega \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$ (Platzbedarf in x: 14 cm; in y: 12 cm)



Berechnung:

Parallelschaltung $\underline{Y}_P$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_P &= G_2 + jB \\
G_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{1}{50\,\Omega} = 20\,\text{mS} \\
f_u &= 0{,}5\,\text{kHz} \qquad f_o = 2{,}5\,\text{kHz} \qquad \text{(Anmerkung)} \\
B_u &= \omega_u \cdot C = 2 \cdot \pi \cdot f_u = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,\text{kHz} \cdot 1{,}59\,\mu\text{F} = 5\,\text{mS} \\
B_o &= \omega_o \cdot C = 25\,\text{mS} \qquad \text{(5-facher Wert von } B_u\text{)} \\
\underline{Y}_P &= 20\,\text{mS} + j(5 \ldots 25)\,\text{mS}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{P,min} &= G_2 \quad (\text{für } f = 0) \qquad & \underline{Z}_{P,min} &= 0 \qquad (\text{für } f \to \infty) \\
\underline{Y}_{P,max} &= \infty \quad (\text{für } f \to \infty) \qquad & \underline{Z}_{P,max} &= R_2 \qquad (\text{für } f = 0)
\end{aligned}$$

Zeichnen der Leitwertgeraden $\underline{Y}_P$; Konstruktion des Halbkreises für $\underline{Z}_P$

$$(G_2 = 20\,\text{mS} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm} : R_2 = 50\,\Omega \mathrel{\hat{=}} 5\,\text{cm})$$

Einzeichnen der $\underline{Z}_{P_o}$, $\underline{Z}_{P_u}$ Linien (Zeiger).

Berechnen der Gesamtschaltung $\underline{Y}$
Graphisch wird der Widerstand R_1 addiert, durch verschieben der $\Im$ Achse um 1,5 cm nach links.

$$\underline{Y}_{min} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{65\,\Omega} = 15{,}4\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 3{,}08\,\text{cm} \qquad (f = 0)$$
$$\underline{Y}_{max} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{15\,\Omega} = 66{,}7\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 13{,}33\,\text{cm} \qquad (f \to \infty)$$

Zeichnen des Leitwertkreises $\underline{Y}$ mit Radius r:

$$r = \frac{\underline{Y}max - \underline{Y}_{min}}{2} \cdot \underbrace{\frac{1\,\text{cm}}{5\,\text{mS}}}_{\text{Maßstabsumwandlung}} = 5{,}12\,\text{cm}$$

Der Mittelpunkt ergibt sich aus:

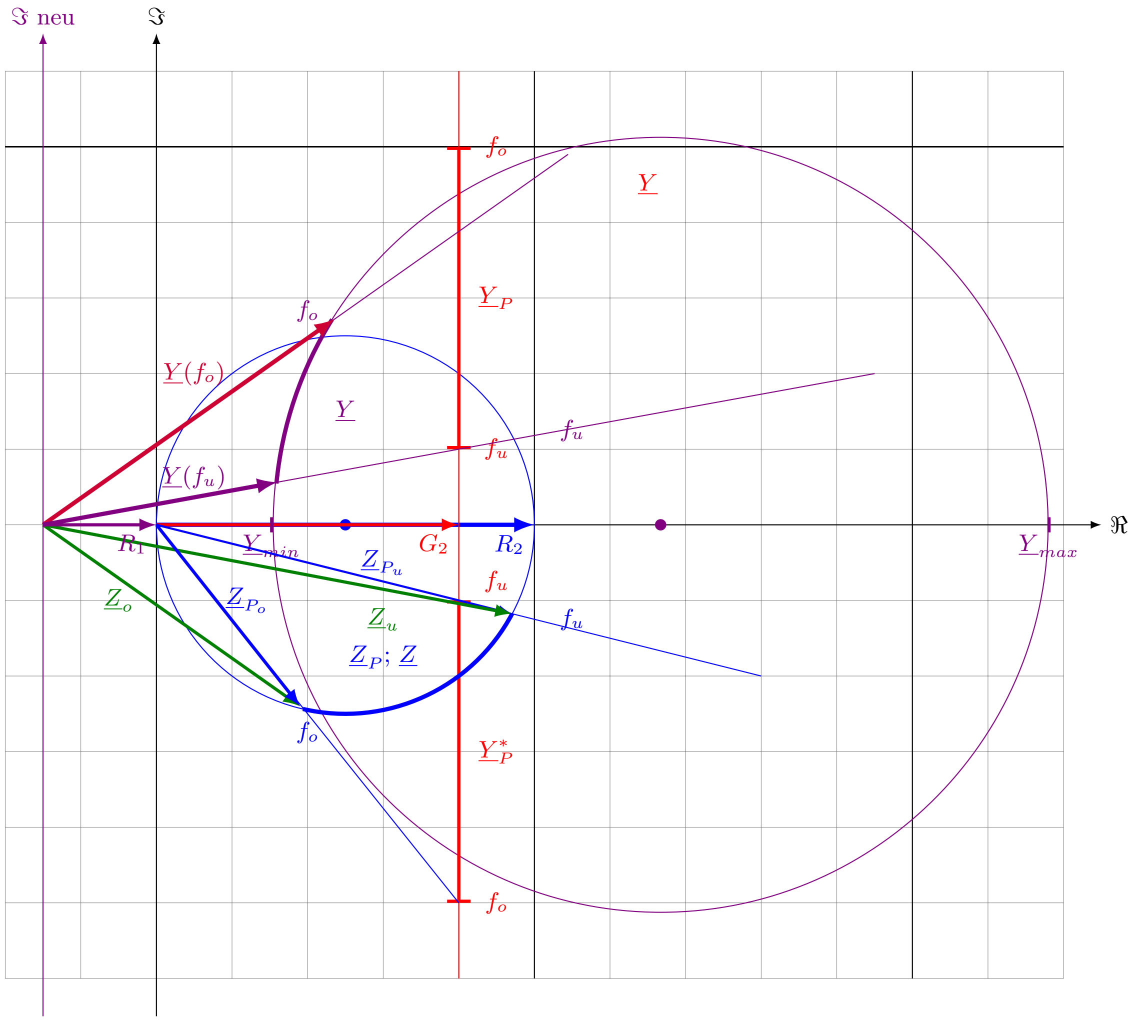
$$\underline{Y}_{min} + r = 3{,}08\,\text{cm} + 5{,}12\,\text{cm} = 8{,}2\,\text{cm}$$

zu messen ab neuer imaginärer Achse.

Einzeichnen der $\underline{Z}_o$, $\underline{Z}_u$ Linien (Zeiger).

Spiegeln der Zeiger $\underline{Z}_o$, $\underline{Z}_u$ an der reellen Achse liefert Schnittpunkt mit $\underline{Y}$. Diese sind entsprechend $\underline{Y}_o$, $\underline{Y}_u$.

$x = 14\,\mathrm{cm}; y = 12\,\mathrm{cm}$



Ablesen der $\underline{Y}$ Werte und Maßstabsumrechnung $M = 5\,\mathrm{mS/cm}$ ergibt Bereich zwischen f_u und f_o.

$$\text{ablesen: } \underline{Y}(f_o) = 23{,}6\,\mathrm{mS} \cdot e^{(j35{,}2\,^\circ)} \quad \text{aus Zeichnung } 4{,}72\,\mathrm{cm}$$

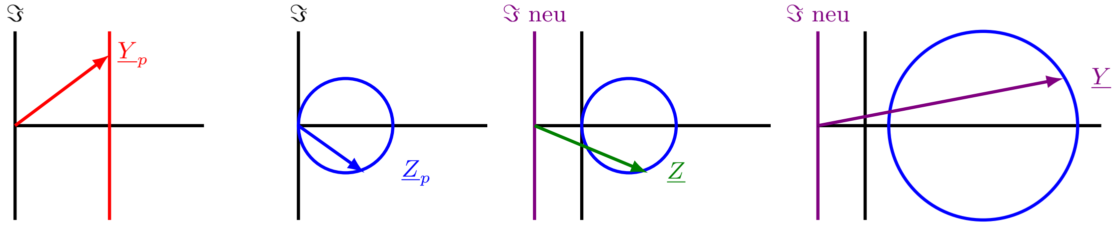
$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = \underline{\underline{236\,\mathrm{mA} \cdot e^{(j35{,}2\,^\circ)}}}$$

$$\underline{I} = \underline{\underline{(193 + j136)\,\mathrm{mA}}}$$

$\underline{Y}_P$ Gerade $\Rightarrow \underline{Z}_P$ Kreis
$\underline{Z}_{P_u}, \underline{Z}_{P_o}$ Linie
R_1 addieren
$\underline{Y}_{min}$ Kreis
$\Rightarrow \underline{Y}(f_u); \underline{Y}(f_o)$

Kurzanleitung

(Siehe Merksätze zu Inversion im Script, hier graphisch veranschaulicht:)



a) Leitwertortskuve der Parallelschaltung von R_2 und C ergibt eine Gerade die im Abstand G_2 parallel zur imaginären Achse liegt.
$G_2 = 20\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$

b) Grenzen $f_u : \underline{Y}_P = 5\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$, $f_o : \underline{Y}_P = 25\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$ einzeichnen, auch für $\underline{Y}_P^*$

c) Inversion von $\underline{Y}_P$ liefert die Widerstandsortskurve $\underline{Z}_P$ ein Kreis durch den Ursprung.
$\underline{Z}_{P_{min}} = 0$; $\underline{Z}_{P_{max}} = R_2 = 50\,\Omega \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$ $\rightarrow$ Kreis um P(2.5,0) $r = 2{,}5\,\text{cm}$

d) Der Serienwiderstand R_1 wird durch verschieben der imaginären Achse addiert $R_1 = 15\,\Omega \mathrel{\widehat{=}} 1{,}5\,\text{cm}$ (Verschiebung nach links).

e) Punktweise Inversion von $\underline{Z}$ liefert $\underline{Y}$ mit
$\underline{Y}_{min} = 15{,}4\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 3{,}08\,\text{cm}$ und $\underline{Y}_{max} = 66{,}7\,\text{mS} \mathrel{\widehat{=}} 13{,}3\,\text{cm}$,
wieder einen Kreis der jetzt nicht mehr durch den Ursprung geht.

f) Ablesen von $\underline{Y}(f_o) = 4{,}72\,\text{cm}$ und Winkel $35{,}2\,^\circ$
$\Rightarrow \underline{Y}(f_o) = 23{,}6\,\text{mS} \cdot e^{(j35{,}2\,^\circ)}$.

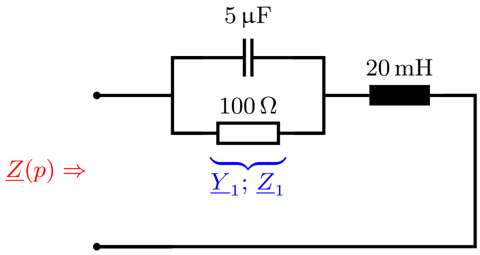
g) Berechnen des Stroms ... ;-)

17/2 Leitwerts-, Widerstandsortskurve

Konstruieren Sie graphisch fur den dargestellten Zweipol die Leitwertsortskurve $\underline{Y}_1(p)$, die Widerstandsortskurve $\underline{Z}_1(p)$, und schlieslich die Widerstandsortskurve $\underline{Z}(p)$.
Beziffern Sie jeweils die Punkte $p = 0$; $p = 1$; $p = 3$ und den Grenzwert $p \to \infty$.

Parameter p: $\omega = p \cdot \omega_0$ mit $\omega_0 = 1000\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Maßstäbe: 2,5 mS $\widehat{=}$ 1 cm : 10 Ω $\widehat{=}$ 1 cm
(Platzbedarf in x: 12 cm; in y: 14 cm)

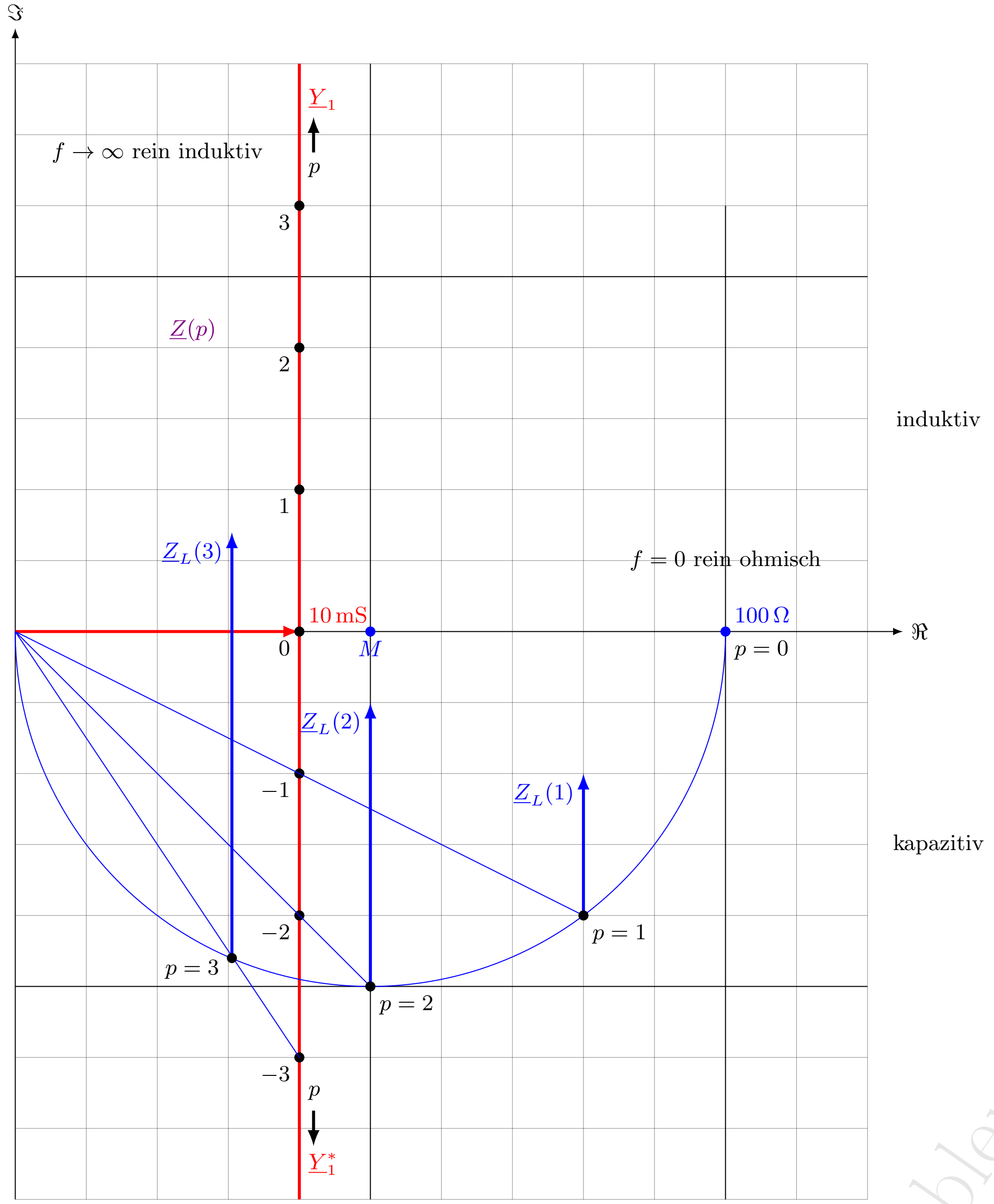


Berechnung:

$$\underline{Y}_1(p) = \frac{1}{R} + j \cdot p \cdot \omega_0 \cdot C = (10 + j \cdot p \cdot 5)\,\mathrm{mS}$$
$$\underline{Z}_L(p) = j \cdot p \cdot \omega_0 \cdot L = +j \cdot p \cdot 20\,\Omega$$
$$\underline{Z}(p) = \underline{Z}_L(p) + \frac{1}{\underline{Y}_1(p)}$$

Nicht gefragt: Kontrollrechnung: (konjugiert komplex erweitern)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(p) = \underline{Z}_L(p) + \frac{1}{\underline{Y}_1(p)} &= j \cdot p \cdot 20\,\Omega + \frac{1}{(10 + j \cdot p \cdot 5)\,\mathrm{mS}} \\
&= j \cdot p \cdot 20\,\Omega + \frac{1}{(10 + j \cdot p \cdot 5)\,\mathrm{mS}} \cdot \frac{(10 - j \cdot p \cdot 5)\cancel{\mathrm{mS}}}{(10 - j \cdot p \cdot 5)\cancel{\mathrm{mS}}} \\
&= \frac{10 \cdot 10^3}{100 + 25 \cdot p^2}\,\Omega + j\Big(20 \cdot p - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot p}{100 + 25 \cdot p^2}\Big)\,\Omega
\end{aligned}$$



a) $\underline{Y}_1$ zeichnen mit p-Werten

b) $\underline{Z}_{min}$, $\underline{Z}_{max}$ berechnen
   $\to$ $\underline{Z}$-Halbkreis: $r = 5\,\text{cm}$

c) p-Werte auf $\underline{Z}$ einzeichnen

d) $\underline{Z}_L(p)$ punktweise addieren

e) $\underline{Z}(p)$ Kurve zeichnen

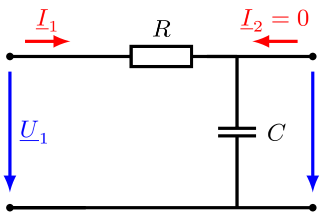
17/3 Ortskurve

a) Zeichnen Sie maßstäblich die Ortskurve für das Spannungsverhältnis U_2/U_1 in Abhängigkeit von der Frequenz f.

b) Geben Sie die Grenzfrequenz der Schaltung an.

c) Wie groß ist die Dämpfung des Vierpols für die Frequenz $f = 1{,}2\,\text{kHz}$ (falls in Vorlesung behandelt: in dB)

$R = 16\,\text{k}\Omega$; $C = 12\,\text{nF}$; $200\,\text{Hz} \le f \le 1{,}2\,\text{kHz}$



Berechnung: (Platzbedarf in x: 5 cm; in y: 15 cm)

a) Spannungsverhältnis U_2/U_1 in Abhängigkeit von der Frequenz f

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{Y} = \underline{U}_1 \cdot \frac{j\omega \cdot C}{1 + j\omega \cdot C \cdot R} = \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega \cdot C}}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{\underline{U}_1}{(R + \frac{1}{j\omega \cdot C}) \cdot j\omega \cdot C} = \frac{\underline{U}_1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

f/Hz	$2\pi \cdot f \cdot R \cdot C$	$\underline{U}_2/\underline{U}_1$
200	0,241	0,945-j0,228
828,9	1	0,5-j0,5
1200	1,448	0,323-j0,468

b) Grenzfrequenz

$$\omega_g \cdot R \cdot C = 1$$

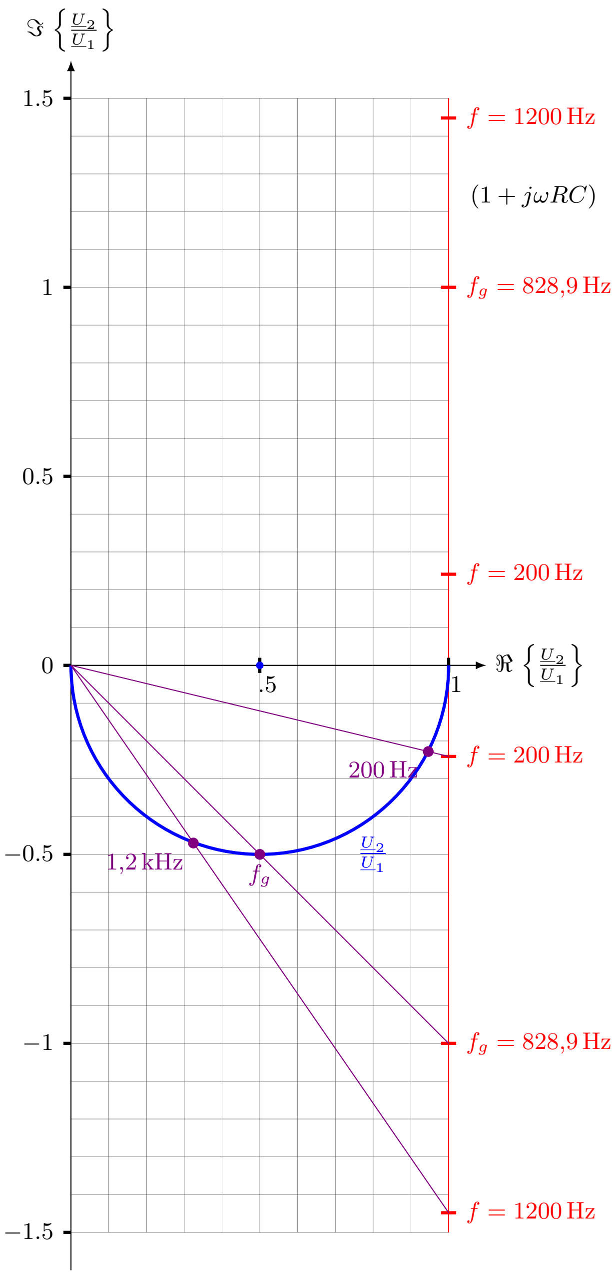
$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \underline{\underline{828{,}9\,\text{Hz}}}$$

c) Dämpfung

$$f = 1{,}2\,\text{kHz} \qquad a = 20 \cdot \lg \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

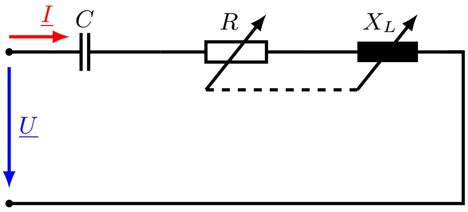
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 0{,}323 - j0{,}468 = 0{,}569 \cdot e^{-j50{,}56\,^\circ}$$

$$a = 20 \cdot \lg(0{,}569) = \underline{\underline{-4{,}9\,\text{dB}}}$$


$\Im\left\{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right\}$
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
.5
1
$\Re\left\{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right\}$
$f = 1200\,\text{Hz}$
$(1 + j\omega RC)$
$f_g = 828{,}9\,\text{Hz}$
$f = 200\,\text{Hz}$
$f = 200\,\text{Hz}$
200 Hz
1,2 kHz
f_g
$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$
$f_g = 828{,}9\,\text{Hz}$
$f = 1200\,\text{Hz}$

17/4 Stromortskurve

Konstruieren Sie die Stromortskurve $\underline{I} = f(p)$ zu der abgebildeten Schaltung
für $0 \leq p \leq 1$!
Es ist $Z_{RL} = p(R_0 + jX_{L_0})$. Die Parameterwerte $p = 0$; 0,25; 0,5; 0,75 und 1 sind zu markieren.
Für welches p wird $I = I_{max}$? Geben Sie diesen Stromwert an.
Gegeben sind: $\underline{U} = U = 10\,\mathrm{V}$; $X_C = -3\,\mathrm{k\Omega}$; $R_0 = 6\,\mathrm{k\Omega}$; $X_{L_0} = 8\,\mathrm{k\Omega}$.
Maßstäbe: $1\,\mathrm{k\Omega} \widehat{=} 1\,\mathrm{cm}$; $50\,\mathrm{\mu s} \widehat{=} 1\,\mathrm{cm}$



Berechnung: (Platzbedarf in x: 11 cm; in y: 12 cm)

$\underline{I}(p) = \underline{Y}($

$\underline{Z}(p)$ durch Vektoraddition der Widerstände zeichnen,

$Z(p) = \sqrt{}$

$\underline{Z}^*(p)$ durch Spiegelung an der reellen Achse zeichnen und Parameter p einzeichnen.

$X_C = -3$
$R_0 = 6\,\mathrm{k}$
$X_{L_0} = 8\,\mathrm{k}$

Senkrechte zu $\underline{Z}^*(p)$ durch den Ursprung zeichnen

$\overline{0N} = 1{,}8$

Invertieren ergibt Durchmesser des Kreises

$\overline{0D} = \frac{1}{\overline{0N}}$

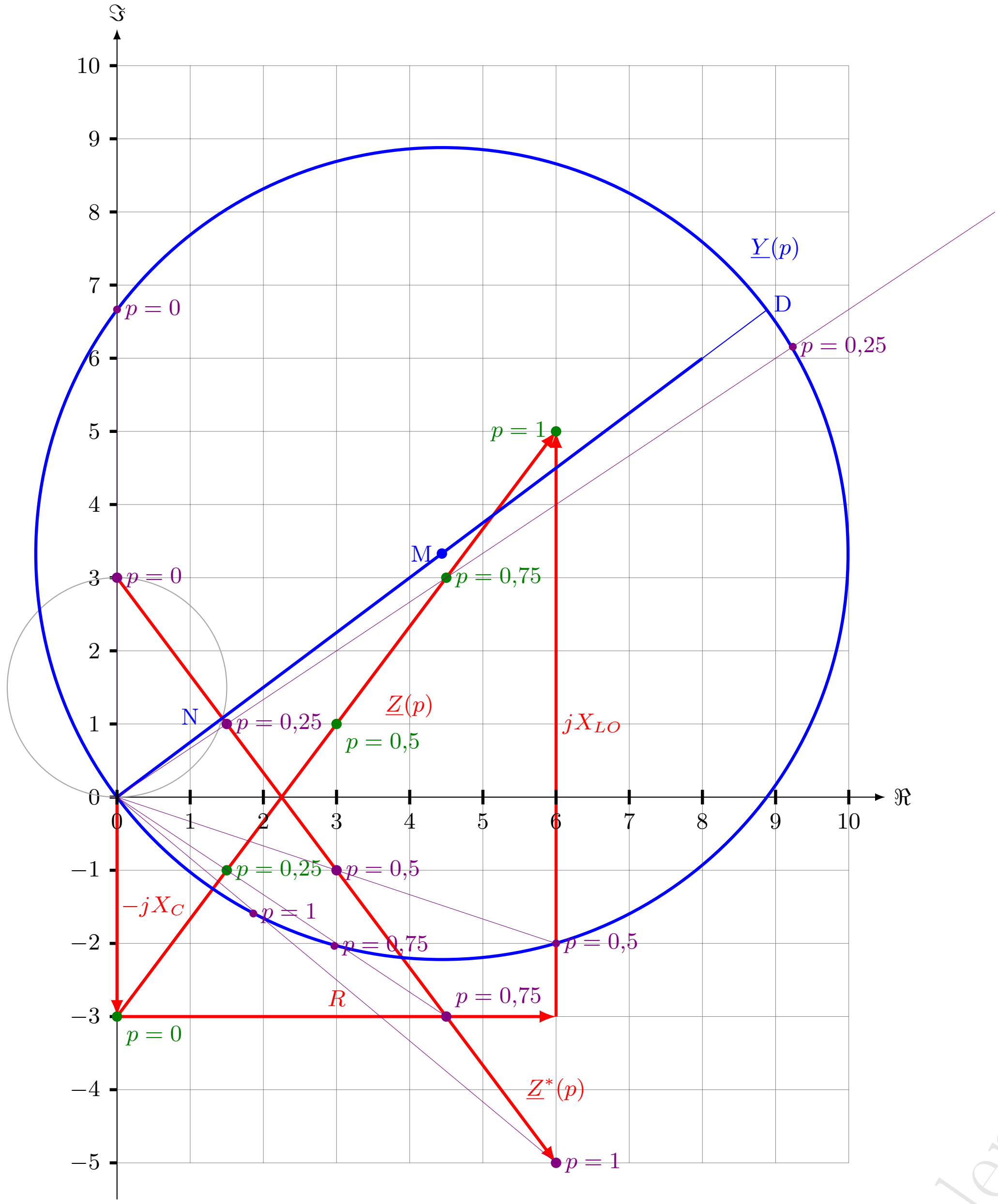
Mittelpunkt bestimmen

$\overline{0M} = \frac{1}{2}\,\overline{0}$

$\underline{Y}(p)$ Kreis zeichnen. Max. Strom bei größtem Leitwert im Punkt D(Durchmesser des Kreises = max. Abstand vom Ursprung)

Ablesen von $p = 0{,}24$ (Abstand zwischen $N(OD \cap \underline{Z}^*(p))$ und $\underline{Z}^*(p)|_{p=0}$)

$I_{max} = \underline{Y}($



Reihenfolge: $j\underline{X}_C$; R; $j\underline{X}_L$; $\underline{Z}(p)$; p-Werte; $\perp \underline{Z}^*(p) \Rightarrow \overline{ON}$;
$\overline{OD}$ Durchmesser; Kreis um $\overline{OM} \Rightarrow \underline{Y}(p)$

17/5 Widerstandstransformation

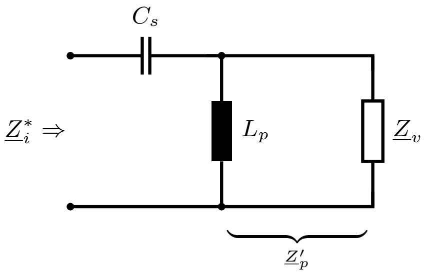
Ein Verbraucher mit $\underline{Z}_v = (6 + j4)\,\mathrm{k\Omega}$ soll mit Hilfe von zwei Blindwiderständen so an eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $\underline{Z}_i = (3 + j1{,}5)\,\mathrm{k\Omega}$ angepasst werden, dass er die größtmögliche Wirkleistung aufnimmt.
Bestimmen Sie zeichnerisch die hinzuzuschaltenden Blindwiderstände (Art und Größe) einer möglichen Schaltung und skizzieren Sie ihre Zusammenschaltung mit $\underline{Z}_v$.
Maßstab: $1\,\mathrm{k\Omega} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$

Berechnung: (Platzbedarf in x: 10 cm; in y: 20 cm)
(14 cm in y: reichen auch, wenn eine Linie durch die Rechnung geht)

Anpassung: Der transformierte Widerstand muss gleich dem konjugiert komplexen Innenwiderstand sein.

$\underline{Z}_i^* = (3 - j1{,}5)\,\mathrm{k\Omega}$

1. Möglichkeit



Imaginärteil anpassen:

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{\underline{Z}_v} + \frac{1}{X_{Lp}}$$

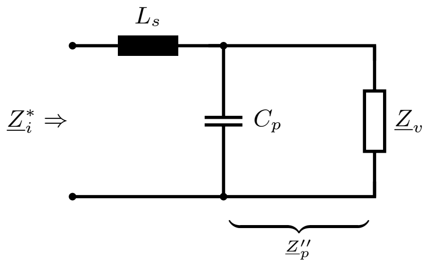
Jetzt Zeichnung anfertigen um X_{vp} und X'_p zu bestimmen.

$$\frac{1}{X_{Lp}} = \left(\overbrace{\frac{1}{6{,}3\,\mathrm{k\Omega}}}^{1/X'_p} - \overbrace{\frac{1}{13\,\mathrm{k\Omega}}}^{1/X_{vp}} \right)$$

$$X_{Lp} = \underline{\underline{12{,}2\,\mathrm{k\Omega}}}$$

$$X_{C_s} = \underline{\underline{-5{,}6\,\mathrm{k\Omega}}}$$

2. Möglichkeit



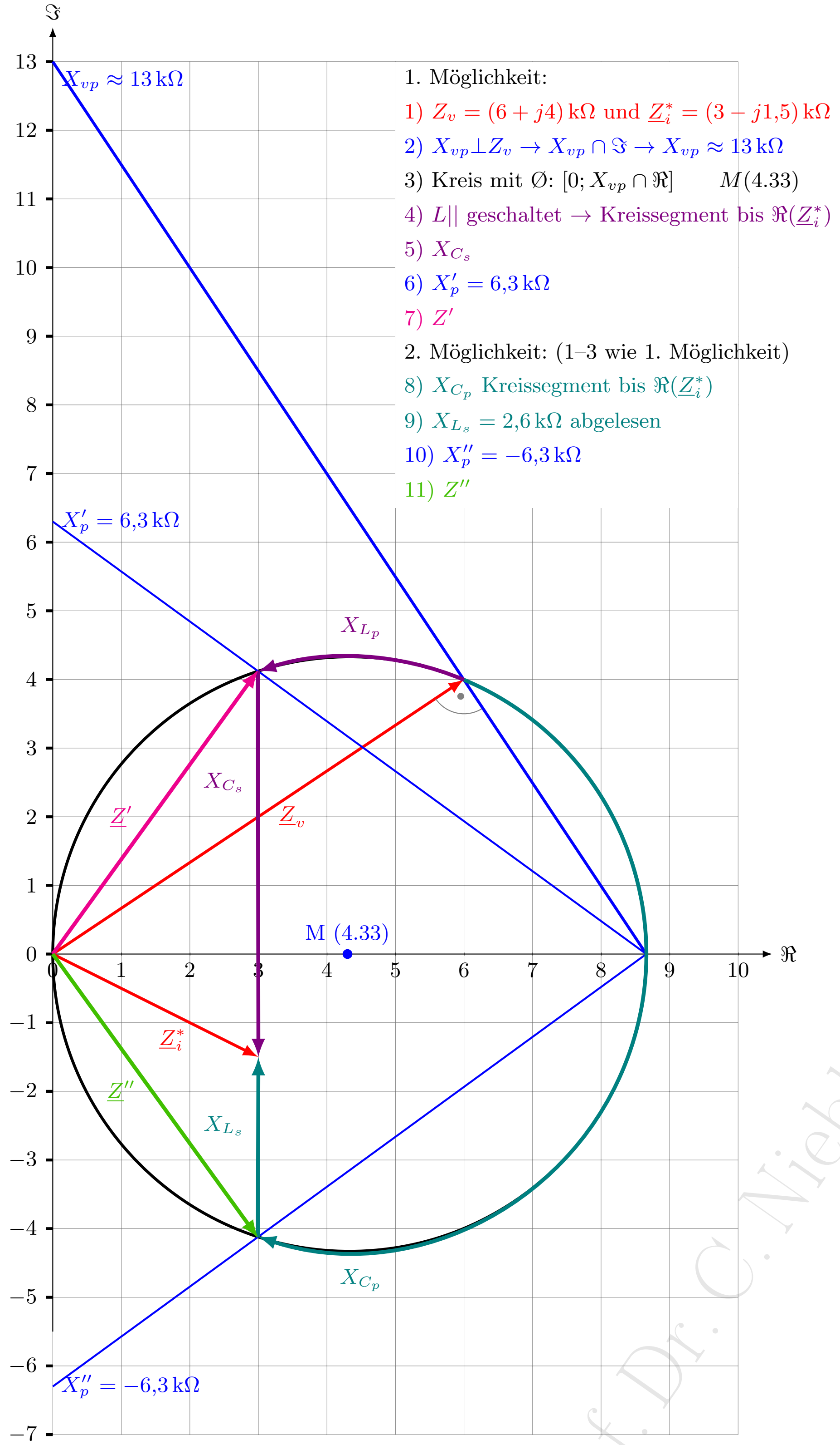
$$\frac{1}{\underline{Z}''_p} = \frac{1}{\underline{Z}_v} + \frac{1}{X_{C_p}}$$

Im weiteren Schritt Zeichnung vervollständigen um X''_p zu bestimmen.

$$\frac{1}{X_{C_p}} = \left(\overbrace{\frac{1}{-6{,}3\,\mathrm{k\Omega}}}^{1/X''_p} - \overbrace{\frac{1}{13\,\mathrm{k\Omega}}}^{1/X_{vp}} \right)$$

$$X_{L_s} = \underline{\underline{+2{,}6\,\mathrm{k\Omega}}}$$

$$X_{C_p} = \underline{\underline{-4{,}2\,\mathrm{k\Omega}}}$$


1. Möglichkeit:
1) $Z_v = (6 + j4)\,\mathrm{k\Omega}$ und $\underline{Z}_i^* = (3 - j1{,}5)\,\mathrm{k\Omega}$
2) $X_{vp} \perp Z_v \rightarrow X_{vp} \cap \Im \rightarrow X_{vp} \approx 13\,\mathrm{k\Omega}$
3) Kreis mit Ø: $[0; X_{vp} \cap \Re]$ $M(4.33)$
4) $L||$ geschaltet $\rightarrow$ Kreissegment bis $\Re(\underline{Z}_i^*)$
5) X_{C_s}
6) $X_p' = 6{,}3\,\mathrm{k\Omega}$
7) Z'
2. Möglichkeit: (1–3 wie 1. Möglichkeit)
8) X_{C_p} Kreissegment bis $\Re(\underline{Z}_i^*)$
9) $X_{L_s} = 2{,}6\,\mathrm{k\Omega}$ abgelesen
10) $X_p'' = -6{,}3\,\mathrm{k\Omega}$
11) Z''
$\Im$
$\Re$
$X_{vp} \approx 13\,\mathrm{k\Omega}$
$X_p' = 6{,}3\,\mathrm{k\Omega}$
$X_p'' = -6{,}3\,\mathrm{k\Omega}$
X_{L_p}
X_{C_s}
$\underline{Z}'$
$\underline{Z}_v$
M (4.33)
$\underline{Z}_i^*$
$\underline{Z}''$
X_{L_s}
X_{C_p}
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

17/6 Brückenschaltung

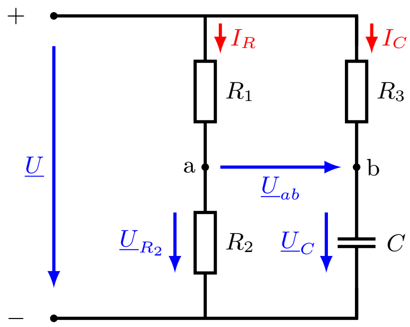
Gegeben:

$R_1 = R_2 = R_3 = |X_C| = 1\,\mathrm{k}\Omega$; $U = 200\,\mathrm{V} \cdot e^{j0^\circ}$

Gesucht:

a) Spannung U_{ab} zwischen den Klemmen $a - b$ nach Betrag und Phasenwinkel.

b) Qualitatives Zeigerdiagramm aller Ströme und Spannungen.
(Qualitativ, d.h. alle Bauteilwerte verschieden)



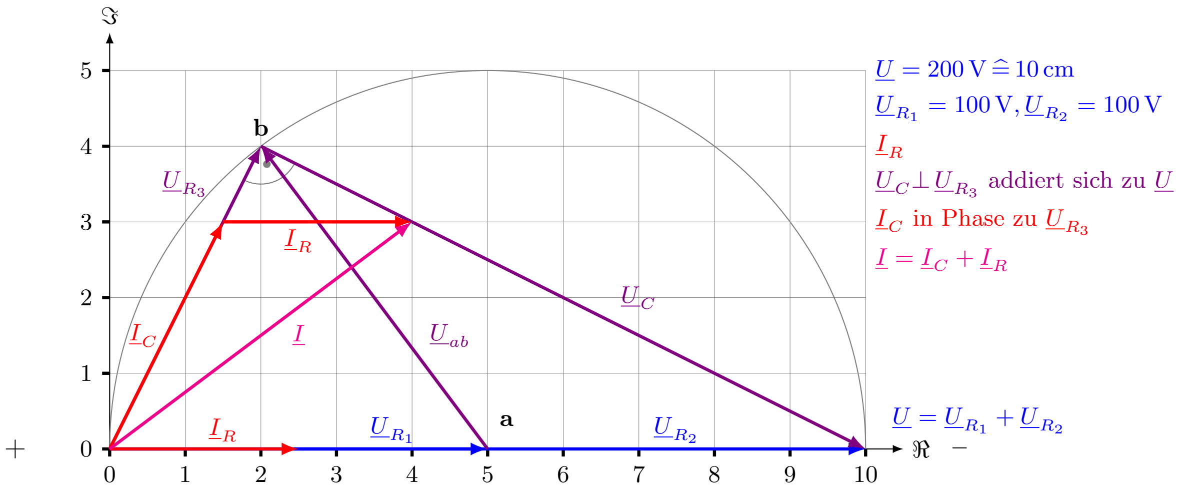
Berechnung: (Platzbedarf in x: 11 cm; in y: 6 cm)
a) Spannung U_{ab}

$$\underline{U}_{ab} + \underline{U}_C - \underline{U}_{R_2} = 0 \qquad \text{Masche}$$
$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{R_2} - \underline{U}_C$$

Spannungsteiler

$$\underline{U}_{R_2} = \underline{U} \cdot \frac{R}{2 \cdot R} = \frac{\underline{U}}{2} = 100\,\mathrm{V}$$
$$\underline{U}_C = \underline{U} \cdot \frac{jX_C}{R + jX_C} = 200\,\mathrm{V} \cdot \frac{-j \cdot 1}{1 - j \cdot 1} = 200\,\mathrm{V}(0{,}5 - j0{,}5) = (100 - j100)\,\mathrm{V}$$
$$\Rightarrow \underline{U}_{ab} = 100\,\mathrm{V} - (100 - j100)\,\mathrm{V} = +j100\,\mathrm{V} = \underline{\underline{100\,\mathrm{V} \cdot e^{+j90^\circ}}}$$

b) Qualitatives Zeigerdiagramm (zu Schaltbild, beliebiges X_C)

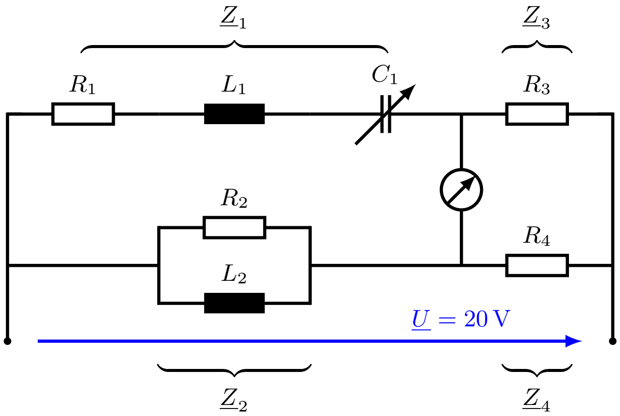


Anmerkung:
Wenn wie angegeben $|X_C| = R \Rightarrow \underline{U}_{R3} \perp \underline{U}_C \Rightarrow$ gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck $\Rightarrow \underline{U}_{ab} \perp \Re$-Achse.

17/7 Wechselstrombrücke

Gegeben ist die dargestellte Wechselstrombrücke, die zum Messen der Größe von R_2 und L_2 dient. Dabei ist $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ und $L_1 = 1\,\mathrm{mH}$.
Die Brücke ist bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ und $C_1 = 2\,\mathrm{nF}$ abgeglichen.

Berechnen Sie R_2 und L_2!



Formeln:

$$R_P = R_S + \frac{X_S^2}{R_S} \tag{17/7.1}$$

$$X_P = X_S + \frac{R_S^2}{X_S} \tag{17/7.2}$$

Berechnung:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} - jX_{C_1} \qquad \underline{Z}_3 = R_3$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 || X_{L_2} \qquad \underline{Z}_4 = R_4$$

Brücke abgeglichen, wenn:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} = \frac{R_3}{R_4} = 1$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}$$

$$= 1\,\mathrm{k\Omega} + j\left(\underbrace{10^6\,\cancel{\mathrm{s}^{-1}} \cdot 10^{-3}\,\Omega\cancel{\mathrm{s}}}_{1\,\mathrm{k\Omega}} - \underbrace{\frac{1}{10^6\,\cancel{\mathrm{s}^{-1}} \cdot 2 \cdot 10^{-9}\,\frac{\cancel{\mathrm{s}}}{\Omega}}}_{\frac{1}{2}\,\mathrm{k\Omega}}\right) = \underline{\underline{(1 + j0{,}5)\,\mathrm{k\Omega}}}$$

Um R_2 und L_2 zu bestimmen, die Reihenschaltung $\underline{Z}_2 = R_{2S} + jX_{2S} = (1 + j0{,}5)\,\mathrm{k\Omega}$ in Parallelwiderstände umrechnen.

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{(1 + j0{,}5)\,\mathrm{k\Omega}} = (\underbrace{0{,}8}_{G_2} - \underbrace{j0{,}4}_{B_{L_2}})\,\mathrm{mS}$$

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = \frac{1}{0{,}8\,\mathrm{mS}} = \underline{\underline{1{,}25\,\mathrm{k\Omega}}}$$

$$X_{L_2} = \frac{-1}{B_{L_2}} = \frac{-1}{-0{,}4\,\mathrm{mS}} = \underline{+2{,}5\,\mathrm{k\Omega}}$$

aus $X_{L_2} = \omega \cdot L \Rightarrow$

$$L_2 = \frac{X_{L_2}}{\omega} = \frac{2{,}5\,\mathrm{k\Omega}}{10^6 \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{2{,}5\,\mathrm{mH}}}$$

Alternativ mit Formeln 17/7.1 und 17/7.2

$$R_{2P} = R_{2S} + \frac{X_{2S}^2}{R_{2S}}$$

$$X_{2P} = X_{2S} + \frac{R_{2S}^2}{X_{2S}}$$

$$R_2 = R_{2S} + \frac{X_{2S}^2}{R_{2S}} = (1 + \frac{0{,}5^2}{1})\,\mathrm{k\Omega} = 1{,}25\,\mathrm{k\Omega}$$

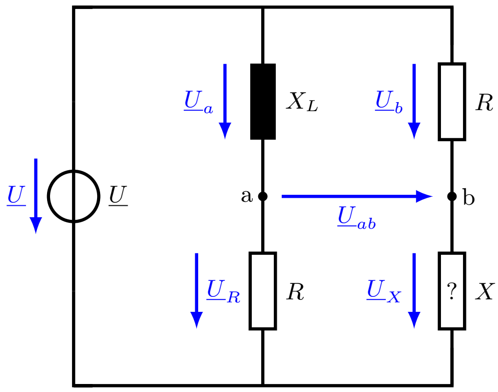
$$X_{L_2} = X_{2S} + \frac{R_{2S}^2}{X_{2S}} = (0{,}5 + \frac{1^2}{0{,}5})\,\mathrm{k\Omega} = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$$

17/8 Wechselstrombrücke

a) Zustand abgeglichenen Brücke ($\mathbf{U_{ab} = 0}$)
Welches Bauteil muss fur X eingesetzt werden, um diese Voraussetzung zu erfüllen?
Berechnen Sie den Wert des Bauteils als Funktion von R und X_L.

b) Zustand nicht abgeglichene Brücke: ($\mathbf{U_{ab} \neq 0}$)

Zeichnen Sie ein qualitatives Zeigerdiagramm aller eingezeichneten Spannungen
(Bezug $\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$), so dass $\underline{U}_{ab}$ auf $\underline{U}$ senkrecht steht (rechte Winkel müssen gekennzeichnet werden).
Welches Bauteil muss fur X eingesetzt werden, um diese Voraussetzung zu erfüllen?
Berechnen Sie den Wert dieses Bauteils als Funktion von R und X_L anhand der Beziehung zwischen den Zeigerlängen.



Berechnung: (Platzbedarf in x: 9 cm; in y: ±5 cm)

a) Zum Brückenabgleich muß X eine Kapazität sein.

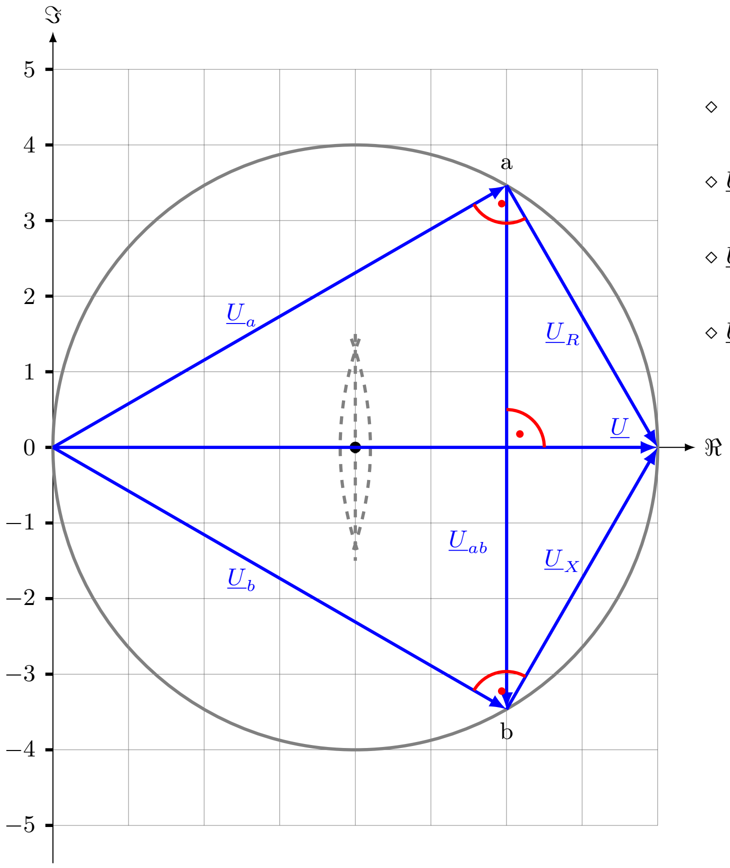
Abgleichbedingung:

$$\frac{jX_L}{R} = \frac{R}{jX_C}$$

$$X = \underline{\underline{-\frac{R^2}{X_L}}} \qquad \text{neg. VZ} \Rightarrow \text{Kapazität } X = X_C$$

$$-\frac{1}{j\omega C} = -\frac{R^2}{j\omega L} \Rightarrow \quad \text{oder} \quad C = \frac{L}{R^2}$$

b) Bedingung: $\underline{U}_{ab} \perp \underline{U}$; gleiche Zeigerlängen.



- ⋄ $\underline{U}$
  Thaleskreis, da $\underline{U}_q \perp \underline{U}_R$ und $\underline{U}_b \perp \underline{U}_X$
- ⋄ $\underline{U}_a + \underline{U}_R = \underline{U}$
  $\underline{U}_a$ und $\underline{U}_R$ zeichnen
- ⋄ $\underline{U}_a + \underline{U}_{ab} - \underline{U}_b = 0$ und $\underline{U}_{ab} \perp \underline{U}$
  $\underline{U}_{ab}$ und $\underline{U}_b$ zeichnen
- ⋄ $\underline{U}_b + \underline{U}_X = \underline{U}$
  $\underline{U}_X$ zeichnen

Bei der nicht abgeglichenen Brücke mit der Bedingung $\underline{U}_{ab} \perp \underline{U}$, muss X eine Induktivität sein.

Rechnerisch:

$$|U_a| = |U_b| \Rightarrow |X_L \cdot I_a| = |R \cdot I_b| \tag{1}$$

$$|U_R| = |U_X| \Rightarrow |R \cdot I_a| = |X \cdot I_b| \tag{2}$$

$$\frac{X_L}{R} = \frac{R}{X} \tag{1:2}$$

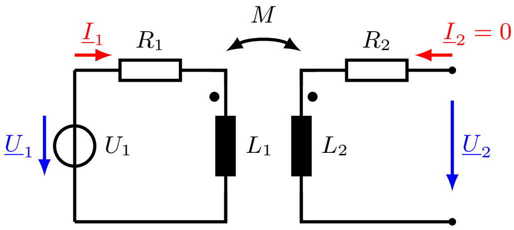
$$X = \underline{\underline{+\frac{R^2}{X_L}}}$$

18/1 Übertrager im Leerlauf

$U_1 = 230\,\text{V}$, $R_1 = 5\,\Omega$, $I_1 = 10\,\text{A}$, $U_2 = 100\,\text{V}$
ausgangsseitiger Leerlauf

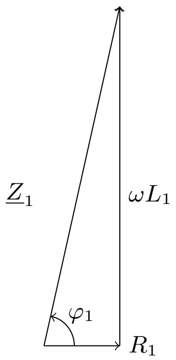
a) Berechnen Sie den Eigangswiderstand $\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ nach Betrag und Phase sowie die aufgenommene Wirk- und Blindleistung.

b) Berechnen sie ωL_1, ωL_2 und ωM unter Annahme einer idealen Kopplung.



Berechnung:

a) Komplexer Eingangswiderstand
Begriffe:
$\underline{Z}$ Impedanz oder komplexer Widerstand
$Z = |\underline{Z}|$ Scheinwiderstand



$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{230\,\text{V}}{10\,\text{A}} = 23\,\Omega$$

mit $R_1 = Z_1 \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow$

$$\varphi_1 = \arccos\frac{R_1}{Z_1} = \arccos\frac{5\,\Omega}{23\,\Omega} = 77{,}44\,^\circ$$

$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \underline{\underline{23\,\Omega \cdot e^{j77{,}44\,^\circ}}}$$

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 = 230\,\text{V} \cdot 10\,\text{A} \cdot \cos(77{,}44\,^\circ) = \underline{\underline{500\,\text{W}}}$$

$$Q = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 = 230\,\text{V} \cdot 10\,\text{A} \cdot \sin(77{,}44\,^\circ) = \underline{\underline{2245\,var}}$$

$$\text{oder } \underline{S} = P + jQ = \frac{U_1^2}{\underline{Z}_1} = \frac{(230\,\text{V})^2}{23\,\Omega \cdot e^{j77{,}44\,^\circ}} = (\underbrace{500}_{P} - j\underbrace{2245}_{Q})\,\text{VA}$$

b) Blindwiderstände und Kopplungswiderstand
Begriffe:
L Selbstinduktivität
M Gegeninduktivität
$X_L = \omega L$ Reaktanz oder Blindwiderstand
$X_M = \omega M$ Kopplungswiderstand

$$\omega L_1 = Z_1 \cdot \sin\varphi_1 = 23\,\Omega \cdot \sin(77{,}44\,^\circ) = \underline{\underline{22{,}45\,\Omega}}$$

$$U_2 = \omega M \cdot I_1 \Rightarrow$$

$$\omega M = \frac{U_2}{I_1} = \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{10\,\Omega}}$$

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$$\omega M = \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}$$

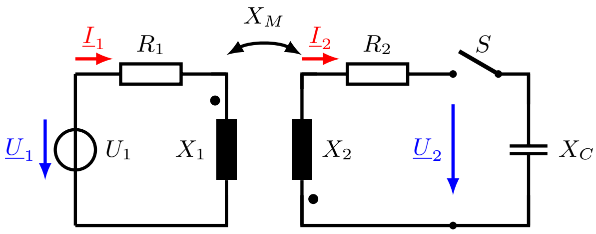
$$\Rightarrow \omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{\omega L_1} = \frac{(10\,\Omega)^2}{22{,}45\,\Omega} = \underline{\underline{4{,}45\,\Omega}}$$

18/2 Übertrager mit kapazitiver Last

Von nebenstehender Schaltung ist gegeben:
$\underline{U}_1 = 1\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ}$, $R_1 = 10\,\Omega$, $X_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $X_2 = 400\,\Omega$, $X_C = -200\,\Omega$, $X_M = 40\,\Omega$

Gesucht

a) Spannung $\underline{U}_2$ nach Betrag und Phase bei offenem Schalter S.
b) Spannung $\underline{U}_2$ nach Betrag und Phase bei geschlossenem Schalter S.
c) Größe und Richtung der über das Magnetfeld übertragenen Wirkleistung für den Fall b).



Berechnung:

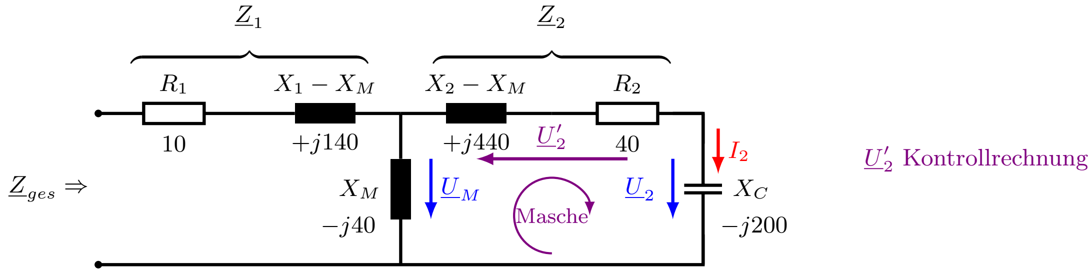
a) Offener Schalter

$$\underline{I}_2 = 0$$

Wegen Wicklungssinn $\underline{U}_2$ negativ (bzw. X_M negativ)

$$\underline{U}_2 = jX_M \cdot \underline{I}_1 = jX_M \cdot \frac{\underline{U}_1}{R + jX_1} = \frac{(-j40\cancel{\Omega}) \cdot 1\,\mathrm{V}}{(10 + j100)\cancel{\Omega}} = (0{,}396 - j0{,}04)\,\mathrm{V}$$
$$= \underline{\underline{0{,}398\,\mathrm{V} \cdot e^{-j174{,}3\,^\circ}}}$$

b) Ersatzschaltbild: Schalter geschlossen



$$\underline{Z}' = \overbrace{(40 + j240)\,\Omega}^{} = 243{,}3\,\Omega \cdot e^{j80{,}5\,^\circ}$$

$$\underline{Z}_{||} = \frac{(-j40)\cdot(40+j240)}{40+j200}\,\Omega = \overbrace{(1{,}54 - j47{,}7)\,\Omega}^{} = 47{,}72\,\Omega \cdot e^{-j88{,}2\,^\circ}$$

$$\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{||} = (11{,}54 + j92{,}3)\,\Omega = 93{,}03\,\Omega \cdot e^{j82{,}87\,^\circ}$$

Spannungsteiler

$$\underline{U}_M = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{||}}{\underline{Z}_{ges}} = 1\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ} \cdot \frac{47{,}72\,\Omega \cdot e^{-j88{,}2\,^\circ}}{93{,}03\,\Omega \cdot e^{j82{,}87\,^\circ}} = (-0{,}51 - j0{,}08)\,\mathrm{V} = 0{,}51\,\mathrm{V} \cdot e^{-j171{,}1\,^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_M \cdot \frac{jX_C}{\underline{Z}'} = 0{,}51\,\mathrm{V} \cdot e^{-j171{,}1\,^\circ} \cdot \frac{200\,\Omega \cdot e^{-j90\,^\circ}}{243{,}3\,\Omega \cdot e^{j80{,}5\,^\circ}}$$
$$= (0{,}4 + j0{,}13)\,\mathrm{V} = \underline{\underline{0{,}42\,\mathrm{V} \cdot e^{+j18{,}4\,^\circ}}}$$

c) Wirkleistung

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{jX_C} = \frac{0{,}42\,\mathrm{V} \cdot e^{+j18{,}4\,^\circ}}{-j200\,\Omega} = 2{,}108\,\mathrm{mA} \cdot e^{+j108{,}4\,^\circ} = (-0{,}666 + j2)\,\mathrm{mA}$$
$$P_2 = (2{,}108\,\mathrm{mA})^2 \cdot 40\,\Omega = 1{,}78 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W} = \underline{\underline{178\,\mu\mathrm{W}}}$$

Von Primär- nach Sekundärseite

Alternativ, in 2 Schritten

$$U_{R_2} = I_2 \cdot R_2 = 2{,}108\,\mathrm{mA} \cdot 40\,\Omega = 84{,}32\,\mathrm{mV}$$
$$P_2 = U_{R_2} \cdot I_2 = 84{,}32\,\mathrm{mV} \cdot 2{,}108\,\mathrm{mA} = 178\mu\mathrm{W}$$

Kontrolle: (über das Magnetfeld übertragenen Wirkleistung)

$$\underline{U}_2' = \underline{U}_2 - \underline{U}_M = (0{,}4 + j0{,}13) - (-0{,}51 - j0{,}08))\,\mathrm{V} = (0{,}91 + j0{,}21)\,\mathrm{V} = 0{,}932\,\mathrm{V} \cdot e^{j13{,}22\,^\circ}$$

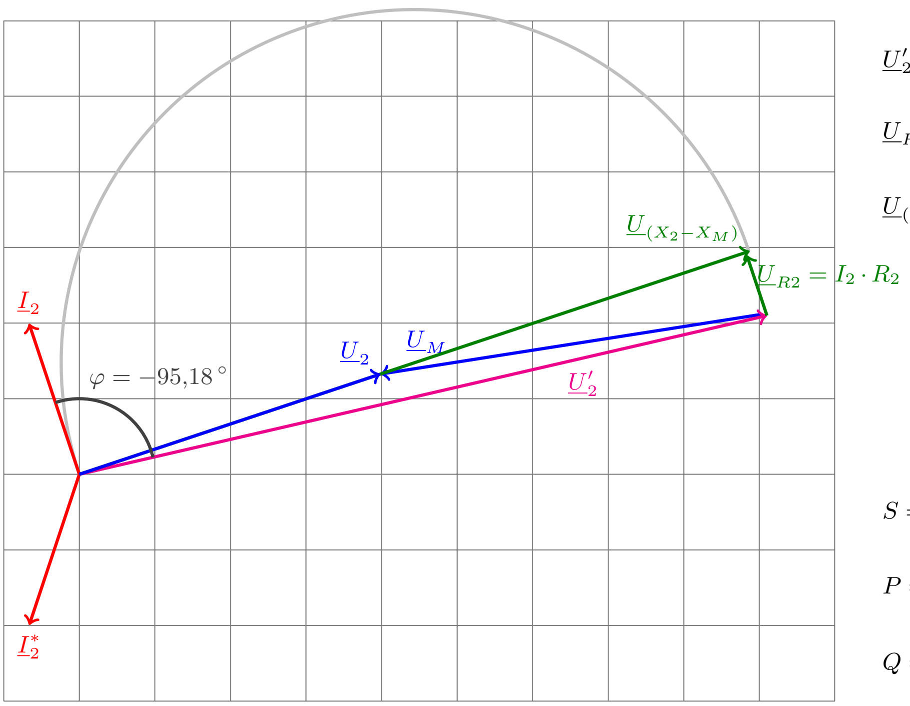
oder auch aus den Impedanzen berechnet

$$\underline{U}_2' = -\underline{I}_2 \cdot [R_2 + (\underline{X}_2 - \underline{X}_M)] = -(-0{,}666 + j2)\,\mathrm{mA} \cdot (40 + j440)\,\Omega$$
$$= (0{,}907 + j0{,}213)\,\mathrm{V} = 0{,}932\,\mathrm{V} \cdot e^{j13{,}22\,^\circ}$$

mit $S_2 = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_2^*$

$$P_2 = \Re\{\underline{U}_2' \cdot \underline{I}_2^*\}$$
$$= \Re\{(0{,}91 + j0{,}21)\,\mathrm{mV} \cdot (-0{,}666 - j2) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\} \quad \text{Rechtwinklige Koordinaten oder}$$
$$= \Re\{0{,}932\,\mathrm{V} \cdot e^{j13{,}22\,^\circ} \cdot 2{,}108\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j108{,}4\,^\circ}\} \quad \text{Polar Koordinaten}$$
$$= \Re\{1{,}965 \cdot e^{-j95{,}18\,^\circ}\}\,\mu\mathrm{VA} = \Re\{\underbrace{-177{,}4}_{\text{EPS}\rightarrow\text{Verbraucher}} \quad -j1{,}957\}\,\mu\mathrm{VA}$$

Erzeuger-Pfeil-System (EPS)



$\underline{U}_2' = \underline{U}_2 - \underline{U}_M = 0{,}932 \cdot \mathrm{V} \cdot e^{j13{,}22\,^\circ}$

$\underline{U}_{R_2} \quad || \quad \underline{I}_2$

$\underline{U}_{(X_2-X_M)} \quad || \quad \underline{U}_2 \quad \perp \quad \underline{I}_2$

$S = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_2^* = 1965\,\mu\mathrm{VA}$

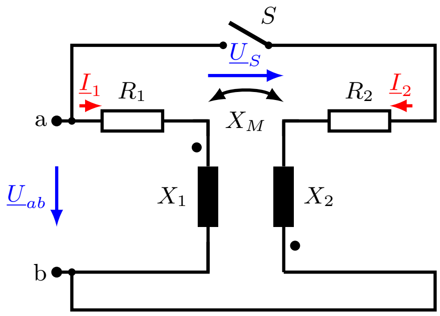
$P = S \cdot \cos(-95{,}18\,^\circ) = -177\mu\mathrm{W}$

$Q = S \cdot \sin(-95{,}18\,^\circ) = -1957\mu\mathrm{VA}r$

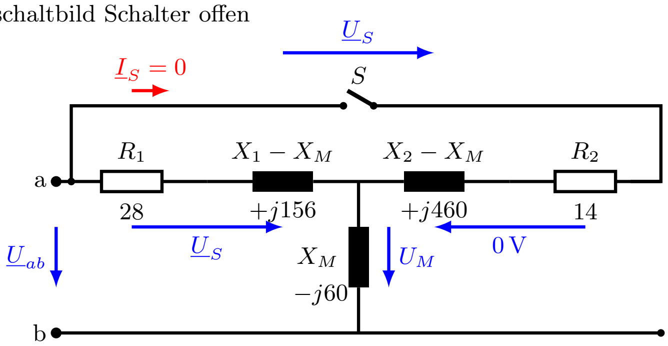
18/3 Übertrager mit Verbindung zum Eingang

Gegeben sind die Daten des abgebildeten Kreises:
$R_1 = 28\,\Omega$, $X_1 = 96\,\Omega$, $R_2 = 14\,\Omega$, $X_M = 60\,\Omega$, $X_2 = 400\,\Omega$, $\underline{I}_1 = 2\,\mathrm{A} \cdot e^{j0\,^\circ}$
Gesucht

a) Spannung $\underline{U}_{ab}$ nach Betrag und Phase bei offenem Schalter S.
b) Spannung $\underline{U}_S$ nach Betrag und Phase bei offenem Schalter S.
c) Strom $\underline{I}_2$ und Spannung $\underline{U}_{ab}$ nach Betrag und Phase bei geschlossenem Schalter S.
d) Größe und Richtung der über das Magnetfeld übertragenen Wirkleistung bei geschlossenem Schalter S.



Berechnung: Ersatzschaltbild Schalter offen



a) Spannung $\underline{U}_{ab}$ Schalter offen

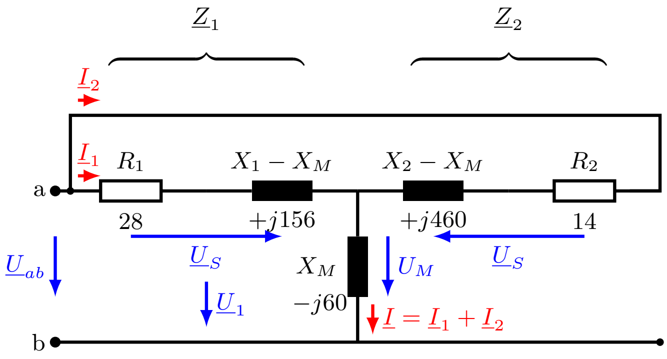
$$\underline{U}_{ab} = [R_1 + j(X_1 - \cancel{X_M} + \cancel{X_M})] \cdot \underline{I}_1 = (28 + j96)\,\Omega \cdot 2\,\mathrm{A} = (56 + j192)\,\mathrm{V}$$
$$= \underline{\underline{200\,\mathrm{V} \cdot e^{j73{,}74\,^\circ}}}$$

b) Spannung $\underline{U}_S$ Schalter offen

Wegen gegensinnigem Wicklungssinn $X_M = -60\,\Omega$

$$\underline{U}_S = [R_1 + j(X_1 - X_M)] \cdot \underline{I}_1 = (28 + j156)\,\Omega \cdot 2\,\mathrm{A} = (56 + j312)\,\mathrm{V}$$
$$= \underline{\underline{317\,\mathrm{V} \cdot e^{j79{,}8\,^\circ}}}$$

c) Strom $\underline{I}_2$ und Spannung $\underline{U}_{ab}$: Schalter geschlossen:



Entweder Stromteiler oder, weil Strom $\underline{I}_1$ wie in b)

$$\underline{U}_S = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 2\,\mathrm{A} \cdot e^{j0\,^\circ} \cdot \frac{(28 + j156)\,\Omega}{(14 + j460)\,\Omega}$$

$$= (0{,}681 - j0{,}101)\,\mathrm{A} = \underline{\underline{0{,}689\,\mathrm{A} \cdot e^{-j8{,}43\,^\circ}}}$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_S + \underline{U}_M$$

$$= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + jX_M \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$= (56 + j312)\,\mathrm{V} + \underbrace{\overbrace{(2 + 0{,}681 - j0{,}101)\,\mathrm{A}}^{\underline{I}} \cdot (-j60)\,\Omega}_{\underline{U}_M = (-6{,}06 - j160{,}81)\,\mathrm{V}}$$

$$= (50 + j151)\,\mathrm{V} = \underline{\underline{159\,\mathrm{V} \cdot e^{+j71{,}7\,^\circ}}}$$

d) Wirkleistung (über das Magnetfeld übertragen)

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = [\underline{I}_1 \cdot j(X_1 - X_M) + \underbrace{\underline{I} \cdot jX_M}_{\underline{U}_M}] \cdot \underline{I}_1^*$$

$$= \underbrace{[\underbrace{2\,\mathrm{A} \cdot j156\,\Omega}_{j312\,\mathrm{V}} + (-6{,}1 - j161)\,\mathrm{V}]}_{(-6{,}1 + j151)\,\mathrm{V}} \cdot 2\,\mathrm{A} = \underline{\underline{(\overbrace{-12{,}2}^{\text{Quelle}} + j302)\,\mathrm{VA}}}$$

$P = \underline{\underline{12{,}2\,\mathrm{W}}}$ Von Sekundär- nach Primärseite

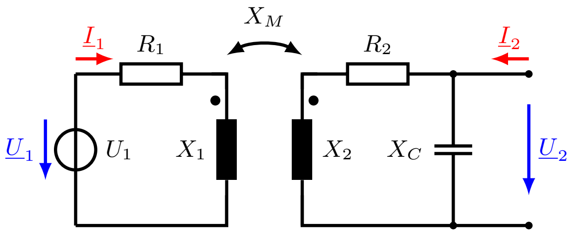
Kontrolle:

$$\underline{S}_2 = (\underline{U}_M + \underline{I}_2 \cdot j460\,\Omega) \cdot \underline{I}_2^* = (12{,}1 + j108)\,\mathrm{VA}$$

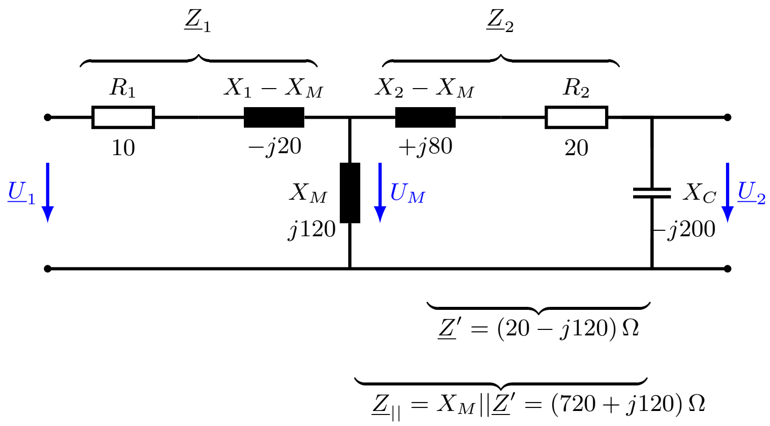
$(P_2 = 12{,}1\,\mathrm{W}$ Verbraucher$)$

18/4 Impedanzmatrix

Geben Sie die Impedanzmatrix (Z) des Vierpols an.
$R_1 = 10\,\Omega$, $X_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $X_2 = 200\,\Omega$, $X_C = -200\,\Omega$, $X_M = 120\,\Omega$



Berechnung:
Umwandlung in T-Ersatzschaltbild



$\underline{Z}_1 = (10 - j20)\,\Omega \qquad \underline{Z}_2 = (20 + j80)\,\Omega$

$\underline{Z}' = (20 - j120)\,\Omega \qquad \underline{Z}_{||} = X_M || \underline{Z}' = \dfrac{j120 \cdot (20 - j120)}{\cancel{j120} + 20 - \cancel{j120}}\,\Omega = (720 + j120)\,\Omega$

Vierpol:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\
\underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \\
\underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\Big|_{\underline{I}_2=0} \\
&= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{||} = \underline{\underline{(730 + j100)\,\Omega}} \\
\underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{\underline{I}_1=0}
\end{aligned}$$

$\underline{I}_1 = 0 \Rightarrow$ Leerlauf an Primärseite; Spannung an $\underline{U}_M = \underline{U}_1$

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{X_M} &= \underline{I}_2 \cdot \frac{jX_C}{R_2 + j(X_2 - \cancel{X_M}) + \cancel{jX_M} + jX_C} \quad (\text{ Stromteiler}) \\
\underline{U}_1 &= jX_M \cdot \underline{I}_{X_M} = \underline{I}_2 \cdot \underbrace{jX_M \cdot \frac{jX_C}{R_2 + j(X_2 + X_C)}}_{\underline{Z}_{12}} \\
\underline{Z}_{12} &= \frac{-X_M \cdot X_C}{R_2 + j(X_2 + X_C)} = \frac{-120 \cdot (-200)}{20 - j0}\,\Omega = \underline{\underline{+1200\,\Omega}} \\
\underline{Z}_{21} &= \underline{\underline{\underline{Z}_{12}}} \\
\underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\Big|_{\underline{I}_1=0} \\
&= jX_C||(\underline{Z}_2) + jX_M) = \frac{-j200 \cdot (20 + j(80 + 120))}{20 + \underbrace{j(80 + 120 - 200)}_{=0}}\,\Omega = \underline{\underline{(2000 - j200)\,\Omega}}
\end{aligned}$$

Impedanzmatrix:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} 730 + j100 & 1200 \\ 1200 & 2000 - j200 \end{bmatrix} \Omega$$

18/5 Netztransformator

Von einem Netztransformator sind folgende Daten gegeben:

Primärspannung $U_1 = 230\,\text{V}$; Frequenz $f = 50\,\text{Hz}$;
Primärwindungszahl $N_1 = 784$ Windungen.

Induktivität der Primärwicklung $L_1 = 5{,}66\,\text{H}$;
Induktivität der Sekundärwicklung $L_2 = 1{,}42\,\text{H}$;

Widerstand der Primärwicklung $R_1 = 800\,\Omega$;
Widerstand der Sekundärwicklung $R_2 = 150\,\Omega$.

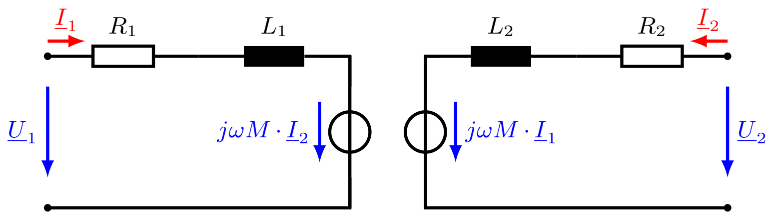
Eisenquerschnitt $A_{Fe} = 11\,\text{cm}^2$. Das Feld ist über dem Querschnitt A_{Fe} homogen, die Streuung ist Null!

a) Welche Spannung U_2 tritt an der Sekundärwicklung auf, wenn sie unbelastet ist, d.h. $I_2 = 0$ ist?

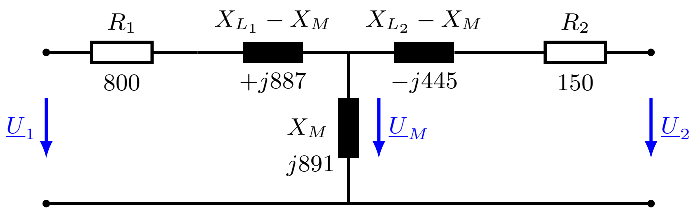
b) Welchen Strom nimmt der Transformator bei sekundärseitigem Leerlauf auf?

c) Welche Flussdichte $\widehat{B}_{Fe}$ tritt bei sekundärseitigem Leerlauf im Eisen auf?

Berechnung:



Ersatzschaltbild



a) Spannung U_2

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega \cdot L_1) + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot (R_2 + j\omega \cdot L_2) + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1$$

Hinweis: Es kann auch $X_{L_1} = \omega \cdot L_1$ bzw. $X_M = \omega \cdot M$ verwendet werden.

mit $\underline{I}_2 = 0$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega \cdot L_1)$$
$$\underline{U}_2 = j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega \cdot M}{R_1 + j\omega \cdot L_1}$$
$$U_2 = U_1 \cdot \frac{\sqrt{(\omega \cdot M)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}} \qquad (\text{Betrag: } U_2 = |\underline{U}_2|) \qquad (1)$$

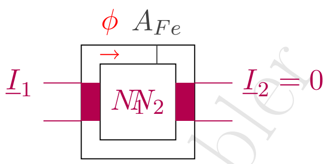
$$\text{Streuung ist Null } \Rightarrow \text{Kopplungsfaktor } K = 1 = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$
$$\Rightarrow M = \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{5{,}66 \cdot 1{,}42}\,\mathrm{H} = 2{,}835\,\mathrm{H}$$
$$X_{L_1} = \omega \cdot L_1 = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\cancel{s^{-1}} \cdot 5{,}66\,\mathrm{V}\cancel{s}/\mathrm{A} = 1{,}778\,\mathrm{k\Omega} \quad (\text{Zur Vollständigkeit } X_{L_2} = 446\,\Omega)$$
$$X_M = \omega \cdot M = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\cancel{s^{-1}} \cdot 2{,}835\,\mathrm{V}\cancel{s}/\mathrm{A} = 891\,\Omega$$
$$\text{aus (1): } \Rightarrow U_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + X_{L_1}^2}} = 230\,\mathrm{V} \cdot \frac{891}{\sqrt{800^2 + 1778^2}} = \underline{\underline{105{,}1\,\mathrm{V}}}$$

b) Stromaufnahme bei Leerlauf

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}$$
$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + X_{L_1}^2}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{\sqrt{800^2 + 1778^2}} \frac{1}{\Omega} = \underline{\underline{118\,\mathrm{mA}}} \quad (\text{Betrag})$$

c) Flussdichte, Sekundärspule spielt keine Rolle bei $I_2 = 0$

$$\psi = L_1 \cdot i = N_1 \cdot \phi = N_1 \cdot B \cdot A$$
$$B = \frac{L_1 \cdot i}{N_1 \cdot A}$$
$$\widehat{B} = \frac{L_1 \cdot \widehat{I}}{N_1 \cdot A_{Fe}} = \frac{5{,}66\,\mathrm{Vs}/\cancel{\mathrm{A}} \cdot \sqrt{2} \cdot 118 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{A}}}{784 \cdot 11 \cdot \underbrace{10^{-4}}_{(10^{-2})^2}\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{1{,}095\,\mathrm{T}}}$$



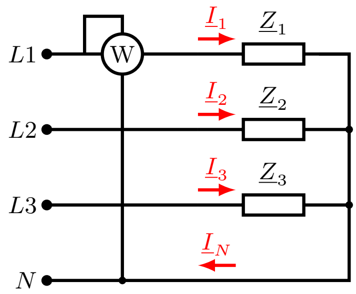
Bemerkung:

$$U_{L_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot N_1 \cdot \widehat{B} \cdot A_{Fe} = I_1 \cdot \omega \cdot L_1 = 209{,}7\,\mathrm{V}$$
$$\widehat{B} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot \frac{U_1}{N_1 \cdot A_{Fe}} = 1{,}2\,\mathrm{T} \text{ ist falsch, gilt nur für idealen Transformator!}$$

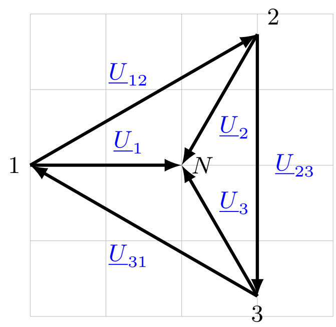
Warum? Hier ist der Widerstand R_1 nicht berücksichtigt!
Rechnung oben nur mit Beträgen, nicht im Komplexen.
$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R_1} + \underline{U}_{L_1} = (94{,}4 + j209{,}7)\,\mathrm{V} = 230\,\mathrm{V} \cdot e^{-j114{,}3}$

18/6 3-Phasen Spannungssystem

Ein symmetrisches 3-Phasen Spannungssystem mit der Phasenlage 1-2-3 speist einen unsymmetrischen Verbraucher mit den Impedanzen
$\underline{Z}_1 = R_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2}$; $\underline{Z}_3 = jX_{L3}$;
$U_{12} = 400\,\text{V} \cdot e^{j30°}$; $R_2 = 50\,\Omega$; $X_{L2} = 30\,\Omega$; $X_{L3} = 25\,\Omega$
Der Leistungsmesser zeigt 1323 W an. Berechnen Sie den Strom $\underline{I}_N$.



Berechnung:



$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad \text{(Um Ströme zu berechnen, Spannungen ermitteln)}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}} = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{3}} = 230{,}9\,\text{V} \cdot e^{j0\,°}$$

$$\underline{U}_2 = 230{,}9\,\text{V} \cdot e^{-j120\,°}$$

$$\underline{U}_3 = 230{,}9\,\text{V} \cdot e^{+j120\,°}$$

$$P_{Anzeige} = I_1 \cdot U_1 \cdot \cos(\varphi_1) \qquad \text{mit } \varphi_1 = 0, \text{ da } \underline{Z}_1 = R_1$$

$$I_1 = \frac{P_{Anzeige}}{U_1} = \frac{1323\,\text{W}}{230{,}9\,\text{V}} = 5{,}73\,\text{A} \qquad \Rightarrow \underline{I}_1 = (5{,}73 + j0)\,\text{A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230{,}9\,\text{V} \cdot e^{-j120\,°}}{(50 + j30)\,\Omega} = \frac{230{,}9\,\text{V} \cdot e^{-j120\,°}}{58{,}31\,\Omega \cdot e^{j30{,}96\,°}} = 3{,}96\,\text{A} \cdot e^{-j150{,}96\,°} = (-3{,}463 - j1{,}923)\,\text{A}$$

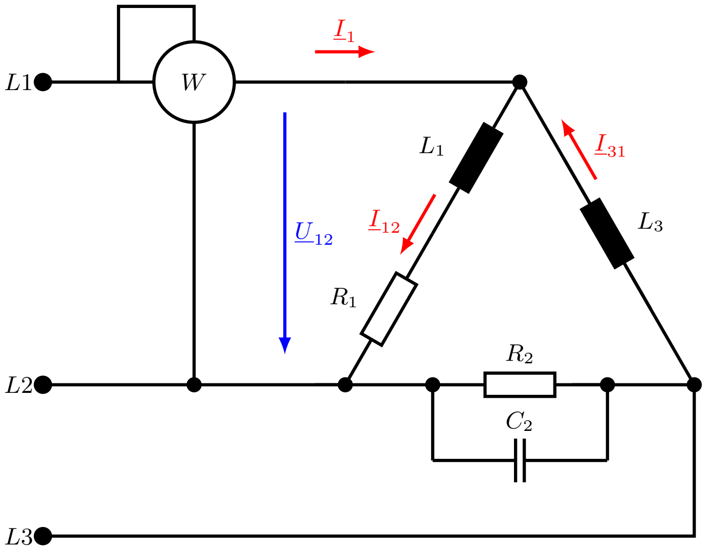
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230{,}9\,\text{V} \cdot e^{j120\,°}}{25\,\Omega \cdot e^{j90\,°}} = 9{,}24\,\text{A} \cdot e^{j30\,°} = (8 + j4{,}62)\,\text{A}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (10{,}3 + j2{,}7)\,\text{A} = \underline{\underline{10{,}6\,\text{A} \cdot e^{j14{,}7\,°}}}$$

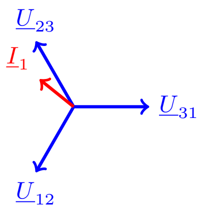
18/7 3-Phasen System mit unsymmetrischem Verbraucher

Ein symmetrisches 3-Phasen System mit der Phasenlage 1-2-3 speist einen unsymmetrischen Verbraucher.
Gegeben sind:
$\underline{U}_{31} = 380\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ}$; $R_1 = 60\,\Omega$; $\underline{X}_{L_1} = 20\,\Omega$; $R_2 = 100\,\Omega$; $\underline{X}_{C_2} = -80\,\Omega$; $X_{L_3} = 50\,\Omega$;

Es ist die Anzeige des Leistungsmessinstrumentes zu berechnen!



Berechnung:



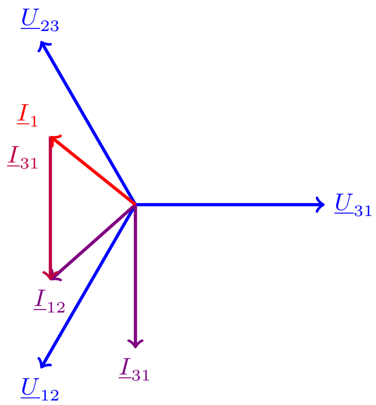
$$\underline{U}_{31} = 380\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ}$$
$$\underline{U}_{12} = 380\,\mathrm{V} \cdot e^{-j120\,^\circ}$$

$$P = \Re\{\underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^*\}$$
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{R_1 + jX_{L_1}} = \frac{\overbrace{380\,\mathrm{V} \cdot e^{-j120\,^\circ}}^{(-190-j329{,}09)\,\mathrm{V}}}{\underbrace{63,246\,\Omega \cdot ^{j18{,}435\,^\circ}}_{(60+j20)\,\Omega}} = 6{,}01\,\mathrm{A} \cdot e^{-j138{,}4\,^\circ} = (-4{,}495 - j3{,}986)\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{jX_{L_3}} = \frac{380\,\mathrm{V} \cdot e^{j0\,^\circ}}{j50\,\Omega} = -j\frac{380\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = -j7{,}6\,\mathrm{A} \qquad (\tfrac{1}{j} = -j)$$

$$\underline{I}_1 = [(-4{,}495 - j3{,}986) - (-j7{,}6)]\,\mathrm{A}$$
$$= (-4{,}495 + j3{,}614)\,\mathrm{A} = 5{,}77\,\mathrm{A} \cdot e^{j141{,}2\,^\circ}$$



$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^* = \underbrace{380\,\mathrm{V} \cdot e^{-j120\,^\circ}}_{(-190-j329{,}09)\,\mathrm{V}} \cdot \underbrace{5{,}77\,\mathrm{A} \cdot e^{-j141{,}2\,^\circ}}_{(-4{,}495-j3{,}614)\,\mathrm{A}}$$

$$= 2192{,}6\,\mathrm{VA} \cdot e^{j98{,}8\,^\circ} = (\underbrace{-335{,}28}_{P} + \underbrace{j2165{,}92}_{jQ})\,\mathrm{VA}$$

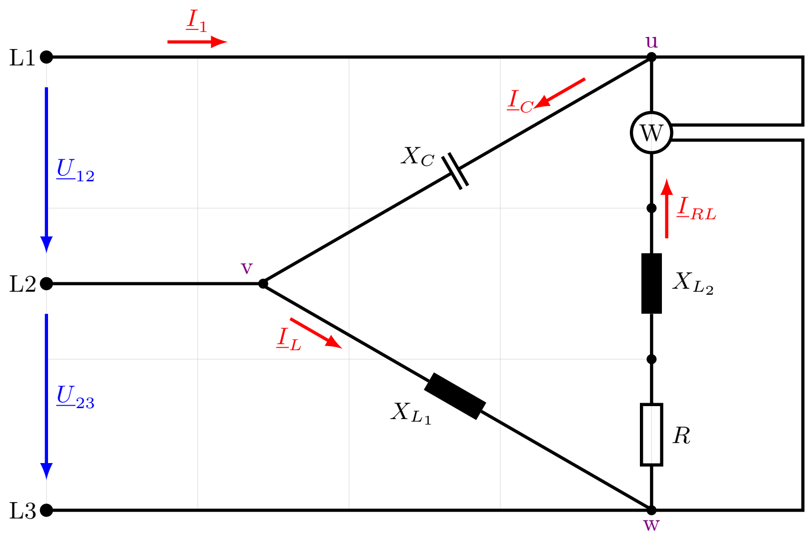
$$P = S \cdot \cos(\varphi) = 2192{,}6\,\mathrm{VA} \cdot \underbrace{\cos(98{,}8\,^\circ)}_{-0{,}153} = \underline{\underline{-335{,}44\,\mathrm{W}}}$$

18/8 Strangströme 3-Phasen System mit unsymmetrischem Verbraucher

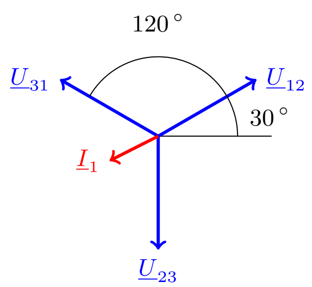
Ein symmetrisches 3-Phasen System mit der Phasenlage 1-2-3 speist einen unsymmetrischen Verbraucher. Gegeben sind:

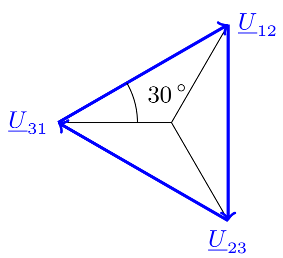
$\underline{U}_{12} = 400\,\mathrm{V} \cdot e^{j30\,^\circ}$; $\underline{X}_C = -100\,\Omega$; $\underline{X}_{L_1} = 125\,\Omega$; $X_{L_2} = 60\,\Omega$; $R = 80\,\Omega$

Berechnen Sie die 3 Strangströme, den Leiterstrom $\underline{I}_1$ und die Anzeige des Leistungsmessers!



Berechnung:





$$\underline{U}_{12} = 400\,\mathrm{V} \cdot e^{j30\,^\circ}$$
$$\underline{U}_{31} = 400\,\mathrm{V} \cdot e^{j150\,^\circ}$$
$$\underline{U}_{31} = 400\,\mathrm{V} \cdot e^{j270\,^\circ} = 400\,\mathrm{V} \cdot e^{-j90\,^\circ}$$

Strangströme:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{12}}{jX_C} = \frac{400\,\mathrm{V} \cdot e^{j30\,^\circ}}{100\,\Omega \cdot e^{-j90\,^\circ}} = \underline{\underline{4\,\mathrm{A} \cdot e^{j120\,^\circ}}} = \underline{\underline{(-2 + j3{,}46)\,\mathrm{A}}}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{23}}{jX_{L_1}} = \frac{400\,\mathrm{V} \cdot e^{-j90\,^\circ}}{125\,\Omega \cdot e^{j90\,^\circ}} = \underline{\underline{3{,}2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j180\,^\circ}}} = -3{,}2\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{RL} = \frac{\underline{U}_{31}}{R + jX_{L_2}} = \frac{400\,\mathrm{V} \cdot e^{j150\,^\circ}}{(80 + j60)\,\Omega} = \frac{400\,\mathrm{V} \cdot e^{j150\,^\circ}}{100\,\Omega \cdot e^{j36{,}9\,^\circ}}$$
$$= \underline{\underline{4\,\mathrm{A} \cdot e^{j113{,}1\,^\circ}}} = \underline{\underline{(-1{,}57 + j3{,}68)\,\mathrm{A}}}$$

Leiterströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_C - \underline{I}_{RL} = (-0{,}439 - j0{,}214)\,\mathrm{A} = \underline{\underline{0{,}48\,\mathrm{A} \cdot e^{-j153\,^\circ}}}$$

Zur Vollständigkeit

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_L - \underline{I}_C = (-1{,}2 - j3{,}46)\,\mathrm{A} = \underline{\underline{3{,}66\,\mathrm{A} \cdot e^{j109{,}1\,^\circ}}}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{RL} - \underline{I}_L = (1{,}63 + j3{,}68))\,\mathrm{A} = \underline{\underline{4{,}03\,\mathrm{A} \cdot e^{j66{,}1\,^\circ}}}$$

Anzeige der Wirkleistung:

$$\begin{aligned} P &= \Re\{\underline{U}_{31} \cdot I_{RL}^*\} \\ &= \Re\{400\,\mathrm{V} \cdot e^{j150\,^\circ} \cdot 4\,\mathrm{A} \cdot e^{-j113{,}1\,^\circ}\} \\ &= \Re\{1600\,\mathrm{VA} \cdot e^{j37\,^\circ}\} \\ &= \Re\{(1280 - j960)\,\mathrm{VA}\} = \underline{\underline{1280\,\mathrm{W}}} \end{aligned}$$

oder

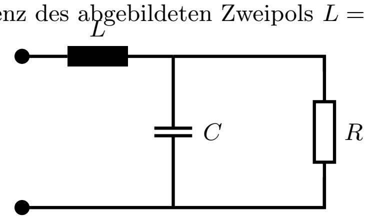
$$P = U_{31} \cdot I_{31} \cdot \cos(\varphi_{31}) = 400\,\mathrm{V} \cdot 4\,\mathrm{A} \cdot \cos(36{,}9\,^\circ) = \underline{\underline{1280\,\mathrm{W}}}$$

oder

$$P = I_{RL}^2 \cdot R = (4\,\mathrm{A})^2 \cdot 80\,\Omega = \underline{\underline{1280\,\mathrm{W}}} \qquad \text{(Betrag von } \underline{I}_{RL}\text{!)}$$

19/1 Resonanzfrequenz Zweipol

Berechnen Sie die Resonanzfrequenz des abgebildeten Zweipols $L = 12\,\mathrm{mH}$, $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $R = 160\,\Omega$



Berechnung:

$$\text{Falsch ist: } f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{12\cdot 10^{-3}\,\Omega\mathrm{s}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{s}}{\Omega}}} = \underline{1027\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

Gilt nur für $R \to \infty$, reine Reihen- oder Parallelschaltung.

Bei Resonanz: $\Im(\underline{Z}) = 0$

$$\underline{Z} = jX_L + (R||jX_C) = j\omega L + \frac{R\cdot\frac{-j}{\omega C}}{R - j\cdot\frac{1}{\omega C}} \underbrace{\cdot\frac{R+j\frac{1}{\omega C}}{R+j\frac{1}{\omega C}}}_{\text{konj. komplex erweitern}} = j\omega L + \frac{R^2\cdot\frac{-j}{\omega C} + R\frac{1}{(\omega C)^2}}{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{R}{(\omega C)^2}}{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}}_{\Re = \text{ Widerstand bei Resonanz, } \omega_{res}} + j\underbrace{\left(\omega L - \frac{R^2}{\omega C\left(R^2+(\frac{1}{\omega C})^2\right)}\right)}_{\Im=0 \text{ bei } \omega_{res}}$$

$$\omega L - \frac{R^2}{\omega C\left(R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}\right)} = 0$$

$$\Im \quad \Rightarrow \omega_{res}\cdot\left[L(\omega_{res}\cdot C\cdot\left(R^2+\frac{1}{(\omega_{res}\cdot C)^2}\right)\right] = R^2$$

$$\omega_{res}^2\cdot L\cdot C\cdot R^2 + \frac{L}{C} = R^2$$

$$\Rightarrow \omega_{res}^2 = \frac{R^2-\frac{L}{C}}{L\cdot C\cdot R^2} = \frac{1}{L\cdot C} - \frac{1}{(R\cdot C)^2} = \frac{1}{12\,\mathrm{mH}\cdot 2\,\mu\mathrm{F}} - \frac{1}{(160\,\Omega\cdot 2\,\mu\mathrm{F})^2}$$

$$= \frac{1}{12\cdot 10^{-3}\cancel{\Omega}\mathrm{s}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{s}}{\cancel{\Omega}}} - \frac{1}{160\cancel{\Omega}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{s}}{\cancel{\Omega}}}$$

$$= 4{,}17\cdot 10^7\mathrm{s}^{-2} - 9{,}77\cdot 10^6\mathrm{s}^{-2} = 3{,}19\cdot 10^7\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_{res}^2} = 5648\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

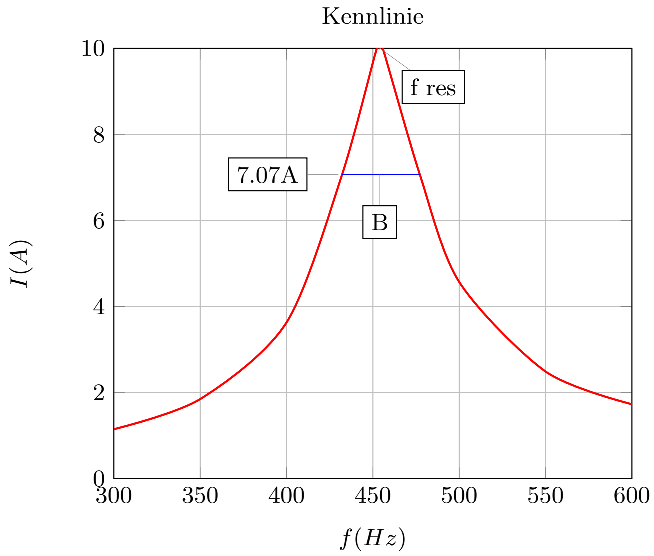
$$f_{res} = \frac{\omega_{res}}{2\pi} = \underline{\underline{899\,\mathrm{Hz}}}$$

Nicht gefragt Resonanzwiderstand:

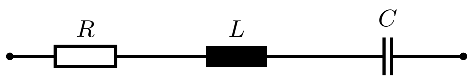
$$Z = \frac{R}{1+(\omega\cdot C\cdot R)^2} = \frac{160\,\Omega}{(5648\cdot\cancel{s^{-1}}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\frac{\cancel{s}}{\cancel{\Omega}}\cdot 160\cancel{\Omega})^2+1} = \underline{\underline{37{,}5\,\Omega}}$$

19/2 RLC-Reihenschwingkreis

Von einem RLC-Reihenschwingkreis ist die Abhängigkeit $I(f)$ gegeben, siehe Kennlinie. Der Schwingkreis wird von einer konstanten sinusförmigen Spannung gespeist mit
$U = 100\,\mathrm{V}$.
Bestimmen Sie die Bauelemente R, L, und C!
Sie dürfen auch mit der Näherung Güte $\gg 1$ rechnen.



Berechnung:



Ablesen: $I_{max} = 10\,\mathrm{A} \qquad f_{res} = 454\,\mathrm{Hz}$

$$R = \frac{U}{I_{res}} = \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{10\,\Omega}} \qquad \text{Bei Resonanz: Nur Spannung über R, da } \Im = 0$$

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{10\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} = 7{,}07\,\mathrm{A} \Rightarrow \Delta f = B \approx 45\,\mathrm{Hz} \qquad \text{Bandbreite-Grenzfrequenzen}$$

C und L bestimmen

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = 454\,\text{Hz} \tag{1}$$

$$\text{Näherung } B \approx \frac{f_{res}}{Q_S} \Rightarrow Q_S \approx \frac{f_{res}}{B} = \frac{454\,\text{Hz}}{45\,\text{Hz}} = 10{,}1$$

$$Q_S = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 10{,}1 \qquad \text{Gleichung für L und C} \tag{2}$$

$$\sqrt{L} = \underbrace{\frac{1}{2\pi \cdot f_{res} \cdot \sqrt{C}}}_{\text{aus (1)}} = \underbrace{Q_S \cdot \sqrt{C} \cdot R}_{\text{aus (2)}}$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot f_{res} \cdot Q_S \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 454\,\text{Hz} \cdot 10{,}1 \cdot 10\,\Omega} = 3{,}47 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{As}}{\text{V}} = \underline{\underline{3{,}47\,\mu\text{F}}}$$

$$L = (\sqrt{L})^2 = Q_S^2 \cdot C \cdot R^2 = 10{,}1^2 \cdot 3{,}47\,\mu\frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (10\,\Omega)^2 = \underline{\underline{35{,}4\,\text{mH}}}$$

Alternative: 2. Punkt auf der Kurve z.B. 4 A bei 405 Hz ergibt 2 Gleichungen.

$$\omega = 2\pi \cdot f \qquad \Rightarrow \omega = \omega_{405} = 2545; \qquad \omega_{res} = 2853$$

$$Z_{405} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \frac{U}{I_{405}} = \frac{100\,\text{V}}{4\,\text{A}} = 25\,\Omega$$

$$\Rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = Z^2 - R^2$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\pm\sqrt{Z^2 - R^2} + \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$L = \frac{1}{\omega_{res}^2 \cdot C} = \left(\pm \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} + \frac{1}{\omega^2 C} \right) \quad (\text{Formelsammlung: } \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}})$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{res}^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot \frac{1}{C} = \pm \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} \quad (\text{nach C auflösen})$$

$$C = \frac{\left(\frac{1}{\omega_{res}^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot \omega}{\pm\sqrt{Z^2 - R^2}} = \frac{\left(\overbrace{\frac{1}{(2835 \cdot \frac{1}{\text{s}})^2} - \frac{1}{(2545 \cdot \frac{1}{\text{s}})^2}}^{31{,}54 \cdot 10^{-9}} \right) \cdot 2545 \cdot \frac{1}{\text{s}}}{\pm\sqrt{(25\,\Omega)^2 - (10\,\Omega)^2}} = \frac{-80{,}3 \cdot 10^6}{\underbrace{\pm}_{-gilt} \sqrt{525}} = \underline{\underline{3{,}5\,\mu\text{F}}}$$

$$L = \frac{1}{\omega_{res}^2 \cdot C} = \frac{1}{(2835\,\frac{1}{\text{s}})^2 \cdot 3{,}5\,\mu\text{F}} = \frac{1}{28{,}07\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}}} = \underline{\underline{35{,}6\text{mH}}}$$

Rundungsfehler durch Ablesung und Näherung

19/3 Effektivwert und Klirrfaktor

Bild 1 zeigt einen Teil aus dem Ersatzschaltbild eines Transformators, aus dem hervorgeht, dass sich der Leerlaufstrom $i_0(t)$ zusammensetzt aus dem (verzerrten) Magnetisierungsstrom $i_\mu(t)$ und dem Strom $i_{Fe}(t)$, der die Eisenverluste repräsentiert.

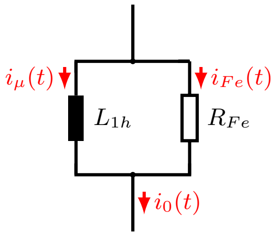


Bild 1

Bild 2 zeigt die zeitlichen Verläufe von $i_\mu(t)$ und $i_{Fe}(t)$, welche durch folgende Fourier-Reihen approximiert werden können:
$i_\mu(t) = 10\,\text{mA} \cdot \cos(\omega t) + 2{,}88\,\text{mA} \cdot \cos(3\omega t)$;
$i_{Fe}(t) = -4\,\text{mA} \cdot \sin(\omega t)$

Der resultierende, in Bild 3 dargestellte Leerlaufstrom ist die Summe:
$i_0(t) = i_\mu(t) + i_{Fe}(t)$

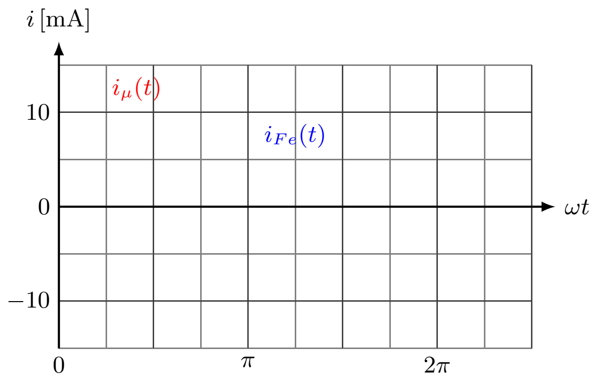


Bild 2

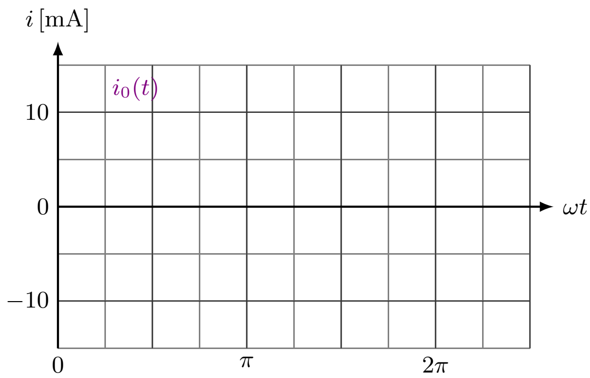


Bild 3

a) Berechnen Sie Effektivwert und Klirrfaktor von $i_\mu(t)$

b) Berechnen Sie Effektivwert und Klirrfaktor von $i_0(t)$

Formeln:

$$k = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2}} = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Gesamtsignals}} \tag{19/3.1}$$

Berechnung:

a) Effektivwert I_μ und Klirrfaktor k_μ

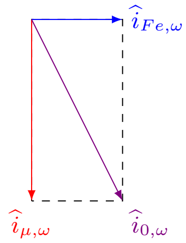
$$I_\mu = \sqrt{I_{\mu,\omega}^2 + I_{\mu,3\omega}^2} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{i}_{\mu,\omega}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{i}_{\mu,3\omega}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(10\,\text{mA})^2 + (2{,}88\,\text{mA})^2} = \underline{\underline{7{,}36\,\text{mA}}}$$

$$k_\mu = \frac{I_{\mu,3\omega}}{I_\mu} = \frac{\widehat{i}_{\mu,3\omega}/\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{\widehat{i}_{\mu,\omega}^{\,2} + \widehat{i}_{\mu,3\omega}^{\,2}}/\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2{,}88\,\text{mA}}{\sqrt{(10\,\text{mA})^2 + (2{,}88\,\text{mA})^2}} = \underline{\underline{0{,}277}} = \underline{\underline{27{,}7\%}}$$

b) Effektivwert I_0 und Klirrfaktor k_0

$$\widehat{i}_{0,3\omega} = \widehat{i}_{\mu,3\omega} = 2{,}88\,\text{mA}$$

Nulldurchgang von $\widehat{i}_{Fe}$ bei den Spitzenwerten



$$\begin{aligned}\widehat{i}_{0,\omega} &= \sqrt{\widehat{i}_{\mu,\omega}^{\,2} + \widehat{i}_{Fe,\omega}^{\,2}} \\ &= \sqrt{(10\,\text{mA})^2 + (4\,\text{mA})^2} = 10{,}77\,\text{mA}\end{aligned}$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\widehat{i}_{0,\omega}^{\,2} + \widehat{i}_{0,3\omega}^{\,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(10{,}77\,\text{mA})^2 + (2{,}88\,\text{mA})^2} = \underline{\underline{7{,}88\,\text{mA}}}$$

$$k_0 = \frac{\widehat{i}_{0,3\omega}/\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{\widehat{i}_{0,\omega}^{\,2} + \widehat{i}_{0,3\omega}^{\,2}}/\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2{,}88\,\text{mA}}{\sqrt{(10{,}77\,\text{mA})^2 + (2{,}88\,\text{mA})^2}} = \underline{\underline{0{,}258}} = \underline{\underline{25{,}8\%}}$$

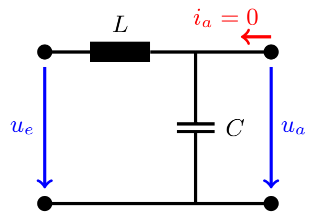
<u>Nicht gefragt</u>

Typische Klirrfaktoren:
Rechteckschwingung 33%
Sprache noch verständlich 10%
Max. HiFi Verstärker 1%
Guter HiFi Verstärker 0,1%

Weiteres unter http://de.wikipedia.org/wiki/Klirrfaktor

19/4 Klirrfaktor

Am Eingang liegt die Spannung
$u_e(t) = 2\,\mathrm{V} + 3\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t) + 4\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)$



a) Berechnen Sie den Klirrfaktor k_a der Ausgangsspannung u_a

b) Berechnen Sie den Effektivwert U_a

$L = 100\,\mathrm{mH}$, $C = 250\,\mu\mathrm{F}$

Formeln:

$$k = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2}} = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Gesamtsignals}} \tag{19/4.1}$$

$$k = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + \cdots + A_n^2}{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2}} \tag{19/4.2}$$

A_0 Gleichanteil
A_1 Grundschwingung
$A_2 \cdots A_n$ Oberwellen

Berechnung:

a) Klirrfaktor am Ausgang k_a

$$U_{a0} = U_{e0} = 2\,\text{V} \qquad \text{Gleichanteil ist ohne Einfluß auf den Klirrfaktor}$$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{jX_C}{jX_L + jX_C} = \frac{X_C}{X_L + X_C} \qquad \text{Wechselspannung}$$

Für 50 Hz Grundwelle

$$X_{C1} = -\frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{-1}{2\pi \cdot 50\,\frac{\cancel{1}}{\cancel{s}} \cdot 250 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A}\cancel{s}}{\text{V}}} = -12{,}73\,\Omega$$

$$X_{L1} = 2\pi f \cdot L = 2\pi \cdot 50\,\frac{\cancel{1}}{\cancel{s}} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{\text{V}\cancel{s}}{\text{A}} = 31{,}42\,\Omega$$

$$U_{a1} = \frac{-12{,}73\,\Omega}{31{,}42\,\Omega - 12{,}73\,\Omega} \cdot U_{e1} = -0{,}6811 \cdot U_{e1}$$

$$U_{a1} = |-0{,}6811 \cdot U_{e1}| = 0{,}6811 \cdot \frac{3\,\text{V}}{\sqrt{2}} = 1{,}445\,\text{V} \quad \text{Effektivwert}$$

$$U_{a1}^2 = 2{,}088\,\text{V}^2$$

Für 100 Hz 1. Oberwelle

$$X_{C2} = \frac{1}{2} \cdot X_{C1} = -6{,}365\,\Omega$$

$$X_{L2} = 2X_{L1} = 62{,}84\,\Omega$$

$$U_{a2} = \left|\frac{-6{,}365\,\Omega}{62{,}84\,\Omega - 6{,}365\,\Omega}\right| \cdot \frac{4\,\text{V}}{\sqrt{2}} = 0{,}1127 \cdot \frac{4\,\text{V}}{\sqrt{2}} = 0{,}3188\,\text{V} \quad \text{Effektivwert}$$

$$U_{a2}^2 = 0{,}1016\,\text{V}^2$$

$$k_a = \sqrt{\frac{U_{a2}^2}{U_{a1}^2 + U_{a2}^2}} = \sqrt{\frac{0{,}1016\,\text{V}^2}{2{,}088\,\text{V}^2 + 0{,}1016\,\text{V}^2}} = \underline{\underline{0{,}215}} = \underline{\underline{21{,}5\%}}$$

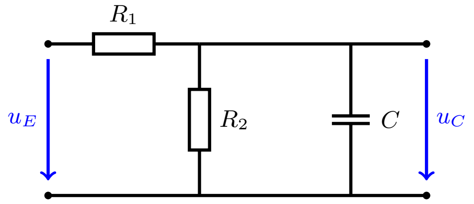
b) Effektivwert U_a

$$U_a = \sqrt{U_{a0}^2 + U_{a1}^2 + U_{a2}^2} = \sqrt{(2\,\text{V})^2 + 2{,}088\,\text{V}^2 + 0{,}1016\,\text{V}^2} = \underline{\underline{2{,}49\,\text{V}}}$$

19/5 Momentanspannung

An die Schaltung wird die Spannung $u_E(t) = U_0 + \widehat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \widehat{u}_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2)$ angelegt.

Berechnen Sie dies Spannung u_C zur Zeit $t = T$



$R_1 = 12\,\Omega \quad R_2 = 20\,\Omega$

$C = 25\,\mathrm{nF} \quad \omega = 961 \cdot 10^3\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$U_0 = 6\,\mathrm{V} \quad \widehat{u}_1 = 7\,\mathrm{V} \quad \widehat{u}_2 = 3\,\mathrm{V}$

$\varphi_1 = 60\,^\circ \quad \varphi_2 = 135\,^\circ \quad T = 2\,\mu\mathrm{s}$

Berechnung:

Jede Frequenz für sich betrachten; Überlagerung der Momentanwerte

$u_E(t) = 6\,\mathrm{V} + 7\,\mathrm{V} \cdot \cos(961 \cdot 10^3 \cdot 1/\mathrm{s} \cdot t + 60^\circ) + 3\,\mathrm{V} \cdot \cos(2 \cdot 961 \cdot 10^3 \cdot 1/\mathrm{s} \cdot t + 135^\circ)$

a) Gleichspannung - Spannungsteiler

$$u_{C0} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6\,\mathrm{V} \cdot \frac{20\,\Omega}{32\,\Omega} = 3{,}75\,\mathrm{V}$$

b) allgemein:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_E \cdot \frac{\underline{Z}_{||}}{\underline{Z}_{||} + R_1}$$

$$\underline{Z}_{||} = \frac{R_2 \cdot jX_C}{R_2 + jX_C}$$

c) $1 \cdot \omega$: Transformation in komplexe Ebene: $u(t) \to \underline{U}$

$$\underline{U}_{E1} = \frac{7\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60\,^\circ} = 4{,}95\,\mathrm{V} \cdot e^{j60\,^\circ} = (2{,}47 + j4{,}29)\,\mathrm{V}$$

$$X_{C1} = \frac{-1}{\omega C} = -41{,}6\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{||1} = \frac{20\,\Omega \cdot (-j41{,}6\,\Omega)}{20\,\Omega - j41{,}6\,\Omega} = \frac{-j832\,\Omega^2}{20\,\Omega - j41{,}6\,\Omega}$$

$$= \frac{828\,\Omega\cancel{^2} \cdot e^{-j90}}{45{,}98\cancel{\Omega} \cdot e^{-j64{,}22}} = 18{,}05\,\Omega \cdot e^{-j25{,}67} = (16{,}27 - j7{,}82)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{||1} + R1 = (16{,}27 - j7{,}82 + 12)\,\Omega = (28{,}27 - j7{,}82)\,\Omega = 29{,}33\,\Omega \cdot e^{-j15{,}52}$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{U}_{E1} \cdot \frac{\underline{Z}_{||1}}{\underline{Z}_{||1} + R_1} = 4{,}95\,\mathrm{V} \cdot e^{j60\,^\circ} \cdot \frac{18{,}05\cancel{\Omega} \cdot e^{-j25{,}67}}{29{,}33\cancel{\Omega} \cdot e^{-j15{,}46\,^\circ}}$$

$$= 3{,}04\,\mathrm{V} \cdot e^{j49{,}79\,^\circ} = (1{,}97 + j2{,}32)\,\mathrm{V}$$

$U_{C1} = 3{,}04\,\mathrm{V}$ Effektivwert

$\varphi_{C1} = 49{,}79\,^\circ = 0{,}868\,\mathrm{rad}$ Umwandlung wegen $(\omega t + \varphi_{C1})$

d) $1 \cdot \omega$ Rücktransformation: mit $t = T$

$$\begin{aligned}
\omega t + \varphi_{C1} &= \omega \cdot T + \varphi_{C1} = 961 \cdot 10^3 \,\frac{1\!\!/}{\cancel{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,\cancel{s} + 0{,}868\,\mathrm{rad} = 2{,}791\,\mathrm{rad} = 159{,}9\,^\circ \\
u_{C1}(t = T) &= \sqrt{2} \cdot U_{C1} \cdot \cos(\omega T + \varphi_{C1}) = \sqrt{2} \cdot 3{,}04\,\mathrm{V} \cdot \cos(159{,}9\,^\circ) \\
&= 4{,}3\,\mathrm{V} \cdot (-0{,}939) = -4{,}037\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

e) $2 \cdot \omega$: Transformation in komplexe Ebene: $u(t) \rightarrow \underline{U}$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{E2} &= \frac{3\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j135\,^\circ} = 2{,}121\,\mathrm{V} \cdot e^{j135\,^\circ} = (-1{,}5 + j1{,}5)\,\mathrm{V} \\
X_{C2} &= \frac{1}{2} \cdot X_{C1} = -20{,}8\,\Omega \\
\underline{Z}_{||2} &= \frac{20\,\Omega \cdot (-j20{,}8\,\Omega)}{20\,\Omega - j20{,}8\,\Omega} = \frac{-j414\,\Omega^2}{20\,\Omega - j20{,}8\,\Omega} \\
&= \frac{414\,\Omega^{\cancel{2}} \cdot e^{-j90}}{28{,}78\,\cancel{\Omega} \cdot e^{-j45{,}99}} = 14{,}41\,\Omega \cdot e^{-j43{,}87} = (10{,}39 - j9{,}992)\,\Omega \\
\underline{Z}_{||2} + R1 &= (10{,}39 - j9{,}992 + 12)\,\Omega = (22{,}34 - j9{,}992)\,\Omega = 24{,}51\,\Omega \cdot e^{-j24\,^\circ} \\
\underline{U}_{C2} &= \underline{U}_{E2} \cdot \frac{\underline{Z}_{||2}}{\underline{Z}_{||2} + R_1} \\
&= \underline{U}_{E2} \cdot \frac{(10{,}39 - j9{,}992)\cancel{\Omega}}{(22{,}39 - j9{,}992)\cancel{\Omega}} = 2{,}121\,\mathrm{V} \cdot e^{j135\,^\circ} \cdot \frac{14{,}38 \cdot e^{-j44{,}01}}{24{,}48 \cdot e^{-j24{,}1\,^\circ}} \\
&= 1{,}247\,\mathrm{V} \cdot e^{j115{,}1\,^\circ} = (-0{,}530 + j1{,}129)\,\mathrm{V} \\
U_{C2} &= 1{,}247\,\mathrm{V} \quad \text{Effektivwert} \\
\varphi_{C2} &= 115{,}1\,^\circ = 2{,}009\,\mathrm{rad} \quad \text{Umwandlung wegen } (2 \cdot \omega t + \varphi_{C2})
\end{aligned}$$

f) $2 \cdot \omega$ Rücktransformation: mit $t = T$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \omega t + \varphi_{C2} &= 2\omega \cdot T + \varphi_{C2} = 2 \cdot 961 \cdot 10^3 \,\frac{1\!\!/}{\cancel{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,\cancel{s} + 2{,}009\,\mathrm{rad} \\
&= 5{,}854\,\mathrm{rad} = 335{,}4\,^\circ \\
u_{C2}(t = T) &= \sqrt{2} \cdot U_{C2} \cdot \cos(2 \cdot \omega T + \varphi_{C2}) = \sqrt{2} \cdot 1{,}247\,\mathrm{V} \cdot \cos(335{,}4\,^\circ) \\
&= 1{,}762\,\mathrm{V} \cdot 0{,}909 = 1{,}602\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

g) Überlagerung:

$$\begin{aligned}
u_C(t = T = 2\,\mu\mathrm{s}) &= u_{C0}(T) + u_{C1}(T) + u_{C2}(T) = (3{,}75\,\mathrm{V} - 4{,}037\,\mathrm{V} + 1{,}602\,\mathrm{V}) \\
&= \underline{\underline{1{,}315\,\mathrm{V}}}
\end{aligned}$$

19/6 Nichtlinears Bauelement

Für ein nichtlinears Bauelement gilt: $i = a \cdot u^2$
Berechnen Sie den Klirrfaktor des Stromes, wenn die Spannung $u(t) = U_0 + \widehat{u} \cdot \sin(\omega t)$ angelegt wird.

$a = 20\,\mathrm{mA/V^2}$; $U_0 = 1{,}5\,\mathrm{V}$; $\widehat{u} = 1{,}2\,\mathrm{V}$; $\omega = 1500\,\mathrm{s^{-1}}$

Es gilt $\sin^2 \alpha = 0{,}5 \cdot (1 - \cos(2\alpha))$

Berechnung:

$$k_i = \frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} \qquad \omega \text{ ohne Bedeutung}$$

$(\alpha = \omega t)$

$$i(t) = a \cdot (U_0 + \widehat{u} \cdot \sin\alpha)^2 = a \cdot (U_0^2 + 2 \cdot U_0 \cdot \widehat{u} \cdot \sin\alpha + \widehat{u}^2 \overbrace{\cdot \sin^2\alpha)}^{0{,}5 - 0{,}5 \cdot cos(2\alpha)}$$

$$= \overbrace{a \cdot U_0^2}^{DC} + \underbrace{2 \cdot a \cdot U_0 \cdot \widehat{u}}_{\widehat{i}_1} \cdot \sin\alpha + \overbrace{0{,}5 \cdot a \cdot \widehat{u}^2}^{DC} - \underbrace{0{,}5 \cdot a \cdot \widehat{u}^2}_{\widehat{i}_2} \cdot \cos(2\alpha) \qquad \text{DC=Gleichanteil, ohne Einfluß}$$

$$k_i = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}5 \cdot a \cdot \widehat{u}^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a^2 \cdot U_0^2 \cdot \widehat{u}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \widehat{u}^4}} = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{a} \cdot \widehat{u}^{\cancel{2}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \widehat{u}} \cdot \sqrt{4 \cdot U_0^2 \cdot + \frac{1}{4} \cdot \widehat{u}^2}}$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot \widehat{u}}{\sqrt{4 \cdot U_0^2 + \frac{1}{4} \cdot \widehat{u}^2}} = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}2\,\mathrm{V}}{\sqrt{4 \cdot 1{,}5^2\,\mathrm{V}^2 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}2^2\,\mathrm{V}^2}} = \underline{\underline{0{,}1961}} = \underline{\underline{19{,}61\%}}$$

alternativ:

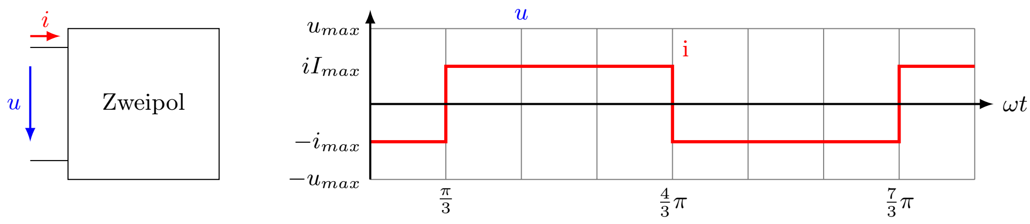
$$I_1 = \frac{\widehat{i}_1}{\sqrt{2}} = 50{,}91\,\mathrm{mA}$$

$$I_2 = \frac{\widehat{i}_2}{\sqrt{2}} = 10{,}18\,\mathrm{mA}$$

$$k_i = \frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} = \frac{10{,}18\,\mathrm{mA}}{\sqrt{(50{,}91\,\mathrm{mA})^2 + (10{,}18\,\mathrm{mA})^2}} = \underline{\underline{0{,}1961}} = \underline{\underline{19{,}61\%}}$$

19/7 Wirkleistung Zweipol

An einem Zweipol liegt die dargestellte Spannung u. Es fließt der dargestellte Rechteckstrom i. Spannung und Strom sind periodisch und haben die gleiche Periodendauer.



$u_{max} = 300\,\mathrm{V} \qquad i_{max} = 6\,\mathrm{A}$

Berechnen Sie die Wirkleistung, die der Zweipol aufnimmt.

Hinweis: Unterschiedliche Lösungsverfahren sind möglich. falls benötigt: Der Strom i kann durch folgende Fourier Reihe dargestellt werden:

$$i = \frac{24\,\mathrm{A}}{\pi}\left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \cdots\right]$$

Berechnung:

Elegante Lösung mit Fourier-Reihe:
Für die Leistungsaufnahme des Zweipols ist nur der Stromanteil entscheidend, der die gleiche Frequenz wie die Spannung besitzt, d.h. nur

$$P = U \cdot I_\omega \cdot \cos\varphi$$

$$i_\omega(t) = \frac{24\,\mathrm{A}}{\pi}\sin(\omega t \underbrace{- \frac{\pi}{3}}_{\varphi})$$

$$I_\omega = \frac{24\,\mathrm{A}}{\pi \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad P = U \cdot I_\omega \cdot \cos\varphi = \frac{300\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{24\,\mathrm{A}}{\pi\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{0{,}5} = \underline{\underline{573\,\mathrm{W}}}$$

oder Standardlösung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot i(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

(Verschiebung Start- und Endwert für Integration)

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} 6\,\mathrm{A} \cdot 300\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} -6\,\mathrm{A} \cdot 300\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t) d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[1800\,\mathrm{VA} \cdot \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)}_{0{,}5} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{0{,}5}\right) - 1800\,\mathrm{VA} \cdot \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right)}_{-0{,}5} + \underbrace{\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)}_{-0{,}5}\right)\right]$$

$$= \frac{1800\,\mathrm{VA}}{\pi} = \underline{\underline{573\,\mathrm{W}}}$$

oder sinusförmiger Strom unter Berücksichtigung des Formfaktors

Für sinusförmigen Strom:

$$P_{\sin} = U \cdot I \cdot \cos\varphi = \frac{300\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60\,^\circ) = 450\,\mathrm{W}(\sin) = 636\,\mathrm{W}$$

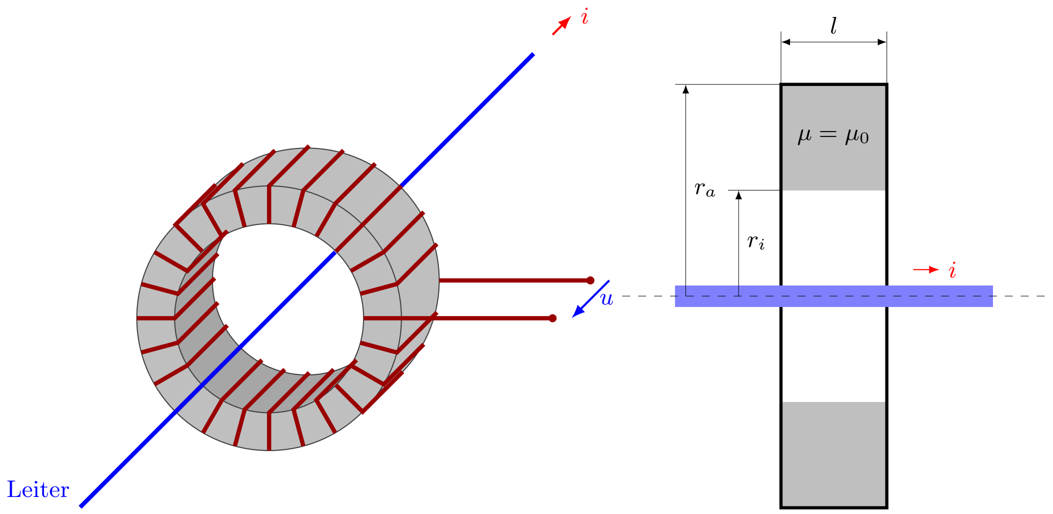
Für den rechteckförmigen Strom muß der Formfaktor berücksichtigt werden:

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

$$P = \frac{P_{\sin}}{F} = \frac{636\,\mathrm{W}}{1{,}11} = \underline{\underline{573\,\mathrm{W}}}$$

20/1 Ringspule

Durch das Zentrum einer Ringspule mit rechteckigem Querschnitt (Länge $l = 12\,\mathrm{mm}$, $r_i = 10\,\mathrm{mm}$, $r_a = 20\,\mathrm{mm}$; Windungszahl $N = 1800$) wird ein Leiter geführt, in dem ein Wechselstrom fließt. ($I_{eff} = 40\,\mathrm{A}$; $f = 50\,\mathrm{Hz}$).
Berechnen Sie den Effektivwert U der Spannung u.
$\mu = \mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/(Am)}$



Formeln:

$$u = N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{20/1.1}$$

Berechnung: Strom im Leiter bewirkt Fluss durch die Spule:

$$\phi = \widehat{\phi}_0 \cdot \sin(\omega t)$$
$$\widehat{\phi}_0 = \int_{r_i}^{r_a} l \cdot \widehat{B}(r) \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot l \cdot \widehat{i}}{2\pi} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot l \cdot \widehat{i}}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$
$$\text{mit } \widehat{i} = \sqrt{2} \cdot I$$
$$\Rightarrow \widehat{\phi}_0 = \frac{1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{2} \cdot 40\,\mathrm{A}}{2\pi} \cdot \ln(2) = 9{,}44 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs}$$
$$\phi_{eff} = \frac{\widehat{\phi}_0}{\sqrt{2}} = 6{,}672 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs}$$

Veränderlicher Fluss induziert Spannung:

$$u = N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = N \cdot \widehat{\phi}_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = \widehat{u} \cdot \cos(\omega t)$$
$$\widehat{u} = N \cdot \phi_0 \cdot \omega = 1800 \cdot 9{,}44 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs} \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} = 53{,}36\,\mathrm{mV}$$
$$U = \frac{\widehat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{53{,}36\,\mathrm{mV}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{37{,}73\,\mathrm{mV}}}$$

Anmerkung:

$$\begin{aligned}
u_i &= 2 \cdot a \cdot r \cdot N \cdot B \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\
&= 2 \cdot a \cdot r \cdot N \cdot \frac{\Phi}{A} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\
&\text{mit } 2 \cdot a \cdot r = A \\
&= N \cdot \Phi \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\
&= \widehat{u}_i \cdot \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

oder

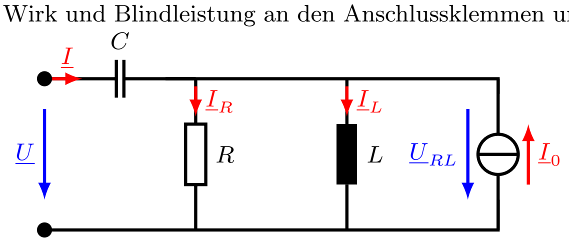
$$\begin{aligned}
U &= \mu_0 \cdot l \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot N \cdot f \cdot I \\
&= 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V}\cancel{\mathrm{s}}}{\cancel{\mathrm{A}}\cancel{\mathrm{m}}} \cdot 12 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}} \cdot \ln \frac{20\,\cancel{\mathrm{mm}}}{10\,\cancel{\mathrm{mm}}} \cdot 1800 \cdot 50\,\frac{\cancel{1}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 40\,\cancel{\mathrm{A}} = \underline{\underline{37{,}73\,\mathrm{mV}}}
\end{aligned}$$

20/2 Netzwerk Wirk- und Blindanteil

$\underline{U} = 4{,}2\,\text{V} \cdot e^{j30^\circ}$; $\quad f = 120\,\text{kHz}$; $\quad \underline{I}_0 = 2{,}7\text{mA} \cdot e^{j110^\circ}$
$R = 1{,}3\,\text{k}\Omega$; $\quad L = 3{,}6\,\text{mH}$; $\quad C = 1{,}5\,\text{nF}$.

a) Berechnen Sie den Strom $\underline{\text{I}}$ und seinen Wirk- und Blindanteil $\underline{I}_\text{w}$ bzw. $\underline{I}_\text{b}$.

b) Berechnen Sie die Wirk und Blindleistung an den Anschlussklemmen und an der Stromquelle $\underline{I}_0$.



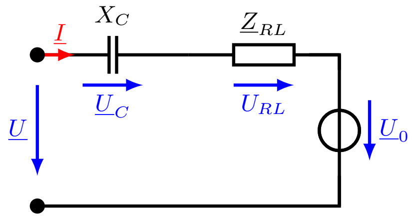
Berechnung:

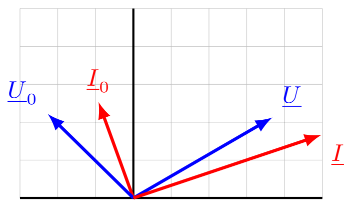
a) $X_L = \omega L = 2\pi \cdot f \cdot 3{,}6\,\text{mH} = 2714\,\Omega$

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{2\pi \cdot f \cdot 1{,}5\,\text{nF}} = -884\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{RL} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{1{,}3\,\text{k}\Omega \cdot j2714\,\Omega}{1{,}3\,\text{k}\Omega + j2714\,\Omega} = (1057 + j506)\,\Omega = 1172\,\Omega \cdot e^{j25{,}59^\circ}$$

Serienersatzschaltbild:





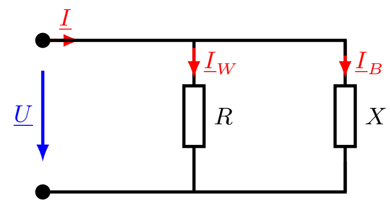
$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{I}_0 \cdot \underline{Z}_{RL} = 2{,}7\text{mA} \cdot e^{j110^\circ} \cdot 1172\,\Omega \cdot e^{j25{,}59^\circ}\\ &= 3{,}164\,\text{V} \cdot e^{j135{,}6^\circ} = (-2{,}26 + j2{,}21)\,\text{V}\\ \underline{Z}_{RLC} &= \underline{Z}_{RL} + jX_C = (1060 + j507)\,\Omega - j884\,\Omega\\ &= (1057 - j378)\,\Omega = 1122{,}6\,\Omega \cdot e^{-j19{,}67^\circ}\end{aligned}$$

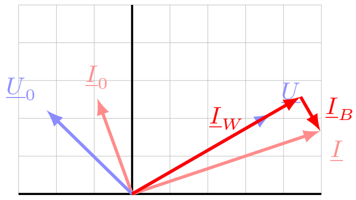
Masche:

$$\underline{I} \cdot \underline{Z}_{RLC} + \underline{U}_0 - \underline{U} = 0$$

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U} - \underline{U}_0}{\underline{Z}_{RLC}} = \frac{\overbrace{(3{,}637 + j2{,}1)\,\text{V}}^{4{,}2\,\text{V} \cdot e^{j30^\circ}} - (-2{,}26 + j2{,}21)\,\text{V}}{1122{,}6\,\Omega \cdot e^{-j19{,}67^\circ}} = \frac{5{,}90\,\text{V} \cdot e^{-j1{,}06^\circ}}{1122{,}6\,\Omega \cdot e^{-j19{,}67^\circ}}\\ &= \underline{\underline{5{,}25\text{mA} \cdot e^{j18{,}5^\circ}}} = \underline{\underline{(4{,}98 + j1{,}67)\text{mA}}}\end{aligned}$$

Parallelersatzschaltbild: (Wirkstrom in Phase, Blindstrom senkrecht zur Spannung)





$$|\underline{I}_\text{w}| = I \cdot \cos(\underbrace{\varphi_u}_{30\,^\circ} - \underbrace{\varphi_i}_{18{,}5\,^\circ}) = 5{,}14\,\text{mA}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_\text{w} = \underline{\underline{5{,}14\,\text{mA} \cdot e^{j30\,^\circ}}}$$

$$|\underline{I}_b| = I \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i) = 1{,}05\,\text{mA}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_b = \underline{\underline{1{,}05\,\text{mA} \cdot e^{-j60\,^\circ}}}$$

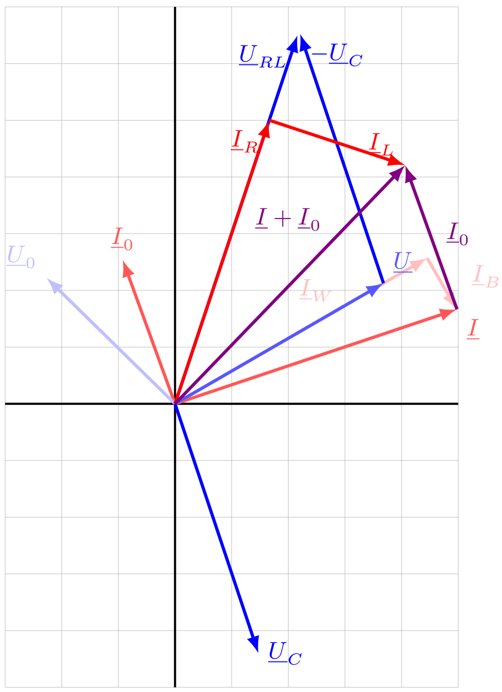
b)

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot jX_C = 4{,}64\,\text{V} \cdot e^{-j71{,}5\,^\circ}$$

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U} - \underline{U}_C = 6{,}85\,\text{V} \cdot e^{j71{,}6\,^\circ}$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RL}}{R} = 5{,}27\,\text{mA} \cdot e^{j71{,}6\,^\circ}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{RL}}{jX_L} = 2{,}52\,\text{mA} \cdot e^{-j18{,}4\,^\circ}$$



Probe:

$$I + I_0 = 5{,}85\,\text{mA} \cdot e^{j46\,^\circ}$$

$$I_R + I_L = 5{,}85\,\text{mA} \cdot e^{j46\,^\circ}$$

stimmt überein.

Leistung an Klemme:

$$\underline{S}_K = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 4{,}2\,\mathrm{V} \cdot e^{j30^\circ} \cdot 5{,}25\mathrm{mA} \cdot e^{-j18{,}5^\circ} = (\underbrace{21{,}6}_{P_K} + \underbrace{j4{,}4}_{Q_K})\,\mathrm{mVA}$$

$$P_K = \underline{\underline{21{,}6\,\mathrm{mW}}}$$

$$Q_K = \underline{\underline{4{,}4\,\mathrm{mvar}}}$$

Leistung der Stromquelle (Pfeilsystem wie oben):

$$S_I = \underline{U}_{RL} \cdot I_0^* = 6{,}85\,\mathrm{V} \cdot e^{j71{,}6^\circ} \cdot 2{,}7\mathrm{mA} \cdot e^{-j110^\circ} = (\underbrace{14{,}5}_{P_I} \underbrace{-j11{,}5}_{Q_I})\,\mathrm{mVA}$$

$$P_I = \underline{\underline{14{,}5\,\mathrm{mW}}}$$

$$Q_I = \underline{\underline{-11{,}5\,\mathrm{mvar}}}$$

Gesamtleistung: Summe aus Quell- und Klemmleistung

$$S = S_K + S_I = (21{,}6 + j4{,}4 + 14{,}5 - j11{,}5)\,\mathrm{mVA} = 36{,}1\,\mathrm{mW} - j7{,}1\,\mathrm{mVA}$$

Probe: Wirkleistung:

$$P = \frac{U_{RL}^2}{R} = \frac{(6{,}85\,\mathrm{V})^2}{1300\,\Omega} = 36{,}1\,\mathrm{mW} \quad \text{(Übereinstimmung)}$$

Probe: Blindleistung:

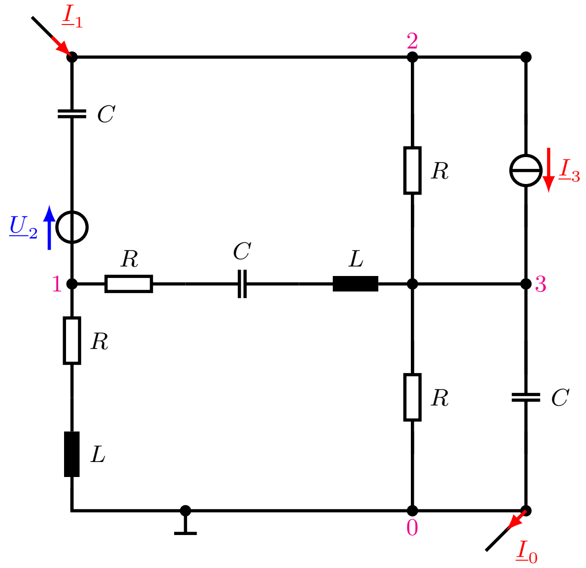
$$C: \quad Q_C = X_C \cdot I^2 = -884\,\Omega \cdot (5{,}25\,\mathrm{mA})^2 = -24{,}4\,\mathrm{mvar}$$

$$L: \quad Q_L = \frac{U_{RL}^2}{X_L} = \frac{(6{,}85\,\mathrm{V})^2}{2714\,\Omega} = +17{,}3\,\mathrm{mvar}$$

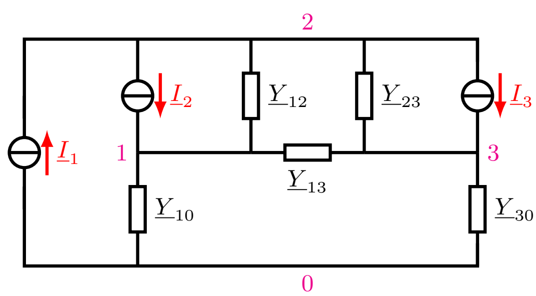
$$Q = Q_C + Q_L = (-24{,}4 + 17{,}3)\,\mathrm{mvar} = -7{,}1\,\mathrm{mvar} \quad \text{(Übereinstimmung)}$$

20/3 Gleichungen in Matrizenschreibweise

Die Spannungen am gegebenen Netzwerk sollen mit Hilfe des Knotenpotenzialverfahrens berechnet werden. Stellen Sie die Gleichungen in Matrizenschreibweise auf.
$R = 2\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 5\,\mathrm{nF}$ $L = 2{,}5\,\mathrm{mH}$;
$f = 63{,}662\,\mathrm{kHz}$;
$\underline{I}_1 = 7\,\mathrm{mA}$; $\underline{U}_2 = 3\,\mathrm{V} \cdot e^{j90^\circ}$ $\underline{I}_3 = 5\mathrm{mA} \cdot e^{-j90^\circ}$



Berechnung:



$$[\ \underline{Y}\ ] \cdot [\ \underline{U}\ ] = [\ -\sum \underline{I}_q\ ]$$

$\underline{I}_0 \overset{!}{=} \underline{I}_1$ wegen Gleichgewicht. Abfließende Quellströme positiv.

$$
\begin{aligned}
& G = \frac{1}{R} = 0{,}5\,\mathrm{mS} \\
& \omega = 2\pi \cdot f = 0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} \\
& X_C = \frac{-1}{\omega C} = -0{,}5\,\mathrm{k\Omega} \\
\Rightarrow\quad & B_C = \omega C = 2{,}0\,\mathrm{mS} \\
& X_L = \omega L = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\
\Rightarrow\quad & B_L = \frac{-1}{\omega L} = -1{,}0\,\mathrm{mS}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_{10} &= \frac{1}{R + jX_L} = \frac{1}{(2 + j1)\,\mathrm{k\Omega}} && = (0{,}4 - j0{,}2)\,\mathrm{mS} \\
\underline{Y}_{30} &= G + jB_C && = (0{,}5 + j2{,}0)\,\mathrm{mS} \\
\underline{Y}_{13} &= \frac{1}{R + j(X_L + X_C)} = \frac{1}{[2 + j(1 - 0{,}5)]\,\mathrm{k\Omega}} && = (0{,}4706 - j0{,}1176)\,\mathrm{mS} \\
\underline{Y}_{12} &= jB_C = 2\,\mathrm{mS} \cdot e^{j90^\circ} && = (0 + j2{,}0)\,\mathrm{mS} \\
\underline{Y}_{23} &= G && = (0{,}5 + j0)\,\mathrm{mS}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= 7\,\mathrm{mA} \cdot e^{j0^\circ} && = (7 - j0)\,\mathrm{mA} \\
\underline{I}_2 &= \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 = 2\,\mathrm{mS} \cdot e^{j90^\circ} \cdot 3\,\mathrm{V} \cdot e^{j90^\circ} = 6\,\mathrm{mA} \cdot e^{j180^\circ} && = (-6 + j0)\,\mathrm{mA} \\
\underline{I}_3 &= 5\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j90^\circ} && = (0 - j5)\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\underline{Y}_{10} + \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{13} & -\underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{13} \\
-\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{23} & -\underline{Y}_{23} \\
-\underline{Y}_{13} & -\underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{30} + \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{23}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
(0{,}8706 + j1{,}6824) & (0 - j2) & (-0{,}4706 + j0{,}1176) \\
(0 - j2) & (0{,}5 + j2{,}0) & (0{,}5 + j0) \\
(-0{,}4706 - j0{,}1176) & (0{,}5 + j0) & (1{,}4706 + j1{,}8823)
\end{pmatrix}
\mathrm{mS}
\begin{pmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} (6 - j0) \\ (13 + j5) \\ (0 - j5) \end{pmatrix}
\mathrm{mA}
$$

Ergebnisse

1 Blitzableiter (B12A1):
$u = -133{,}7\,\mathrm{V}$
2 Drahtschleife (B12A2):
$u = -36{,}39\,\mathrm{mV}$
3 Metallstab (B12A3):
$|B_z| = 0{,}398\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$
4 Spannungsverlauf (B12A4):
$f = 40\,\mathrm{Hz}$
$\overline{|u|} = 6\,\mathrm{V}$
$U = 7{,}30\,\mathrm{V}$
$F = 1{,}22$
$P = 0{,}533\,\mathrm{W}$
5 Phasenanschnitt (B12A5):
$U = 261\,\mathrm{V}$
6 Rechteckspannung (B12A6):
$u_1 = 1{,}5\,\mathrm{V} \qquad u_2 = -3{,}5\,\mathrm{V}$
$U = 2{,}29\,\mathrm{V}$
7 Scheinersatzwiderstände (B13 A1):
$R_r = 520\,\Omega$
$L_r = 60\,\mathrm{mH} G_p = 693\,\Omega$
$L_p = 239\,\mathrm{mH}$
$\varphi_r' = 23{,}5\,^\circ$
$\varphi_p' = -37{,}6\,^\circ$
8 Verbraucherleistung (B13A2):
$p(t) = 1079\,\mathrm{W} + 1318\,\mathrm{VA} \cdot \sin(2\omega t + 0{,}96)$
$S = 1318\,\mathrm{VA}$
$P = 1079\,\mathrm{W}$
$Q = -756\,\mathrm{var}$
9 Blindleistungskompensation (B13A3):
$I_N = 20{,}63\,\mathrm{A}$
$\varphi_N = 32,52°$
$C = 153{,}6\,\mu\mathrm{F}$
10 Energieübertragung (B13A4):
$X_C = -25\,\Omega$
$P_{VR_L} = 46{,}7\,\mathrm{W}$
$P_W = 583\,\mathrm{W}$
11 Wechselstrommotor (B13A5):
$I = 15{,}5\,\mathrm{A}$
$C = 80{,}6\,\mu\mathrm{F}$
$I' = 12{,}1\,\mathrm{A}$

12 Parallelschaltung von L und C (B13A6):

$i_L(t_2) = 2{,}92\,\mathrm{A}$

13 Werte R_L und L einer Spule (B13A7):

$I = 1\,\mathrm{A}$

$R_L = 12{,}5\,\Omega$

$L = 0{,}219\,\mathrm{H}$

14 Zeigerdiagramm (B14A1):

$\underline{U}_e = 15\,\mathrm{V} \cdot e^{+j90°}$

15 Gesamtwiderstand (B14A2):

Induktiv

16 Brückenschaltung (B14A3):

$\underline{U}_a = 130\,\mathrm{V} \cdot e^{j83\,°}$

17 Zeigerdiagramm Netzwerk (B14A4):

$R_1 = 13{,}89\,\mathrm{k}\Omega$

18 Blind- Wirk- und Scheinleistung (B14A5):

$\underline{Z} = 84{,}85\,\Omega \cdot e^{-j45\,°} = (60 - j60)\,\Omega$

$\underline{I} = 2{,}71\,\mathrm{A} \cdot e^{j45\,°} = (1{,}916 + j1{,}916)\,\mathrm{A}$

$\underline{I}_{R_C} = 1{,}21\,\mathrm{A} \cdot e^{-j18{,}4\,°} = (1{,}150 - j0{,}383)\,\mathrm{A}$

$\underline{I}_C = 2{,}42\,\mathrm{A} \cdot e^{+j71{,}6\,°} = (0{,}766 + j2{,}30)\,\mathrm{A}$

$\underline{U}_{R_C} = 242\,\mathrm{V} \cdot e^{-j18{,}4\,°}$

$\underline{U}_{R_L} = 54{,}2\,\mathrm{V} \cdot e^{j45\,°}$

$\underline{U}_L = 54.2\,\mathrm{V} \cdot e^{j135\,°}$

$S = 623\,\mathrm{VA}$

$P = 447\,\mathrm{W}$

$Q = -447\,\mathrm{VA}r$

19 Komplexe Wechselstromrechnung Netzwerk Strom (B15A1):

$\underline{I_2} = 53{,}92\,\mathrm{mA} \cdot e^{j176{,}32\,°}$

20 Übergang Zeitabhängige zu Komplexen Größen (B15A2):

$\underline{I}_L = 34{,}45\,\mathrm{mA} \cdot e^{j50{,}83\,°}$

$i_L(T) = -25{,}79\,\mathrm{mA}$

21 Leitwert (B15A3):

$R = 500\,\Omega$

$B_C = 2{,}175\,\mathrm{mS}$

22 Strom L-R-C (B15A4):

$\underline{I} = 0{,}4058\,\mathrm{A} \cdot e^{j67{,}4\,°} = (0{,}156 + j0{,}375)\,\mathrm{A}$

23 Überlagerungsmethode (B15A5):

$\underline{I}_C = (578{,}41 + j279{,}99)\,\mathrm{mA} = 642{,}6\,\mathrm{mA} \cdot e^{+j25{,}38\,°}$

24 Momentan Leistung (B15A6):

$u_R(T) = -114{,}1\,\mathrm{mV}$

$u_L(T) = -50{,}5\,\mathrm{mV}$

$u_C(T) = 119{,}7\,\mathrm{mV}$

$p(T) = 0{,}427\,\mathrm{mW}$

25 CLR Netzwerk (B16A1):
$S = 243{,}32\,\mathrm{mVA}$
$P = 141{,}50\,\mathrm{mW}$
$Q = -197{,}93\,\mathrm{m\,var}$
26 Wirkleistung vs. Blindleistung (B16A2):
–

27 Wirkleistung (B16A3):
$R_v = 17{,}24\,\Omega$
$C = 19{,}14\,\mu\mathrm{F}$
$P_{v,max} = 14{,}5\,\mathrm{mW}$ **28 Abgebbare Wirkleistung (B16A4):**
$F_{\%} = -78{,}8\,\%$
29 Wirkleistung Spannungsquelle (B16A5):
$P = -16{,}31\,\mathrm{mW}$
30 Dualitätskonstante (B16A6):
$L_2 = 100\,\mathrm{mH}$
$C_2 = 5\,\mu\mathrm{F}$ **31 Dualitätskonstante verlustbehaftete Bauelemente (B16A7):**
$R_G = 1\,\mathrm{mH}$
$G_R = 2\,\mathrm{mS}$
$C_L = 100\,\mathrm{nF}$
32 Vierpol Y-Parameter (B16A8):
$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega \cdot L} = -j\frac{1}{\omega \cdot L}$
$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L$
$\underline{Y}_{12} = -\frac{1}{6} \cdot \underline{Y}_L$
$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{11} = \frac{1}{3} \cdot \underline{Y}_L =$
$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{24} = 4 \cdot j\omega \cdot L$
$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 2 \cdot j\omega \cdot L$
33 Spannung Vierpol (B16A9):
$\underline{U}_0 = 130{,}4\,\mathrm{mV}$
34 Stromortskurve (B17A1):
$\underline{I} = 236\,\mathrm{mA} \cdot e^{(j35{,}2\,°)} = (193 + j136)\,\mathrm{mA}$
35 Leitwerts-, Widerstandsortskurve (B17A2):
– **36 Ortskurve (B17A3):**
$f_g = 828{,}9\,\mathrm{Hz}$
$a = -4{,}9\,\mathrm{dB}$
37 Stromortskurve (B17A4):
$I_{max} = 5{,}55\,\mathrm{mA}$
38 Widerstandstransformation (B17A5):
$X_{Lp} = 12{,}2\,\mathrm{k\Omega}$
$X_{C_s} = -5{,}6\,\mathrm{k\Omega}$
$X_{L_s} = +2{,}6\,\mathrm{k\Omega}$
$X_{C_p} = -4{,}2\,\mathrm{k\Omega}$

39 Brückenschaltung (B17A6):
$\underline{U}_{ab} = +j100\,\text{V} = 100\,\text{V} \cdot e^{+j90^\circ}$ **40 Wechselstrombrücke (B17A7):**
$\underline{Z}_2 = (1 + j0{,}5)\,\text{k}\Omega$
$R_2 = 1{,}25\,\text{k}\Omega$
$L_2 = 2{,}5\,\text{mH}$
41 Wechselstrombrücke (B17A8):
$X = +\frac{R^2}{X_L}$
42 Übertrager im Leerlauf (B18A1):
$Z_1 = 23\,\Omega \cdot e^{j77{,}44^\circ}$
$P = 500\,\text{W}$
$Q = 2245\,var$
$\omega L_1 = 22{,}45\,\Omega$
$\omega M = 10\,\Omega$
$\omega L_2 = 4{,}45\,\Omega$
43 Übertrager mit kapazitiver Last (B18A2):
$\underline{U}_2 = 0{,}398\,\text{V} \cdot e^{-j174{,}3^\circ}$
$\underline{U}_2 = 0{,}42\,\text{V} \cdot e^{+j18{,}4^\circ}$
$P_2 = 178\,\mu\text{W}$
44 Übertrager mit Verbindung zum Eingang (B18A3):
$\underline{U}_{ab} = 200\,\text{V} \cdot e^{j73{,}74^\circ}$
$\underline{U}_S = 317\,\text{V} \cdot e^{j79{,}8^\circ}$
$\underline{I} = 0{,}689\,\text{A} \cdot e^{-j8{,}43^\circ}$
$\underline{U}_{ab} = 159\,\text{V} \cdot e^{+j71{,}7^\circ}$
$P = 12{,}2\,\text{W}$
45 Impedanzmatrix (B18A4):
$\underline{Z}_{11} = (730 + j100)\,\Omega$
$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 1200\,\Omega$
$\underline{Z}_{22} = (2000 - j200)\,\Omega$
46 Netztransformator (B18A5):
$U_2 = 105{,}1\,\text{V}$
$I_1 = 118\,\text{mA}$
$\widehat{B} = 1{,}095\,\text{T}$
47 3-Phasen Spannungssystem (B18A6):
$\underline{I}_N = 10{,}6\,\text{A} \cdot e^{j14{,}7^\circ}$
48 3-Phasen System mit unsymmetrischem Verbraucher (B18A7):
$P = -335{,}44\,\text{W}$
49 Strangströme 3-Phasen System mit unsymmetrischem Verbraucher (B18A8):
$\underline{I}_C = 4\,\text{A} \cdot e^{j120^\circ} = (-2 + j3{,}46)\,\text{A}$
$\underline{I}_{RL} = 4\,\text{A} \cdot e^{j113{,}1^\circ} = (-1{,}57 + j3{,}68)\,\text{A}$
$\underline{I}_1 = 0{,}48\,\text{A} \cdot e^{-j153^\circ}$
$\underline{I}_2 = 3{,}66\,\text{A} \cdot e^{j109{,}1^\circ}$
$\underline{I}_3 = 4{,}03\,\text{A} \cdot e^{j66{,}1^\circ}$
$P = 1280\,\text{W}$

50 Resonanzfrequenz Zweipol (B19A1): $f_{res} = 899\,\text{Hz}$
$Z = 37{,}5\,\Omega$
51 RLC-Reihenschwingkreis (B19A2):
$R = 10\,\Omega$
$C = 3{,}47\,\mu\text{F}$
$L = 35{,}4\,\text{mH}$
52 Effektivwert und Klirrfaktor (B19A3):
$I_\mu = 7{,}36\,\text{mA}$
$k_\mu = 27{,}7\%$
$I_0 = 7{,}88\,\text{mA}$
$k_0 = 25{,}8\%$
53 Klirrfaktor (B19A4):
$k_a = 21{,}5\%$
$U_a = 2{,}49\,\text{V}$
54 Momentanspannung (B19A5):
$u_C(t = T = 2\,\mu\text{s}) = 1{,}315\,\text{V}$
55 Nichtlinears Bauelement (B19A6):
$k_i = 19{,}61\%$
56 Wirkleistung Zweipol (B19A7):
$P = 573\,\text{W}$

57 Ringspule (B20A1): $U = 37{,}73\,\text{mV}$
58 Netzwerk Wirk- und Blindanteil (B20A2):
$\underline{I} = 5{,}25\text{mA} \cdot e^{j18{,}5^\circ} = (4{,}98 + j1{,}67)\text{mA}$
$\underline{I}_\text{w} = 5{,}14\,\text{mA} \cdot e^{j30^\circ}$
$\underline{I}_b = 1{,}05\,\text{mA} \cdot e^{-j60^\circ}$
$P_K = 21{,}6\,\text{mW}$
$Q_K = 4{,}4\,\text{mvar}$
$P_I = 14{,}5\,\text{mW}$
$Q_I = -11{,}5\,\text{mvar}$
59 Gleichungen in Matrizenschreibweise (B20A3):

$$\begin{pmatrix} (0{,}8706 + j1{,}6824) & (0 - j2) & (-0{,}4706 + j0{,}1176) \\ (0 - j2) & (0{,}5 + j2{,}0) & (0{,}5 + j0) \\ (-0{,}4706 - j0{,}1176) & (0{,}5 + j0) & (1{,}4706 + j1{,}8823) \end{pmatrix} \text{mS} \begin{pmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6 - j0) \\ (13 + j5) \\ (0 - j5) \end{pmatrix} \text{mA}$$

Zeichenhilfe: