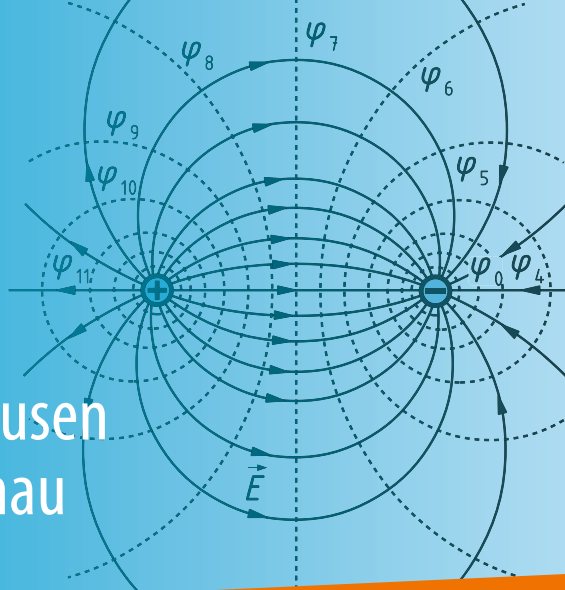


LEHRBUCH

Thomas Harriehausen
Dieter Schwarzenau



Moeller Grundlagen der Elektrotechnik

24. Auflage

 Springer Vieweg

Moeller Grundlagen der Elektrotechnik

Thomas Harriehausen · Dieter Schwarzenau

Moeller Grundlagen der Elektrotechnik

24., durchgesehene und korrigierte Auflage

Mit 256 farbigen Abbildungen und 202 Beispielen

 Springer Vieweg

Thomas Harriehausen
Ostfalia Hochschule für angewandte
Wissenschaften
Wolfenbüttel, Deutschland

Dieter Schwarzenau
Hochschule Magdeburg-Stendal
Magdeburg, Deutschland

ISBN 978-3-658-27839-7 ISBN 978-3-658-27840-3 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-27840-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 1933, 1942, 1951, 1954, 1956, 1959, 1967, 1971, 1976, 1986, 1996, 2002, 2005, 2008, 2011, 2013, 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur 24. Auflage

Ein Grundlagenbuch wie „Der Moeller“ sollte sich nach unserer Ansicht durch Konstanz und Zuverlässigkeit auszeichnen. So haben wir uns auch in dieser Auflage im Wesentlichen auf die Beseitigung von Fehlern beschränkt. Für uns selbst wird es allerdings immer schwerer, restliche Fehler zu entdecken. Deshalb sind wir unseren Lesern sehr dankbar, wenn sie uns auf gefundene Fehler, aber auch auf unpräzise oder missverständliche Darstellungen hinweisen. Einige haben sich in dieser Hinsicht bei der vorigen Auflage besonders hervorgetan. So möchten wir uns, stellvertretend für einige weitere, ganz besonders bei Kilian Scheurich und Kristian Schwethelm für ihre umfangreichen Korrekturhinweise bedanken.

Anregungen aus unserer Leserschaft haben uns auch motiviert, ein paar Formatierungen zu vereinheitlichen und nun auch einer Veröffentlichung als E-Book zuzustimmen. Letzteres ist uns nicht leicht gefallen, weil wir in der Praxis beobachten, dass die Verfügbarkeit elektronischer Medien oft das trügerische Gefühl vermittelt, man habe das enthaltene Wissen jederzeit sofort abrufbereit. Tatsächlich muss Wissen nach wie vor mit Fleiß erworben werden, indem man sich intensiv mit Inhalten auseinandersetzt und übt. Das funktioniert nach unserer Erfahrung auch heute mit Büchern zum Anfassen und Umblättern immer noch besser als mit Tastatur und Maus am Bildschirm. Erst danach ist ein E-Book als leicht zugängliches Nachschlagewerk sinnvoll. Darüber hinaus kann man auf die Informationen in Büchern auch bei längeren Stromausfällen zugreifen und sie sind voraussichtlich auch noch in 50 Jahren lesbar.

Man sollte meinen, dass es auf einem schon so lange etablierten Fachgebiet wie den Grundlagen der Elektrotechnik keine Innovationen und Neuheiten mehr geben kann. Doch diese Annahme hat sich als falsch herausgestellt. Erst vor einigen Jahren ist es gelungen, einen passiven Zweipol zu realisieren, dessen Existenz aufgrund von Überlegungen zur Symmetrie schon seit Jahrzehnten vermutet wurde. Eine Behandlung der besonderen Eigenschaften dieses als Memristor bezeichneten Zweipols wurde in diese Auflage neu mit aufgenommen. Da dieses Bauteil bisher noch keine besondere praktische Bedeutung hat, haben wir uns allerdings auf die elementaren Grundlagen beschränkt. An dieser Stelle möchten wir dem Kollegen Prof. Dr. phil. nat. habil. Ronald Tetzlaff von der TU Dresden für die Durchsicht dieses Abschnitts herzlich danken.

Wolfenbüttel, Magdeburg

im Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	1
1.1	Physikalische Größen und Einheiten	1
1.1.1	Physikalische Größen	1
1.1.1.1	Charakter der physikalischen Größen	1
1.1.1.2	Formelzeichen und ihre Darstellung	2
1.1.1.3	Vektoren, Matrizen	3
1.1.1.4	Zeitabhängige Größen	3
1.1.1.5	Komplexe Größen	3
1.1.2	Einheiten	4
1.1.2.1	SI-Basiseinheiten	5
1.1.2.2	Abgeleitete SI-Einheiten	5
1.1.2.3	Gesetzliche Einheiten außerhalb des SI-Einheitensystems	6
1.1.2.4	Dezimale Vielfache von Einheiten	6
1.1.3	Physikalische Gleichungen	7
1.1.3.1	Größengleichungen	7
1.1.3.2	Zugeschnittene Größengleichungen	7
1.2	Elektrische Grundgrößen	9
1.2.1	Elektrische Ladung	10
1.2.2	Elektrischer Strom	11
1.2.3	Technische Stromrichtung	13
1.2.4	Elektrisches Potenzial	14
1.2.5	Elektrische Spannung	16
1.3	Grundlegende Begriffe	18
1.3.1	Modellieren, Modell	18
1.3.2	Klemme, Zweipol, Dreipol, n-Pol	18
1.3.3	Aktiver und passiver Zweipol	19
1.3.4	Erzeuger und Verbraucher	19
1.3.5	Tor, Torbedingung, Zweitor	20
1.3.6	Elektrisches Netzwerk	20
1.3.7	Schaltzeichen, Schaltplan	20
1.3.8	Ersatzschaltbild	21
1.3.9	Analyse und Synthese	21
1.4	Zählpeile, Zählpeilsysteme	22
1.4.1	Strom- und Spannungszählpeile	22
1.4.2	Zählpeilsysteme an Zweipolen	24
1.4.2.1	Verbraucher-Zählpeilsystem	24
1.4.2.2	Erzeuger-Zählpeilsystem	25
1.4.3	Zählpeile an Zweitoren	26
1.4.3.1	Symmetrisches Zählpeilsystem	26
1.4.3.2	Ketten-Zählpeilsystem	26

2 Gleichstromnetzwerke	27
2.1 Grundgesetze im unverzweigten Gleichstromkreis	27
2.1.1 Ohmsches Gesetz	27
2.1.1.1 Zusammenhang zwischen Strom und Spannung	28
2.1.1.2 Elektrischer Leitwert, elektrischer Widerstand	28
2.1.2 Elektrische Widerstände	31
2.1.2.1 Elektrische Leitfähigkeit, spezifischer elektrischer Widerstand	31
2.1.2.2 Lineare Widerstände	35
2.1.2.3 Nichtlineare Widerstände	36
2.1.2.4 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes	37
2.1.2.5 Memristor	40
2.1.2.6 Ausführungsformen von Widerständen	41
2.1.3 Elektrische Quellen	43
2.1.3.1 Ideale Spannungsquelle	44
2.1.3.2 Ideale Stromquelle	45
2.1.3.3 Allgemeine lineare Quelle	46
2.1.3.4 Lineare Spannungsquelle, lineare Stromquelle	49
2.1.3.5 Reale Quellen	50
2.1.4 Energie und Leistung	53
2.1.4.1 Energieumsatz von Zweipolen	53
2.1.4.2 Leistungsumsatz von Zweipolen	55
2.1.4.3 Interpretation von berechneten Leistungen	56
2.1.4.4 Verluste und Wirkungsgrad	57
2.1.4.5 Leerlauf, Kurzschluss und Leistungsanpassung bei linearen Quellen	59
2.1.4.6 Leistungsbilanz	62
2.2 Verzweigte Gleichstromkreise	63
2.2.1 Knoten, Zweig, Masche	64
2.2.1.1 Knoten	64
2.2.1.2 Zweig	64
2.2.1.3 Masche	65
2.2.2 Kirchhoffsche Gesetze	65
2.2.2.1 Knotensatz (1. Kirchhoffsches Gesetz)	65
2.2.2.2 Maschensatz (2. Kirchhoffsches Gesetz)	66
2.2.3 Parallelschaltung von Widerständen	68
2.2.3.1 Gesamtwiderstand	68
2.2.3.2 Stromteilerregel	71
2.2.4 Reihenschaltung von Widerständen	72
2.2.4.1 Gesamtwiderstand	72
2.2.4.2 Spannungsteilerregel	74
2.2.5 Gemischte Schaltungen	75
2.2.5.1 Belasteter Spannungsteiler	75
2.2.5.2 Mehrstufiger Spannungsteiler	76
2.2.6 Brückenschaltungen	79
2.2.6.1 Struktur	79
2.2.6.2 Abgleichbedingung	79

2.2.7	Sternschaltungen, Dreieckschaltungen	80
2.2.7.1	Struktur	80
2.2.7.2	Dreieck-Stern-Transformation	81
2.2.7.3	Stern-Dreieck-Transformation	82
2.3	Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung	85
2.3.1	Ideale und reale Strommesser	85
2.3.2	Ideale und reale Spannungsmesser	86
2.3.3	Indirekte Strommessung	86
2.3.4	Stromrichtiges und spannungsrichtiges Messen	87
2.3.5	Leistungsmessung	88
2.3.6	Kompensationsmessverfahren	88
2.4	Analyse linearer Gleichstromnetzwerke	90
2.4.1	Grundlagen	90
2.4.1.1	Kennzeichen linearer Gleichstromnetzwerke	90
2.4.1.2	Bei der Netzwerkanalyse zu lösende mathematische Aufgabe	92
2.4.1.3	Topologie und Graph eines Netzwerks	93
2.4.1.4	Vollständiger Baum eines Graphen	93
2.4.1.5	Baumzweige, Verbindungszweige	94
2.4.1.6	Netzwerkumformung	94
2.4.2	Rekursive Berechnung	98
2.4.3	Knoten- und Maschenanalyse	100
2.4.3.1	Prinzip des Verfahrens	100
2.4.3.2	Vorgehensweise	101
2.4.3.3	Matrixschreibweise des Gleichungssystems	101
2.4.3.4	Modifiziertes Verfahren zur Behandlung von Stromquellen	105
2.4.4	Anwendung des Überlagerungssatzes	107
2.4.4.1	Prinzip des Verfahrens	107
2.4.4.2	Vorgehensweise	108
2.4.5	Netzwerkanalyse mit Ersatz-Quellen	112
2.4.5.1	Prinzip des Verfahrens	112
2.4.5.2	Ersatz-Spannungsquelle	113
2.4.5.3	Ersatz-Stromquelle	114
2.4.5.4	Vorgehensweise	115
2.4.6	Maschenstromverfahren	120
2.4.6.1	Prinzip des Verfahrens	120
2.4.6.2	Behandlung von Stromquellen	123
2.4.6.3	Vorgehensweise	125
2.4.6.4	Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung	127
2.4.7	Knotenpotenzialverfahren	132
2.4.7.1	Prinzip des Verfahrens	132
2.4.7.2	Behandlung von Spannungsquellen	134
2.4.7.3	Vorgehensweise	134
2.4.7.4	Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung	137
2.4.8	Vergleich der Berechnungsverfahren	142
2.5	Analyse nichtlinearer elektrischer Netzwerke	143
2.5.1	Linearisierung im Arbeitspunkt	143
2.5.2	Grafische Arbeitspunktbestimmung	147

2.5.3	Stabilität des Arbeitspunktes	148
2.5.4	Numerische Berechnung	150
2.6	Grundlagen der numerischen Netzwerkanalyse	151
2.6.1	Das Programm SPICE	151
2.6.2	Datenfluss in Netzwerkanalyse-Programmen	152
2.6.3	Struktur einer integrierten Schaltungssimulations-Umgebung	154
2.6.4	Das SPICE Netzlistenformat	155
2.6.5	Berechnung linearer Gleichstromnetzwerke mit SPICE im Stapelbetrieb	156
3	Elektrisches Potenzialfeld	158
3.1	Definition und Wirkung der elektrischen Ladung	158
3.1.1	Definition der elektrischen Ladung	159
3.1.1.1	Reale Ladungsverteilungen und ihre Beschreibung	160
3.1.1.2	Ladungserhaltungssatz und Kontinuitätsgleichung	164
3.1.2	Wirkungen der elektrischen Ladung	166
3.1.2.1	Coulombsches Gesetz	166
3.1.2.2	Feldwirkung der elektrischen Ladung	168
3.2	Elektrisches Strömungsfeld	171
3.2.1	Wesen und Darstellung des elektrischen Strömungsfeldes	171
3.2.1.1	Driftladung	171
3.2.1.2	Driftgeschwindigkeit und elektrische Stromdichte	172
3.2.2	Stromdichte und Strom	175
3.2.3	Elektrische Feldstärke und elektrische Spannung	180
3.2.4	Elektrisches Potenzial	185
3.2.5	Leistungsdichte im elektrischen Strömungsfeld	190
3.3	Elektrisches Feld in Nichtleitern	191
3.3.1	Wesen und Darstellung des elektrischen Feldes in Nichtleitern	191
3.3.2	Elektrische Feldstärke und Spannung	192
3.3.3	Elektrisches Potenzial und Eigenschaften des Potenzialfeldes	196
3.3.4	Elektrische Flussdichte und elektrischer Fluss	199
3.3.5	Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und Spannung	204
3.3.5.1	Kapazität	205
3.3.5.2	Zeitliche Änderung von Strom und Spannung im Kondensator	209
3.3.5.3	Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren	209
3.3.6	Energie und Kräfte im elektrischen Feld	212
3.3.6.1	Gespeicherte Energie im elektrischen Feld	212
3.3.6.2	Verlustleistung im elektrischen Feld	215
3.3.6.3	Kräfte auf Grenzflächen im elektrischen Feld	216
4	Magnetisches Feld	218
4.1	Beschreibung und Berechnung des magnetischen Feldes	218
4.1.1	Wesen und Darstellung des magnetischen Feldes	218
4.1.1.1	Wirkungen und Ursachen des magnetischen Feldes	218
4.1.1.2	Feldbilder und Feldlinien	219
4.1.1.3	Feldrichtung und Polarität	220
4.1.2	Vektorielle Feldgrößen des magnetischen Feldes	221
4.1.2.1	Magnetische Flussdichte	221

4.1.2.2	Elektrische Durchflutung	224
4.1.2.3	Magnetische Feldstärke	226
4.1.2.4	Einheiten der magnetischen Feldgrößen	227
4.1.3	Integrale Größen des magnetischen Feldes	229
4.1.3.1	Magnetische Spannung	229
4.1.3.2	Durchflutungssatz	230
4.1.3.3	Magnetischer Fluss	238
4.1.3.4	Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises	243
4.1.4	Überlagerung magnetischer Felder	246
4.1.5	Magnetisches Feld in Materie	248
4.1.5.1	Verhalten von Materie im Magnetfeld	249
4.1.5.2	Brechung magnetischer Feldlinien an Grenzflächen	250
4.2	Magnetisches Feld in Ferromagnetika	251
4.2.1	Ferromagnetische Eigenschaften	251
4.2.1.1	Hystereseschleife	252
4.2.1.2	Magnetisierungskurve	254
4.2.1.3	Permeabilität und Suszeptibilität	257
4.2.1.4	Dauermagnete	259
4.2.2	Berechnung des magnetischen Feldes in Eisenkreisen	259
4.2.2.1	Magnetische Streuung und Randverzerrung	260
4.2.2.2	Berechnung der elektrischen Durchflutung	261
4.3	Wirkungen im magnetischen Feld	268
4.3.1	Spannungserzeugung im magnetischen Feld, elektrisches Wirbelfeld	268
4.3.1.1	Induktionswirkung im bewegten Leiter	269
4.3.1.2	Induktionswirkung im zeitvarianten Magnetfeld	274
4.3.1.3	Induktionsgesetz	278
4.3.1.4	Selbstinduktionsspannung	283
4.3.1.5	Selbst- und Gegeninduktivität	285
4.3.1.6	Selbst- und Gegeninduktionsspannung im Verbraucher-Zählpfeilsystem	290
4.3.1.7	Wirbelströme	290
4.3.2	Energie und Kräfte im magnetischen Feld	291
4.3.2.1	Energie des magnetischen Feldes	292
4.3.2.2	Kraftwirkung auf Grenzflächen	294
4.3.2.3	Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld	299
4.3.2.4	Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern	304
4.4	Vergleich der elementaren elektrischen und magnetischen Felder	305
4.5	Maxwellsche Gleichungen	306
5	Wechselstromtechnik	309
5.1	Periodische Zeitfunktionen	310
5.1.1	Periodendauer, Grundfrequenz, Grundkreisfrequenz	310
5.1.2	Maximalwert, Minimalwert, Spitze-Spitze-Wert	311
5.1.3	Arithmetischer Mittelwert	311
5.1.4	Wechselgrößen, Mischgrößen	312
5.1.5	Scheitelwert	312
5.1.6	Gleichrichtwert	312

5.1.7	Effektivwert	313
5.1.8	Scheitelfaktor, Formfaktor	315
5.2	Sinusgrößen	316
5.2.1	Erzeugung von Sinusspannungen	316
5.2.2	Kennwerte von Sinusgrößen	317
5.2.2.1	Amplitude	318
5.2.2.2	Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz	318
5.2.2.3	Nullphasenwinkel, Nullzeit	318
5.2.2.4	Phasenverschiebungswinkel	320
5.2.2.5	Arithmetischer Mittelwert	321
5.2.2.6	Gleichrichtwert	321
5.2.2.7	Effektivwert	322
5.2.2.8	Scheitelfaktor, Formfaktor	323
5.2.3	Beschreibung von Sinusgrößen durch Zeiger	323
5.2.4	Zählpfeile für Sinusgrößen	325
5.2.5	Addition und Subtraktion gleichfrequenter Sinusgrößen	326
5.2.6	Differenziation und Integration von Sinusgrößen	329
5.3	Komplexe Größen der Sinusstromtechnik	330
5.3.1	Darstellung komplexer Größen	331
5.3.2	Rechenregeln für komplexe Größen	333
5.3.3	Komplexe Gleichungen	337
5.3.4	Komplexe Spannungen und Ströme	338
5.3.4.1	Komplexe Scheitelwertzeiger	338
5.3.4.2	Komplexe Effektivwertzeiger	339
5.3.5	Komplexe Widerstände und Leitwerte	341
5.4	Leistung in Sinusstromnetzwerken	344
5.4.1	Wirkleistung	344
5.4.2	Scheinleistung	345
5.4.3	Komplexe Leistung	345
5.4.4	Leistungsfaktor	347
5.5	Ideale passive Zweipole bei Sinusstrom	347
5.5.1	Ohmscher Widerstand	348
5.5.1.1	Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel	348
5.5.1.2	Wirkwiderstand und Wirkleitwert	349
5.5.1.3	Wirkleistung	351
5.5.2	Induktivität	352
5.5.2.1	Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel	352
5.5.2.2	Induktiver Blindwiderstand und induktiver Blindleitwert	353
5.5.2.3	Induktive Blindleistung	356
5.5.3	Kapazität	357
5.5.3.1	Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel	357
5.5.3.2	Kapazitiver Blindwiderstand und Blindleitwert	358
5.5.3.3	Kapazitive Blindleistung	361
5.5.4	Gegenüberstellung der idealen passiven Zweipole	362
5.6	Kirchhoffsche Gesetze	364
5.6.1	Knotensatz	364
5.6.2	Maschensatz	365

5.7	Reihen- und Parallelschaltung passiver Zweipole	367
5.7.1	Reihenschaltung passiver Zweipole	367
5.7.1.1	Gesamtimpedanz	367
5.7.1.2	Spannungsteilerregel	368
5.7.1.3	Reihenschaltungen der Grundzweipole	369
5.7.2	Parallelschaltung passiver Zweipole	376
5.7.2.1	Gesamtadmittanz	376
5.7.2.2	Stromteilerregel	378
5.7.2.3	Parallelschaltungen der Grundzweipole	379
5.8	Gemischte Schaltungen	385
5.9	Analogien zwischen Gleich- und Sinusstromnetzwerken	388
5.10	Dualitätsbeziehungen bei Sinusstromnetzwerken	390
5.11	Leistung in Sinusstromnetzwerken	393
5.11.1	Addition von Leistungen, Leistungsbilanzen	393
5.11.2	Blindleistungskompensation	395
5.11.3	Leistungsanpassung	400
5.11.4	Leistungsmessung	402
5.12	Ersatzschaltungen realer passiver Zweipole	404
5.12.1	Verlustwinkel	404
5.12.2	Verlustfaktor	404
5.12.3	Güte	405
5.12.4	Modelle realer passiver Zweipole	405
5.12.4.1	Bedingt und unbedingt äquivalente Schaltungen	405
5.12.4.2	Reihen-Ersatzschaltungen	405
5.12.4.3	Parallel-Ersatzschaltungen	409
5.12.4.4	Gemischte Ersatzschaltungen	412
5.13	Transformator	414
5.13.1	Idealer Transformator	415
5.13.2	Verlust- und streuungsloser Transformator	419
5.13.3	Transformator mit Streuung ohne Verluste	425
5.13.4	Transformator mit Streuung und Kupferverlusten	426
5.13.5	Transformator mit Streuung und Verlusten	428
5.13.6	Vereinfachte Ersatzschaltung mit reduzierten Größen	429
6	Ortskurven	430
6.1	Grundlagen	430
6.2	Konstruktion einfacher Ortskurven	432
6.3	Inversion von Ortskurven	440
6.4	Betrags- und Phasenwinkeldiagramme	444
7	Filterschaltungen und Schwingkreise	446
7.1	Filterschaltungen	446
7.1.1	Grundlegende Begriffe	447
7.1.1.1	Übertragungsfunktion	447
7.1.1.2	Ordnung eines Filters	448
7.1.1.3	Betragsfrequenzgang	448
7.1.1.4	Phasenfrequenzgang	449

7.1.1.5	Pegel, Dämpfung	449
7.1.1.6	Bode-Diagramm, Eckfrequenz	450
7.1.1.7	Grenzfrequenz, Durchlassbereich, Sperrbereich	451
7.1.2	Einfache Filterschaltungen	451
7.1.2.1	Tiefpässe	451
7.1.2.2	Hochpässe	459
7.1.2.3	Bandpässe	463
7.1.2.4	Bandsperren	467
7.1.2.5	Allpässe	467
7.2	Schwingkreise	468
7.2.1	Freie Schwingungen	469
7.2.2	Erzwungene Schwingungen	470
7.2.3	Kenngrößen von Schwingkreisen	471
7.2.3.1	Resonanzbedingung, Resonanzfrequenz, Kennfrequenz	472
7.2.3.2	Normierte Frequenz, Verstimmung	472
7.2.3.3	Kennwiderstand, Kennleitwert	472
7.2.3.4	Güte, Dämpfung	473
7.2.3.5	Grenzfrequenzen, Bandbreite	473
7.2.4	Elementare Schwingkreise	474
7.2.4.1	Elementarer Reihenschwingkreis	474
7.2.4.2	Elementarer Parallelschwingkreis	482
7.2.4.3	Vergleich der elementaren Schwingkreise	484
7.2.5	Nichtelementare Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad	486
7.2.6	Schwingkreise mit mehreren Freiheitsgraden	489
8	Mehrphasensysteme	492
8.1	Verkettete Mehrphasensysteme	492
8.1.1	Schaltungsarten	492
8.1.1.1	Mehrphasengenerator	492
8.1.1.2	Sternschaltung	495
8.1.1.3	Ringschaltung	495
8.1.2	Zweiphasensysteme	495
8.1.2.1	Symmetrisches Zweiphasensystem	495
8.1.2.2	Unsymmetrisches Zweiphasensystem	496
8.1.2.3	Drehfelderzeugung	498
8.2	Symmetrisches Dreiphasensystem	498
8.2.1	Spannungen und Ströme	499
8.2.1.1	Benennungen	499
8.2.1.2	Spannungen	499
8.2.1.3	Symmetrische Sternschaltung	501
8.2.1.4	Symmetrische Dreieckschaltung	502
8.2.2	Leistung bei symmetrischer Last	504
8.2.2.1	Augenblicksleistung	504
8.2.2.2	Wirk-, Blind- und Scheinleistung	504
8.2.2.3	Blindleistungskompensation	506

8.3	Unsymmetrische Dreiphasenbelastung	507
8.3.1	Vierleiternetz	508
8.3.1.1	Allgemeine Belastung	508
8.3.1.2	Leistungsmessung	510
8.3.2	Dreileiternetz	512
8.3.2.1	Dreieckschaltung	512
8.3.2.2	Sternschaltung	513
8.3.2.3	Leistungsmessung	515
9	Nichtsinusförmige Ströme und Spannungen	516
9.1	Fourier-Analyse periodischer Zeitfunktionen	516
9.1.1	Aufgabenstellung	517
9.1.1.1	Näherungsfunktion	517
9.1.1.2	Approximation nach dem kleinsten mittleren Fehlerquadrat	518
9.1.2	Fourier-Reihen	520
9.1.2.1	Berechnung der Fourier-Koeffizienten	520
9.1.2.2	Unendliche Fourier-Reihe	523
9.1.2.3	Sonderfälle	523
9.1.2.4	Komplexe Fourier-Reihe	526
9.1.3	Kennwerte periodischer Größen	527
9.1.3.1	Effektivwert	527
9.1.3.2	Schwingungsgehalt, Welligkeit, Grundschwingungsgehalt, Klirrfaktor, Total Harmonic Distortion	528
9.1.4	Nichtsinusförmige Wechselgrößen in linearen Netzwerken	533
9.1.4.1	Lineare Verzerrungen	533
9.1.4.2	Differenziation und Integration nichtsinusförmiger Wechselgrößen	535
9.2	Nichtlineare Wechselstromnetzwerke	539
9.2.1	Nichtlineare Verzerrungen	539
9.2.2	Gleichrichterschaltungen	541
9.2.3	Spule mit ferromagnetischem Kern (Eisendrossel)	544
9.2.4	Leistung bei nicht sinusförmigen Klemmengrößen	545
9.2.4.1	Nichtsinusförmige Spannungen und Ströme	545
9.2.4.2	Nichtlineare Zweipole an Sinusspannung	546
9.3	Schaltvorgänge in linearen elektrischen Netzwerken	550
9.3.1	Berechnungsverfahren	550
9.3.1.1	Aufstellen der Differenzialgleichung	550
9.3.1.2	Lösungsverfahren	552
9.3.1.3	Exponentialansatz	553
9.3.1.4	Partikuläre Lösung	554
9.3.2	Schalten von Gleichströmen und -spannungen	555
9.3.2.1	Idealisiertes Einschalten von RC- und RL-Schaltungen	555
9.3.2.2	Idealisiertes Ausschalten von RC- und RL-Schaltungen	561
9.3.2.3	Schalten von Schwingkreisen	564
9.3.3	Schalten von Sinusströmen und -spannungen	572
9.3.3.1	Schalten einer RL-Reihenschaltung an eine Sinusspannung	573
9.3.3.2	Schalten einer RC-Reihenschaltung an eine Sinusspannung	576
9.3.3.3	Schalten eines Reihenschwingkreises an eine Sinusspannung	577

9.3.3.4	Ausschalten von Sinusströmen	580
10	Elektrische Leitungsmechanismen	581
10.1	Elektrische Leitung im Vakuum	581
10.1.1	Elektronenemission in das Vakuum	581
10.1.2	Elektronenströmung im Vakuum	583
10.1.2.1	Bewegung im elektrischen Feld	583
10.1.2.2	Bewegung im magnetischen Feld	588
10.1.3	Technische Nutzung	590
10.1.3.1	Elektronenröhre ohne Gitter	590
10.1.3.2	Elektronenröhre mit Gitter	593
10.1.3.3	Oszilloskop-Röhren	594
10.1.3.4	Röntgenröhren	596
10.2	Elektrische Leitung in Gasen	596
10.2.1	Ladungsträger in Gasen	596
10.2.2	Generation und Rekombination von Ladungsträgern	597
10.2.3	Entladungsformen	600
10.2.3.1	Unselbstständige Entladung	600
10.2.3.2	Selbstständige Entladung	601
10.2.4	Technische Nutzung der Gasentladung	605
10.3	Elektrische Leitung in Flüssigkeiten	606
10.3.1	Mechanismus der elektrolytischen Leitung	606
10.3.2	Ladungs-, Massen- und Strombilanzen	608
10.3.2.1	Faradaysche Gesetze	608
10.3.2.2	Elektrolytische Spannung galvanischer Zellen	610
10.3.2.3	Zersetzungs- und Polarisations-Spannung	610
10.3.3	Technische Nutzung elektrischer Leitung in Flüssigkeiten	612
10.3.3.1	Elektrochemische Stromerzeuger	612
10.3.3.2	Elektrolyse, Galvanik und Korrosion	615
10.4	Elektrische Leitung in homogenen kristallinen Festkörpern	616
10.4.1	Kristallaufbau von Metallen, Halbleitern und Isolatoren	616
10.4.2	Energiebändermodell	619
10.4.2.1	Energiewerte der Elektronen im Einzelatom	619
10.4.2.2	Energiewerte der Elektronen im kristallinen Festkörper, Klassifizierung nach Metallen, Halbleitern und Isolatoren	620
10.4.3	Elektrische Leitung in Metallen	626
10.4.3.1	Normalleitung	626
10.4.3.2	Supraleitung	627
10.4.3.3	Technische Nutzung	628
10.4.4	Elektrische Leitung in Halbleitern	629
10.4.4.1	Eigenleitung	629
10.4.4.2	Störstellenleitung	632
10.4.4.3	Feld- und Diffusionsstrom	637
10.4.4.4	Stromleitung bei Lichteinstrahlung, Photowiderstand	637
10.4.4.5	Stromleitung bei Magnetfeldeinwirkung, Feldplatte	638
10.4.5	Elektrische Leitung in Isolatoren	639

10.5	Elektrische Leitung in geschichteten kristallinen Festkörpern	640
10.5.1	Der pn-Übergang	640
10.5.2	Halbleiterdioden	646
10.5.2.1	Strom-Spannungs-Charakteristik eines realen pn-Übergangs	646
10.5.2.2	Gleichrichter- und Misch-Dioden	648
10.5.2.3	Z-Dioden	650
10.5.2.4	Schaltdioden	653
10.5.2.5	Varaktordioden	654
10.5.2.6	pin-Dioden	655
10.5.2.7	Aktive Mikrowellendioden	655
10.5.3	Transistoren	661
10.5.3.1	Feldeffekttransistoren	662
10.5.3.2	Bipolartransistoren	668
10.5.4	Thyristoren	670
10.5.4.1	Thyristor-Dioden	670
10.5.4.2	Thyristor	671
10.5.4.3	Vom Thyristor abgeleitete Bauelemente	673
10.5.5	Stromleitung bei Lichteinwirkung	675
10.5.5.1	Lichtdetektoren	675
10.5.5.2	Lichtemitter	677
10.5.5.3	Optoelektronische Koppler	679
10.5.6	Integrierte Schaltungen	680
10.5.6.1	Allgemeine Gesichtspunkte	680
10.5.6.2	Schaltungsfamilien	681
Literaturverzeichnis		684
A Anhang		688
A.1	Griechisches Alphabet	688
A.2	SI-Einheiten	688
A.3	Elektrische Leitungseigenschaften einiger Werkstoffe	690
A.4	Schaltzeichen	691
A.5	Symbole und Schreibweisen	692
A.6	Indizes	692
A.7	Formelzeichen	693
A.8	Werte der Normreihe E 24	695
A.9	Werte wichtiger Naturkonstanten	695
Stichwortverzeichnis		696

Liste der Beispiele

1.1	Beispiel (Rechnen mit kohärenten Einheiten)	4
1.2	Beispiel (Rechnen mit inkohärenten Einheiten)	4
1.3	Beispiel (Anwendung einer zugeschnittenen Größengleichung)	8
1.4	Beispiel (Anwendung einer zugeschnittenen Größengleichung)	9
1.5	Beispiel (Driftgeschwindigkeit der Elektronen in metallischen Leitern)	13
1.6	Beispiel (Potenzialbetrachtungen bei einer Batterie)	17
2.1	Beispiel (Berechnung des Stroms durch einen Ohmschen Widerstand)	29
2.2	Beispiel (Parameter eines Ohmschen Widerstandes)	30
2.3	Beispiel (Widerstand einer zweiadrigen Leitung)	33
2.4	Beispiel (Länge eines Widerstandsdrahtes)	33
2.5	Beispiel (Ersatz einer Kupferleitung durch eine widerstandsgleiche Aluminiumleitung)	33
2.6	Beispiel (Ersatz einer Aluminiumleitung durch eine Kupferleitung gleicher Abmessungen)	34
2.7	Beispiel (Strom durch eine große Glasplatte)	34
2.8	Beispiel (Temperaturabhängigkeit des Widerstandes einer Glühlampe)	38
2.9	Beispiel (Einschaltstrom und Betriebsstrom einer Glühlampe)	39
2.10	Beispiel (Indirekte Messung der Wicklungstemperatur einer elektrischen Maschine)	40
2.11	Beispiel (Abhängigkeit des Widerstandswertes von der Spannung bei einem Varistor)	43
2.12	Beispiel (Modellierung eines Akkumulators durch eine lineare Quelle)	52
2.13	Beispiel (Modellierung einer elektronischen Konstantstromquelle durch eine lineare Quelle)	52
2.14	Beispiel (Energieumsatz einer Kühltasche)	55
2.15	Beispiel (Maximale Betriebsspannung eines Widerstandes)	56
2.16	Beispiel (Betrieb eines Widerstandes mit halber Nennleistung)	56
2.17	Beispiel (Leistungsaufnahme und Verluste eines Elektromotors)	58
2.18	Beispiel (Maximale Leistungsabgabe einer linearen Quelle)	61
2.19	Beispiel (Anwendung des Knotensatzes)	66
2.20	Beispiel (Anwendung des Maschensatzes)	67
2.21	Beispiel (Parallelschaltung von drei Widerständen)	70
2.22	Beispiel (Dimensionierung einer Parallelschaltung von Widerständen)	70
2.23	Beispiel (Stromaufteilung bei Parallelschaltung von drei Widerständen)	72
2.24	Beispiel (Reihenschaltung von drei Widerständen)	73
2.25	Beispiel (Zweistufiger Spannungsteiler)	78
2.26	Beispiel (Widerstand eines Zweipols aus Stern- und Dreieckschaltungen)	83
2.27	Beispiel (Widerstand einer Brückenschaltung)	84
2.28	Beispiel (Spannungsmessung mittels Kompensationsschaltung)	89
2.29	Beispiel (Schrittweise Vereinfachung einer Schaltung)	96
2.30	Beispiel (Zusammenfassen von Quellen)	97
2.31	Beispiel (Rekursive Berechnung einer Abzweigschaltung)	99

2.32	Beispiel (Anwendung der Knoten- und Maschenanalyse auf ein Netzwerk mit linearen Spannungsquellen)	102
2.33	Beispiel (Berechnung des Laststroms als Funktion des Lastwiderstandes)	103
2.34	Beispiel (Anwendung der Knoten- und Maschenanalyse auf ein Netzwerk mit Stromquelle)	106
2.35	Beispiel (Anwendung des Überlagerungssatzes auf ein einfaches Netzwerk) . . .	108
2.36	Beispiel (Reihenschaltung linearer Quellen an einem Lastwiderstand)	110
2.37	Beispiel (Parallelschaltung linearer Quellen an einem Lastwiderstand)	111
2.38	Beispiel (Veranschaulichung des Satzes von Helmholtz)	113
2.39	Beispiel (Bestimmung der Parameter einer Ersatz-Spannungsquelle)	116
2.40	Beispiel (Bestimmung der Parameter einer Ersatz-Stromquelle)	117
2.41	Beispiel (Anwendung einer Ersatz-Spannungsquelle zur Netzwerkanalyse)	118
2.42	Beispiel (Zusammenhang zwischen Maschenströmen und Zweigströmen)	120
2.43	Beispiel (Auswirkung der Baumstruktur auf die Komplexität der Maschengleichungen)	121
2.44	Beispiel (Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein Netzwerk ohne Stromquellen)	122
2.45	Beispiel (Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein einfaches Netzwerk mit Stromquelle)	123
2.46	Beispiel (Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung bei einem Netzwerk ohne Stromquellen)	128
2.47	Beispiel (Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein Netzwerk mit allen Quellenarten)	129
2.48	Beispiel (Aufstellen der Knotengleichungen bei einem Netzwerk aus Widerständen und Stromquelle)	132
2.49	Beispiel (Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens auf ein Netzwerk ohne ideale Spannungsquellen)	136
2.50	Beispiel (Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung bei einem Netzwerk ohne ideale Spannungsquellen)	138
2.51	Beispiel (Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens auf ein Netzwerk mit allen Quellenarten)	139
2.52	Beispiel (Annäherung einer Diodenkennlinie durch eine Gerade)	143
2.53	Beispiel (Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode)	144
2.54	Beispiel (Grafische Arbeitspunktbestimmung bei einem nichtlinearen Netzwerk)	147
2.55	Beispiel (Untersuchung der Stabilität von Arbeitspunkten einer Gasentladungsstrecke)	149
2.56	Beispiel (Netzliste zur Analyse der Schaltung in Beispiel 2.44)	156
3.1	Beispiel (Raumladungsdichte des Elektrons)	163
3.2	Beispiel (Verhältnis von Coulomb- zu Gravitationskraft)	167
3.3	Beispiel (Berechnung des Stroms in einem homogenen Strömungsfeld)	177
3.4	Beispiel (Strömungsfeld in einer Trockenzelle)	179
3.5	Beispiel (Strömungsfeld in einer Kreisringscheibe)	184
3.6	Beispiel (Strömungsfeld eines Halbkugelerders)	187
3.7	Beispiel (Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld)	195
3.8	Beispiel (Elektrisches Feld innerhalb eines Koaxialkabels)	202
3.9	Beispiel (Kapazitätsbelag eines Koaxialkabels)	207

3.10	Beispiel (Elektrodenfläche eines Folienkondensators)	209
3.11	Beispiel (Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum)	210
3.12	Beispiel (Blitzkondensator)	215
4.1	Beispiel (Hall-Sensor)	223
4.2	Beispiel (Dimensionierung einer Ringspule)	228
4.3	Beispiel (Magnetfeld in einer Ringspule)	231
4.4	Beispiel (Magnetfeld außerhalb eines langen, geraden Leiters)	233
4.5	Beispiel (Magnetfeld innerhalb eines langen, geraden Leiters)	234
4.6	Beispiel (Magnetische Umlaufspannungen)	235
4.7	Beispiel (Durchflutungen bei einem Dreiphasentransformator)	236
4.8	Beispiel (Magnetischer Fluss eines langen, geraden Leiters)	240
4.9	Beispiel (Ruhende Leiterschleife im homogenen Magnetfeld)	241
4.10	Beispiel (Drehende Leiterschleife im homogenen Magnetfeld)	242
4.11	Beispiel (Überlagerung der Magnetfelder dreier paralleler Leiter)	247
4.12	Beispiel (Magnetisierung von Elektroblech)	254
4.13	Beispiel (Magnetfeld in einem Eisenring)	256
4.14	Beispiel (Magnetfeld in einem Eisenring mit Luftspalt)	263
4.15	Beispiel (Elektromagnet)	264
4.16	Beispiel (Magnetisierungskennlinie bei einem Eisenkreis mit Luftspalt)	265
4.17	Beispiel (Ermittlung der Luftspaltflussdichte)	266
4.18	Beispiel (Dimensionierung eines verzweigten Eisenkreises)	266
4.19	Beispiel (Unipolarmaschine im Leerlauf)	271
4.20	Beispiel (Unipolarmaschine unter Last)	273
4.21	Beispiel (Spannungsinduktion durch einen Mischstrom)	276
4.22	Beispiel (Spannungsinduktion in einer sich drehenden Leiterschleife)	279
4.23	Beispiel (Spannungsinduktion bei zeitvariantem Magnetfeld)	281
4.24	Beispiel (Unipolarmaschine im Leerlauf)	281
4.25	Beispiel (Selbstinduktivität einer langen, dünnen Luftspule)	286
4.26	Beispiel (Äußerer Induktivitätsbelag einer Doppelleitung)	287
4.27	Beispiel (Mechanische Zugspannung bei einem Elektromagneten)	296
4.28	Beispiel (Mechanische Spannung bei einer Spule mit Tauchanker)	297
4.29	Beispiel (Drehmoment eines Scheibenläufermotors)	300
4.30	Beispiel (Kräfte auf parallele Leiter bei Kurzschlussstrom)	305
5.1	Beispiel (Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom)	321
5.2	Beispiel (Überlagerung von Sinusspannungen im Zeitbereich)	328
5.3	Beispiel (Komplexer Spannungszeiger und Augenblickswert der Spannung)	339
5.4	Beispiel (Induktivitätsberechnung aus den Klemmengrößen)	355
5.5	Beispiel (Frequenzabhängigkeit eines induktiven Blindwiderstandes)	355
5.6	Beispiel (Frequenzabhängigkeit des Einflusses einer parasitären Kapazität)	360
5.7	Beispiel (Modell eines von einem zeitvarianten Magnetfeld durchsetzten Stromkreises)	366
5.8	Beispiel (Reihenschaltung von Impedanzen)	369
5.9	Beispiel (Sinusstromverhalten von RL-Reihenschaltungen)	370
5.10	Beispiel (Sinusstromverhalten von RC-Reihenschaltungen)	372
5.11	Beispiel (Sinusstromverhalten von RLC-Reihenschaltungen)	373

5.12	Beispiel (Gleicher Scheinwiderstand einer RLC-Reihenschaltung bei verschiedenen Frequenzen)	375
5.13	Beispiel (Strom durch eine Parallelschaltung mehrerer Impedanzen)	377
5.14	Beispiel (Sinusstromverhalten von GC-Parallelschaltungen)	379
5.15	Beispiel (Impedanz und Leistungsumsatz einer GC-Parallelschaltung)	381
5.16	Beispiel (Sinusstromverhalten von GL-Parallelschaltungen)	382
5.17	Beispiel (Sinusstromverhalten von GCL-Parallelschaltungen)	383
5.18	Beispiel (Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm und Admittanz einer gemischten Schaltung)	385
5.19	Beispiel (Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm und Impedanz einer gemischten Schaltung)	387
5.20	Beispiel (Umrechnung einer II-Schaltung in eine äquivalente T-Schaltung) . . .	389
5.21	Beispiel (Klemmenverhalten einer Sinusstrom-Brückenschaltung)	389
5.22	Beispiel (Anwendung der Dualitätsbeziehungen bei der Schaltungsanalyse) . . .	391
5.23	Beispiel (Leistungen in einer gemischten Schaltung)	394
5.24	Beispiel (Blindleistungskompensation eines Wechselstrommotors)	397
5.25	Beispiel (Betriebschaltungen von Leuchtstofflampen)	398
5.26	Beispiel (Blindleistungsmessung unter Verwendung der Hummel-Schaltung) . . .	402
5.27	Beispiel (Reihen-Ersatzschaltung einer Spule)	406
5.28	Beispiel (Reihen-Ersatzschaltung eines Kondensators)	408
5.29	Beispiel (Parallel-Ersatzschaltung einer Spule)	410
5.30	Beispiel (Parallel-Ersatzschaltung eines Kondensators)	411
5.31	Beispiel (Ersatzschaltung einer Spule mit ferromagnetischem Kern)	413
5.32	Beispiel (Impedanztransformation)	417
5.33	Beispiel (Transformatorgleichungen bei gleichsinnigem Wicklungssinn)	420
5.34	Beispiel (Transformatorgleichungen bei gegensinnigem Wicklungssinn)	421
5.35	Beispiel (Betriebsverhalten des verlust- und streuungslosen Transformators) . .	423
5.36	Beispiel (Verlustloser Übertrager mit Streuung)	425
6.1	Beispiel (Entwicklung der Impedanz-Ortskurve einer RL-Reihenschaltung) . . .	431
6.2	Beispiel (Spannungs-Ortskurven einer RX-Reihenschaltung bei konstantem Klemmenstrom)	432
6.3	Beispiel (Quantitative Impedanz-Ortskurve einer RLC-Reihenschaltung)	434
6.4	Beispiel (Strom-Ortskurve einer RX-Reihenschaltung bei konstanter Klemmenspannung)	435
6.5	Beispiel (Quantitative Strom-Ortskurven in einer Parallelschaltung von Spule und Kondensator)	437
6.6	Beispiel (Quantitative Admittanz- und Impedanz-Ortskurven einer gemischten Schaltung)	438
6.7	Beispiel (Inversion einer Ortskurve, die ein Teil einer Geraden ist)	441
6.8	Beispiel (Schrittweise Konstruktion qualitativer Ortskurven mit mehrfacher Inversion)	443
7.1	Beispiel (Rechnen mit Pegeln)	450
7.2	Beispiel (Elementarer RC-Tiefpass)	452
7.3	Beispiel (Zweistufiger RC-Tiefpass)	455
7.4	Beispiel (Hochpass aus verlustbehafteter Spule und Widerstand)	459

7.5	Beispiel (Hochpass mit Grunddämpfung)	461
7.6	Beispiel (Bandpass aus einer Kettenschaltung zweier elementarer Passschaltungen)	463
7.7	Beispiel (Elementarer Reihenschwingkreis als Bandpass)	465
7.8	Beispiel (RC-Allpass 1. Ordnung)	467
7.9	Beispiel (Elementarer Reihenschwingkreis bei Spannungseinspeisung)	478
7.10	Beispiel (Parallelschwingkreis aus verlustbehafteten Bauelementen)	486
7.11	Beispiel (Schwingungsverhalten einer verfeinerten Schwingkreis-Ersatzschaltung)	490
8.1	Beispiel (Strangspannungen bei einem symmetrischen Dreiphasengenerator) . . .	493
8.2	Beispiel (Strangspannungen bei einem unsymmetrischen Dreiphasengenerator)	494
8.3	Beispiel (Symmetrischer Drehstromverbraucher am symmetrischen Netz)	502
8.4	Beispiel (Leistungsgleiche Verbraucher in Stern- und Dreieckschaltung)	503
8.5	Beispiel (Ohmscher Verbraucher am Einphasen- bzw. Dreiphasennetz)	505
8.6	Beispiel (Ströme und Leistungen bei unsymmetrischer Last am Vierleiternetz)	509
8.7	Beispiel (Ströme bei unsymmetrischer Last in Dreieckschaltung)	512
8.8	Beispiel (Ströme und Spannungen bei unsymmetrischer Last in Sternschaltung)	514
9.1	Beispiel (Approximation einer Funktion durch eine lineare Funktion)	518
9.2	Beispiel (Fourier-Koeffizienten einer symmetrischen Rechteckschwingung)	525
9.3	Beispiel (Fourier-Koeffizienten und Klirrfaktor einer symmetrischen Sägezahn- schwingung)	530
9.4	Beispiel (Fourier-Reihe und Klirrfaktor einer symmetrischen Rechteckschwingung)	532
9.5	Beispiel (Nichtsinusförmige Wechselgrößen an elementaren Zweipolen)	535
9.6	Beispiel (Fourier-Koeffizienten einer symmetrischen Dreieckschwingung)	539
9.7	Beispiel (Nichtlineare Verzerrungen an einem Varistor)	541
9.8	Beispiel (Dimensionierung einer Glättungsdrossel)	543
9.9	Beispiel (Durch Gleichrichtung verursachte Verzerrungsblindleistung)	548
9.10	Beispiel (Klemmenverhalten eines elementaren Reihenschwingkreises im Zeitbe- reich)	551
9.11	Beispiel (Übertragungsverhalten eines Übertragungsvierpols im Zeitbereich) . .	552
9.12	Beispiel (Einschaltvorgang in einem RC-Netzwerk)	558
9.13	Beispiel (Einschaltvorgang in einem RL-Netzwerk)	559
9.14	Beispiel (Ausschaltvorgang in einem RC-Netzwerk)	562
9.15	Beispiel (Ausschaltvorgang in einem RL-Netzwerk)	563
9.16	Beispiel (Einschalten einer Gleichspannung an einem RLC-Netzwerk)	568
9.17	Beispiel (Ausschaltvorgang in einem RLC-Netzwerk)	570
9.18	Beispiel (Einschalten einer Sinusspannung an einer RL-Reihenschaltung)	575
9.19	Beispiel (Einschalten einer Sinusspannung an einem elementaren RLC-Reihen- schwingkreis)	578
10.1	Beispiel (Elektronenlaufzeit in einer Zweielektrodenröhre)	585
10.2	Beispiel (Elektronengeschwindigkeit in einer Elektronenstrahlröhre)	586
10.3	Beispiel (Ablenkempfindlichkeit einer Oszillographenröhre)	588
10.4	Beispiel (Kreisbahn eines Elektronenstrahls im homogenen Magnetfeld)	589
10.5	Beispiel (Beweglichkeit und mittlere Lebensdauer von Stickstoffionen)	599
10.6	Beispiel (Abscheidung von Kupfer bei der Elektrolyse)	609
10.7	Beispiel (Leitfähigkeit von Salzsäure)	610
10.8	Beispiel (Energieaufwand bei der Schmelzelektrolyse von Aluminium)	612

10.9 Beispiel (Resonanz bei gekoppelten Schwingkreisen)	620
10.10 Beispiel (Ladungsträgerströmung in Silber)	627
10.11 Beispiel (Intrinsic-Leitfähigkeit von Germanium und Silizium)	632
10.12 Beispiel (Störstellenleitung in einem Germanium-Kristall)	635
10.13 Beispiel (Sperrschichtkapazität eines pn-Übergangs)	646
10.14 Beispiel (Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode)	652
10.15 Beispiel (Schwingkreis mit Varaktordiode)	654
10.16 Beispiel (Spannungsverstärkung eines Feldeffekttransistors)	665



1 Grundbegriffe

*Technik*¹ ist die praktische Nutzbarmachung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse. Die *Elektrotechnik* beschäftigt sich mit der Anwendung elektrischer und magnetischer Phänomene. Zur Beschreibung der Zusammenhänge wird eine Vielzahl von Begriffen, Größen und Einheiten benötigt, deren Charakter und Darstellungsformen im Folgenden zunächst vorgestellt werden. Danach werden die elektrischen Grundgrößen wie Strom und Spannung sowie fundamentale Begriffe der Elektrotechnik eingeführt. Abschließend werden die zur formal korrekten Darstellung vieler elektrotechnischer Zusammenhänge unerlässlichen Zählpfeilsysteme erläutert, die einen wesentlichen Unterschied zwischen der Fachdidaktik der Elektrotechnik und der Fachdidaktik der Physik darstellen. Damit wird die formale Grundlage für die Vermittlung des Lehrstoffs der nachfolgenden Kapitel geschaffen.

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

1.1.1 Physikalische Größen

Wenn man sich bemüht, physikalische oder technische Gegebenheiten präzise zu beschreiben, stellt man sehr schnell fest, dass dies nur dann möglich ist, wenn hierfür klar definierte Begriffe zur Verfügung stehen. Insbesondere dann, wenn mehrere Zustände oder Ereignisse gleicher Art miteinander verglichen werden sollen, benötigt man Begriffe, die sowohl die Art (die *Qualität*) der untersuchten Eigenschaft als auch ihr Ausmaß (die *Quantität*) eindeutig beschreiben.

Die meisten Aussagen unserer Umgangssprache erfüllen diese strengen Anforderungen nicht, obwohl sie ansonsten durchaus aussagekräftig sein können. Beispielsweise gibt die Feststellung, eine elektrische Entladung sei Furcht erregend gewesen, wohl einen sinnlichen Eindruck des Geschehens wieder; sie ist aber nicht geeignet, den beschriebenen Vorgang hinsichtlich seiner Art und seiner Intensität mit anderen elektrischen Entladungen vergleichbar zu machen oder seine Wiederholbarkeit (*Reproduzierbarkeit*) sicherzustellen. Eine Vergleichbarkeit wird erst durch die Verwendung physikalischer Größen erreicht, indem beispielsweise angegeben wird, wie hoch die elektrische Spannung vor der Entladung gewesen ist, wie lang der Entladungskanal war, wie groß der maximale Entladestrom war und wie lange die Entladung gedauert hat. Erst durch die Angabe derartiger physikalischer Größen gelingt es allgemein, Qualität und Quantität physikalischer Eigenschaften und Vorgänge zu beschreiben.

1.1.1.1 Charakter der physikalischen Größen

Formal stellt eine physikalische Größe das Produkt aus einem *Zahlenwert* und einer *Einheit* dar. Allerdings wird zwischen Zahlenwert und Einheit kein Multiplikationszeichen gesetzt, sondern ein Leerzeichen. Man schreibt also beispielsweise $I = 5,7 \text{ kA}$.

Die Einheit gibt – mit dem Zahlenwert 1 – die Teilung des Maßstabs an, in dem die Größe gemessen wird, während durch den Zahlenwert die genaue Intensität ausgedrückt wird.

¹Die deutsche Sprache erlaubt eine klare Trennung zwischen den Begriffen „Technik“ und „Technologie“. Technologie ist die Wissenschaft von der Verarbeitung von Stoffen und Materialien.

Größe und Einheit haben dieselbe *Dimension*. Im obigen Beispiel macht die Einheit kA (Kilampere) deutlich, dass es sich bei der Größe I der Dimension nach um eine elektrische Stromstärke handelt. Das Argumentieren mit den Dimensionen physikalischer Größen wie z. B. „Länge“, „Zeit“, „elektrische Stromstärke“, „Leistung“ ist prinzipiell einfacher als das mit konkreten Einheiten, da es für Größen einer bestimmten Dimension immer verschiedene Einheiten gibt (Abschnitte 1.1.2.2 und 1.1.2.4).

Wie bei jedem Produkt ändert sich der Wert einer physikalischen Größe nicht, wenn man den Zahlenwert mit einer beliebigen Zahl multipliziert und die Einheit durch dieselbe Zahl dividiert. Offensichtlich ist beispielsweise die folgende Umformung möglich:

$$I = 5,7 \text{ kA} = 5,7 \cdot 1000 \cdot \frac{1 \text{ kA}}{1000} = 5700 \text{ A}.$$

Man erkennt hieran, dass die Einheit ein wesentlicher Bestandteil jeder physikalischen Größe ist, den man nicht nach Belieben weglassen und wieder hinzufügen darf. Will man ausnahmsweise einmal nur den Zahlenwert einer Größe G darstellen, so geschieht dies nach [dinc] symbolisch in der Form $\{G\}$, indem man also das *Formelzeichen* G in geschweifte Klammern setzt. Weitaus häufiger kommt es vor, dass man die Einheit einer Größe G angeben möchte. Für diesen Fall ist die symbolische Formulierung $[G]$ genormt; das Formelzeichen G wird hier also in eckige Klammern gesetzt. Allgemein gilt

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

und speziell für das oben genannte Beispiel

$$I = 5,7 \text{ kA}; \quad \{I\} = 5,7; \quad [I] = 1 \text{ kA}.$$

1.1.1.2 Formelzeichen und ihre Darstellung

Eine physikalische Größe wird symbolisch durch ein *Formelzeichen* dargestellt. Das Formelzeichen besteht immer aus einem lateinischen oder griechischen Buchstaben als *Grundzeichen*, dem noch verschiedene *Nebenzeichen* hinzugefügt werden können. Die Nebenzeichen stehen meist tiefgestellt als *Indizes* rechts neben den Grundzeichen. Es kommen aber auch *hochgestellte Nebenzeichen* sowie *Nebenzeichen oberhalb und unterhalb des Grundzeichens* vor, auf deren Bedeutung im Folgenden noch näher eingegangen wird. Als Nebenzeichen sind auch Buchstabenkombinationen und Zahlen sowie eine Reihe von Sonderzeichen zugelassen.

Beispiele: \hat{u} , μ_{rev} , Φ_{12} , C_{Δ} , I^* , \vec{F}_L

Um die Formelzeichen deutlicher hervorzuheben und um Verwechslungen zu vermeiden, werden die Grundzeichen (nicht aber ihre Nebenzeichen) in Drucktexten immer *in kursiver Schrift* wiedergegeben.

1.1.1.3 Vektoren, Matrizen

Physikalische Größen, denen nicht nur ein Betrag, sondern auch eine Richtung zugeordnet wird (z. B. Kraft, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke), werden üblicherweise durch einen *Pfeil* über dem Formelzeichen als *Vektoren* gekennzeichnet. Wenn der Pfeil über dem Formelzeichen einer vektoriellen Größe fehlt, dann handelt es sich um den *Betrag* des Vektors. Es gilt also beispielsweise $F = |\vec{F}|$.

Eine rechteckförmige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen in m Zeilen und n Spalten wird als $m \times n$ -Matrix bezeichnet. Matrizen werden in Abschnitt 2.4 verwendet. Ihre Formelzeichen werden in diesem Buch durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

1.1.1.4 Zeitabhängige Größen

Physikalische Größen, die sich in Abhängigkeit von der Zeit ändern (man nennt sie auch *zeitvariant*), brauchen im Allgemeinen nicht besonders gekennzeichnet zu werden. Häufig ist es aber zweckmäßig, die Zeitabhängigkeit deutlich hervorzuheben. Dies geschieht in der Regel dadurch, dass man die Zeitabhängigkeit ausdrücklich (explizit) angibt, indem man das Formelzeichen t für die Zeit in runden Klammern hinter die Größe schreibt, also z. B. $\varphi(t)$ für ein zeitvariantes elektrisches Potenzial und $B(t)$ für eine zeitvariante magnetische Flussdichte.

Bei den für die Elektrotechnik besonders wichtigen Größen elektrische Stromstärke und elektrische Spannung gibt es darüber hinaus die Festlegung, dass zeitlich konstante (*zeitinvariante*) Ströme und Spannungen mit Großbuchstaben, zeitvariante Ströme und Spannungen hingegen mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden. Diese Festlegung wird im vorliegenden Buch der Einfachheit halber auch auf die Leistung übertragen. Durch die Verwendung der Kleinbuchstaben i , u und p wird zum Ausdruck gebracht, dass es sich um zeitvariante Ströme, Spannungen und Leistungen handelt.

Wenn hingegen die Großbuchstaben I , U und P verwendet werden, ergibt sich aus dem Zusammenhang, ob damit zeitinvariante oder zeitvariante Größen gemeint sind. Die Großbuchstaben I und U werden nämlich auch zur Kennzeichnung der Effektivwerte periodisch veränderlicher Ströme und Spannungen verwendet (Abschnitt 5.1.7) und P steht auch als Symbol für die Wirkleistung in Wechselstromkreisen (Abschnitt 5.4.1).

1.1.1.5 Komplexe Größen

Bei der Behandlung sinusförmig zeitvarianter Größen bedient man sich der komplexen Rechnung (Abschnitt 5.3). Die hierbei auftretenden komplexen Größen werden im vorliegenden Buch in Übereinstimmung mit [dind] immer durch *Unterstreichen des Grundzeichens* gekennzeichnet, z. B. \underline{U} , \underline{I} , \underline{Z} , \underline{Y} etc. Wenn der *Unterstrich* bei dem Formelzeichen einer komplexen Größe fehlt, handelt es sich um den *Betrag* der komplexen Größe. Es gilt also z. B. $Z = |\underline{Z}|$.

Ein *hochgestellter Stern* rechts neben dem Zeichen einer komplexen Größe bedeutet, dass das *konjugiert Komplexe* dieser Größe gemeint ist. Beispielsweise bedeutet $\underline{Z}^* = Z e^{-j\varphi}$, wenn $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ ist. Näheres hierzu findet sich in Abschnitt 5.3.1.

1.1.2 Einheiten

Der Umgang mit physikalischen Größen wird wesentlich erleichtert, wenn man sich bei der Angabe dieser Größen eines *kohärenten Einheitensystems* bedient. Kennzeichnend für ein solches System ist, dass bei der Umrechnung *kohärenter Einheiten* nie ein anderer Zahlenfaktor als *eins* auftritt. Man kann dann alle Größen mitsamt ihren Einheiten in die jeweils gültige Gleichung (vgl. Abschnitt 1.1.3) einsetzen und erhält automatisch für die Ergebnisgröße nicht nur den richtigen Zahlenwert, sondern auch eine Einheit, die für die Ergebnisgröße unmittelbar brauchbar ist. Meistens besteht diese Einheit aus einem Produkt, einem Quotienten oder einem Potenzprodukt mehrerer anderer Einheiten und man kann hierfür gegebenenfalls abkürzend einen anderen Einheitenamen setzen.

Einheiten werden in Gleichungen mit einem *Einheitenzeichen* bezeichnet, also z. B. „m“ für „Meter“ und „s“ für „Sekunde“. Einheitenzeichen werden in Drucktexten in Normalschrift, also nicht kursiv, dargestellt.

Beispiel 1.1: Rechnen mit kohärenten Einheiten

Die kinetische Energie W einer Masse m , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, errechnet sich nach der Gleichung

$$W = \frac{1}{2} m v^2.$$

Die Masse sei $m = 100 \text{ kg}$ und die Geschwindigkeit $v = 2 \text{ m/s}$. Für die kinetische Energie ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 200 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 200 \text{ J}.$$

Das Meter, die Sekunde, das Kilogramm und das Joule sind kohärente Einheiten, und das Potenzprodukt $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ kann direkt durch die Einheit J ersetzt werden.

Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man *inkohärente Einheiten* verwendet, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.2: Rechnen mit inkohärenten Einheiten

Die Größen aus Beispiel 1.1 werden mit $m = 0,1 \text{ t}$ und $v = 7,2 \text{ km/h}$ angegeben. Man erhält für die kinetische Energie

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \text{ t} \cdot \left(7,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 = 2,592 \frac{\text{t km}^2}{\text{h}^2}.$$

Die Einheiten Kilometer, Stunde und Tonne sind inkohärent. Das Potenzprodukt $\text{t km}^2 \text{ h}^{-2}$ kann nicht ohne weiteres in eine gebräuchliche Energieeinheit umgesetzt werden.

Das gesetzlich vorgeschriebene Einheitensystem, das heute in Wissenschaft und Technik verwendet wird, besteht in seinem Kern aus einem System kohärenter Einheiten, die man als *SI-Einheiten* bezeichnet. Die Buchstaben SI stehen als Abkürzung für „Système International d’Unités“ (Internationales Einheitensystem).

Neben den kohärenten SI-Einheiten gibt es aber noch eine Anzahl anderer *gesetzlicher Einheiten*, die über bestimmte Umrechnungsfaktoren (überwiegend Zehnerpotenzen) in SI-Einheiten umgerechnet werden können, die aber selber nicht kohärent sind, siehe Beispiel 1.2.

1.1.2.1 SI-Basiseinheiten

Das internationale Einheitensystem kommt mit insgesamt *sieben unabhängig definierten SI-Basiseinheiten* aus.

Tabelle 1.1: SI-Basiseinheiten

Größe	SI-Basiseinheit	
	Name	Zeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die Definitionen dieser Basiseinheiten sind von der Generalkonferenz für Maß und Gewicht unter dem Gesichtspunkt *zuverlässiger Reproduzierbarkeit* festgelegt worden und können Anhang A von [dina] entnommen werden. In Tabelle 1.1 sind die SI-Basiseinheiten und die physikalischen Größen, zu denen sie gehören, zusammengestellt.

1.1.2.2 Abgeleitete SI-Einheiten

Alle weiteren SI-Einheiten lassen sich als Produkte, Quotienten oder Potenzprodukte der in Tabelle 1.1 aufgeführten Basiseinheiten darstellen. Für wichtige abgeleitete SI-Einheiten (Tabelle A.1 in Anhang A.2) werden häufig eigene Namen festgelegt; z. B. gilt für die Krafteinheit der Name Newton mit dem Einheitenzeichen N und der Definition

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}. \quad (1.1)$$

Oft ist es zweckmäßig, die Zusammenhänge zwischen abgeleiteten Einheiten direkt anzugeben. So besteht z. B. zwischen der Leistungseinheit Watt (W) und der Spannungseinheit Volt (V) über die SI-Basiseinheit Ampere (A) der Zusammenhang

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA}. \quad (1.2)$$

Die Einheit für Arbeit und Energie Joule (J) lässt sich über

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws} \quad (1.3)$$

sowohl mit Hilfe der Krafteinheit Newton (N) als auch durch die Leistungseinheit Watt (W) ausdrücken.

Offensichtlich ist es möglich, mit Hilfe der Gln. (1.1) bis (1.3) die Einheiten Watt (W) und Volt (V) als Potenzprodukte der SI-Basiseinheiten darzustellen. Man erhält $1 \text{ W} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3$ und

$1 \text{ V} = 1 \text{ kg m}^2 / (\text{A s}^3)$. In den meisten Fällen ist es aber nicht empfehlenswert, bei der *Einheitenarithmetik* bis auf die Basiseinheiten zurückzugehen. Geschickter ist es, Zusammenhänge wie Gl. (1.2) und (1.3) je nach Bedarf direkt zur Einheitenumrechnung zu nutzen.

Eine scheinbare Sonderstellung nehmen die Einheiten mancher *bezogener Größen*, z. B. die Winkeleinheit *Radian* (rad) ein. Die Vorschrift, dass man bei der Angabe einer Größe niemals die Einheit weglassen darf, scheint hier verletzt zu werden. Beispielsweise sind die Angaben $\varphi = 0,78 \text{ rad}$ und $\varphi = 0,78$ gleichwertig. Der Grund hierfür ist in der Definition des ebenen Winkels im Bogenmaß zu suchen. Man gibt die Größe eines Winkels im Bogenmaß nämlich an, indem man das Verhältnis der zum Winkel gehörigen Kreisbogenlänge zum Radius des Kreises bildet. Dabei werden zwei (einheitenbehaftete) Längen durcheinander dividiert, wodurch eine Größe der Einheit 1 entsteht. Eine solche Größe bezeichnet man oft – nicht ganz korrekt – auch als „*einheitenlos*“.

1.1.2.3 Gesetzliche Einheiten außerhalb des SI-Einheitensystems

Trotz der offensichtlichen Vorteile, die ein kohärentes Einheitensystem bietet, ist es nicht gelungen, die ausschließliche Verwendung von SI-Einheiten verbindlich zu vereinbaren. In Tabelle 1.2 sind die nicht zum SI-Einheitensystem gehörenden gesetzlichen Einheiten aufgelistet, soweit sie für die Elektrotechnik relevant sind.

Zum Teil werden diese Einheiten auch zur Bildung weiterer abgeleiteter Einheiten verwendet (min^{-1} , km/h, Ah, kWh etc.). Darüber hinaus sind aber keine weiteren Einheiten zugelassen, die außerhalb des SI stehen. Dies trifft insbesondere für die früher häufig verwendeten Einheiten Å, kp, Torr, at, PS und cal zu. Diese Einheiten sind seit dem 1.1.1978 im Geschäftsverkehr nicht mehr zugelassen, werden aber außerhalb des technisch-wissenschaftlichen Bereichs gelegentlich noch benutzt.

Tabelle 1.2: Gesetzliche Einheiten außerhalb des SI

Größe	Einheit außerhalb des SI		Umrechnung in SI-Einheiten
	Name	Zeichen	
ebener Winkel	Grad	°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$
Zeit	Minute	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	Stunde	h	$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$
	Tag	d	$1 \text{ d} = 86400 \text{ s}$
	Liter	l	$1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Volumen			
Masse	Tonne	t	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
Druck	Bar	bar	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Energie	Elektronvolt	eV	$1 \text{ eV} = 0,1602 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
Blindleistung	Var	var	$1 \text{ var} = 1 \text{ VA}$

1.1.2.4 Dezimale Vielfache von Einheiten

Es lässt sich grundsätzlich nicht verhindern, dass die vereinbarten Einheiten je nach Anwendungsfall gelegentlich unpraktisch klein oder unhandlich groß sind. Damit man in solchen Fällen nicht mit übermäßig großen oder kleinen Zahlenwerten operieren muss, hat man *Vorsätze* und *Vorsatzzeichen* (Tabelle A.2 in Anhang 2) vereinbart, durch deren Verwendung die jeweilige

Einheit um eine bestimmte *Zehnerpotenz* vergrößert oder verkleinert wird. Bevorzugt werden hierbei Potenzen von 1000, also Zehnerpotenzen mit durch 3 teilbarem Exponenten. Von dieser Regel gibt es allerdings Ausnahmen, wie die Beispiele cm, dt, hl, hPa zeigen. Vorsatzzeichen für Potenzen von 10^3 , die die Einheit vergrößern, werden im Allgemeinen durch *Großbuchstaben* und die Vorsätze, die die Einheit verkleinern, durch *Kleinbuchstaben* abgekürzt. Einzige (historisch bedingte) Ausnahme von dieser Regel ist der Kleinbuchstabe k für den Vorsatz Kilo-. Dass der Vorsatz Mikro- für das 10^{-6} -fache durch den griechischen Buchstaben μ abgekürzt wird, hat seinen Grund darin, dass der lateinische Buchstabe m schon für den Vorsatz Milli- vergeben ist.

Ein Vorsatzzeichen bildet zusammen mit dem Einheitenzeichen, vor dem es *ohne Zwischenraum* steht, das Zeichen einer neuen Einheit. Ein Vorsatzzeichen darf aber nicht – sozusagen als Faktor – vor eine Einheitenkombination gesetzt werden. Des Weiteren ist es unzulässig, mehrere Vorsätze hintereinander zu verwenden, was insbesondere bei den Masseinheiten zu berücksichtigen ist, wo schon die Basiseinheit kg den Vorsatz Kilo- enthält. Die folgenden Beispiele machen den Sachverhalt deutlich:

Falsch sind die Angaben $10 \text{ k} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oder $10 \text{ k}(\frac{\text{m}}{\text{s}})$, $0,3 \mu\text{kg}$, $5 \text{ m}\mu\text{m}$ oder $5 \text{ m}\mu$.

Richtig muss es heißen $10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ oder $10 \frac{\text{m}}{\text{ms}}$, $0,3 \text{ mg}$, 5 nm .

1.1.3 Physikalische Gleichungen

1.1.3.1 Größengleichungen

Früher wurden häufig Gleichungen aufgestellt, in denen nur die Zahlenwerte der beteiligten Größen ohne ihre Einheiten berücksichtigt wurden. Diese *Zahlenwertgleichungen* waren nur brauchbar, wenn zwingend vorgeschrieben wurde, in welchen Einheiten die jeweiligen Größen anzugeben waren. Wegen dieses Nachteils werden Zahlenwertgleichungen nicht mehr verwendet. Statt dessen drückt man physikalische und technische Zusammenhänge mit Hilfe von *Größengleichungen* aus, in denen die Formelzeichen physikalische Größen im Sinne von Abschnitt 1.1.1 darstellen. *Größengleichungen behalten ihre Gültigkeit unabhängig von den verwendeten Einheiten*. Wie Beispiel 1.2 zeigt, kann es bei der Auswertung einer Größengleichung allerdings notwendig werden, für die sich ergebende Größe eine Einheitenumrechnung vorzunehmen, um ein Ergebnis in einer gebräuchlichen Einheit zu erhalten.

1.1.3.2 Zugeschnittene Größengleichungen

Wenn bekannt ist, welche Einheiten bei der Auswertung einer Größengleichung verwendet werden, ist es oftmals lohnend, die Gleichung speziell auf diese Einheiten zuzuschneiden. Praktische Einsatzfälle zugeschnittener Größengleichungen sind z. B. die Auswertung umfangreicher Messwertreihen in Tabellenform, die Berechnung physikalischer Größen mit Tabellenkalkulationsprogrammen ohne Einheitenrechnung oder die Ausgabe der Zahlenwerte physikalischer Größen mittels digitaler Anzeigen.

Beispiel 1.3: Anwendung einer zugeschnittenen Größengleichung

Die Geschwindigkeit v eines Fahrzeugs soll mittels einer digitalen Ziffernanzeige in km/h ausgegeben werden. Die Zeit t , die eine Radumdrehung benötigt, wird von einem Sensor erfasst und als Zahlenwert in ms ausgegeben. Der Radumfang beträgt $l = 1,75$ m. Wie erhält man aus den Zahlenwerten der gemessenen Zeiten die Zahlenwerte der Geschwindigkeit?

Man setzt den gegebenen Wert $l = 1,75$ m in die Gleichung zur Geschwindigkeitsberechnung ein und erhält

$$v = \frac{l}{t} = \frac{1,75 \text{ m}}{t}.$$

In dieser Gleichung werden nun die Größen v und t mit den verwendeten Einheiten km/h und ms erweitert. Die Gleichung lautet jetzt

$$\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1,75 \text{ m}}{\frac{t}{\text{ms}} \cdot \text{ms}}.$$

Nach weiterer Umformung

$$\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{\text{h}}{\text{km}} \cdot \frac{1,75 \text{ m}}{\text{ms}} \cdot \frac{1}{\frac{t}{\text{ms}}} = \frac{3600 \text{ s} \cdot 1,75 \text{ m}}{10^3 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ s}} \cdot \frac{1}{\frac{t}{\text{ms}}}$$

erhält man die zugeschnittene Größengleichung

$$\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6300}{\frac{t}{\text{ms}}}.$$

Der konstante Faktor 6300 ist also durch die vom Zeitmesser gelieferten Zahlenwerte zu dividieren und der sich ergebende Zahlenwert mit dem Zusatz „km/h“ auszugeben.

Bei der Umwandlung einer Größengleichung in eine zugeschnittene Größengleichung unterscheidet man zweckmäßigerweise zwischen den konstanten Größen (im Beispiel 1.3 der Radumfang l) und den variablen Größen, die in bestimmten bevorzugten Einheiten angegeben werden sollen (im Beispiel 1.3 die Zeit t und die Geschwindigkeit v). Als Erstes werden die konstanten Größen mit Zahlenwert und Einheit in die Gleichung eingesetzt. Jede der verbleibenden Größen wird dann durch ihre bevorzugte Einheit dividiert und mit dieser Einheit multipliziert. Diese einfache Umformung (aus der Bruchrechnung als Erweitern bekannt) dient dem Zweck, für die variablen Größen *Quotienten aus Größe und bevorzugter Einheit* zu bilden und in die Gleichung einzuführen. Bei der weiteren Umformung der Gleichung ist darauf zu achten, dass diese eingeführten Quotienten (im Beispiel 1.3 $v/(\text{km/h})$ und t/ms) bestehen bleiben. Die anderen in der Gleichung noch vorkommenden Einheiten werden zusammengefasst und mit den konstanten Größen zu einer (Beispiel 1.3) bzw. im allgemeinen Fall zu mehreren neuen Konstanten verschmolzen.

In den zugeschnittenen Größengleichungen treten alle variablen Größen in der Form eines Quotienten aus (einheitenbehafteter) Größe und zugeordneter Einheit auf. Diese Quotienten haben also alle die Einheit 1. Hieraus ergibt sich, dass es immer möglich sein muss, auch die Konstanten in einer zugeschnittenen Größengleichung so zusammenzufassen, dass sie die Einheit 1 haben. In einer zugeschnittenen Größengleichung kommen daher außer den jeweiligen Quotienten aus

Größe und zugeordneter Einheit keine weiteren Einheiten vor, sondern nur noch Zahlen.

Beispiel 1.4: Anwendung einer zugeschnittenen Größengleichung

Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v und kinetischer Energie W aus Beispiel 1.1 soll für eine Masse von 100 Tonnen, also $m = 100 \text{ t}$, so als zugeschnittene Größengleichung dargestellt werden, dass sich die Energie in kWh ergibt, wenn man die Geschwindigkeit in km/h einsetzt.

Zunächst wird der konstante Wert $m = 100 \text{ t}$ in die Gleichung eingesetzt. Man erhält

$$W = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ t} \cdot v^2$$

und nach Erweitern mit den geforderten Einheiten

$$\frac{W}{\text{kWh}} \cdot \text{kWh} = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ t} \cdot \left(\frac{v}{\text{h}} \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}} \right)^2.$$

Nun werden alle Konstanten und alle Einheiten außerhalb der benötigten Quotienten der Form „Größe/Einheit“ zusammengefasst. Die Gleichung erhält dann die Form

$$\frac{W}{\text{kWh}} = \frac{100 \text{ t km}^2}{2 \text{ kWh h}^2} \left(\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \right)^2 = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 10^6 \text{ m}^2}{2 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 3600^3 \text{ s}^3} \left(\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \right)^2.$$

Für die Einheiten gilt:

$$1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{W s}^3} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} \cdot \frac{1}{\text{W s}} = 1 \text{ N m} \cdot \frac{1}{\text{N m}} = 1$$

Man erhält schließlich die zugeschnittene Größengleichung

$$\frac{W}{\text{kWh}} = 1,072 \cdot 10^{-3} \left(\frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \right)^2.$$

1.2 Elektrische Grundgrößen

In den nachfolgenden Abschnitten werden die Begriffe elektrische Ladung, elektrischer Strom, elektrisches Potenzial und elektrische Spannung behandelt, die für alle Gebiete der Elektrotechnik von fundamentaler Bedeutung sind. Die Darstellung erfolgt weitgehend in der für Größen der Gleichstromtechnik üblichen Notation (Abschnitt 1.1.1.4), ist aber auf zeitabhängige Größen direkt übertragbar. Weiterhin wird der Begriff der technischen Stromrichtung erklärt, ohne dessen Verständnis immer wieder Unsicherheiten bei der quantitativen Beschreibung von Ladungsströmungen auftreten.

1.2.1 Elektrische Ladung

Ursache aller *elektrischen Phänomene* sind elektrische Ladungen. Die für die Elektrotechnik wesentliche Materie ist aus Atomen aufgebaut. Jedes *Atom* enthält einen *Atomkern* und eine *Elektronenhülle*. Der Atomkern wiederum besteht aus dicht gepackten *Protonen* und *Neutronen*, die Hülle aus *Elektronen*. Nach dem sehr einfachen *Bohrschen Atommodell* umkreisen die Elektronen den Atomkern auf konzentrischen Bahnen mit unterschiedlichen Radien. Protonen und Elektronen besitzen neben ihrer Masse auch eine *elektrische Ladung*.

Während Masse positiv ist und zwischen zwei Massen stets eine Anziehungskraft wirkt, können zwischen Ladungen anziehende oder abstoßende *Kräfte*² wirken (Abschnitt 3.1.2.1). Daher unterscheidet man zwischen zwei Arten von Ladungen, die als „*positive*“ und „*negative*“ Ladungen bezeichnet werden. Ladungen gleichen Vorzeichens (*gleichnamige* Ladungen) stoßen sich ab, *ungleichnamige* ziehen sich an.

Die Ladung eines Protons wird als *Elementarladung* e bezeichnet und erhielt aus historischen Gründen einen positiven Wert. Die Ladung eines Elektrons hat den gleichen Betrag, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Ladung des Protons, also den negativen Wert $-e$. Da ein vollständiges Atom stets die gleiche Anzahl von Protonen und Elektronen enthält, ist es nach außen hin *elektrisch neutral*. Gleiches gilt für jeden aus vollständigen Atomen bestehenden Körper. Daraus folgt, dass auch die Erde insgesamt als elektrisch neutral betrachtet werden kann.

Ein Körper, der nicht mehr elektrisch neutral ist, wird als „*elektrisch geladen*“ bezeichnet. Will man einen Körper aufladen, so muss man ihm entweder Elektronen entreißen oder Elektronen hinzufügen. Dies ist z. B. auf *mechanischem*, *thermischem* oder *chemischem* Weg möglich. Die Protonen sind so fest im Atomkern verankert, dass sie in Feststoffen zum Ladungstransport nicht zur Verfügung stehen. Da Ladungen weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur getrennt werden können, ist das Aufladen eines Körpers nur durch *Ladungstrennung* möglich. Daraus folgt der *Ladungserhaltungssatz* (Abschnitt 3.1.1.2):

Innerhalb eines elektrisch abgeschlossenen Systems bleibt die Gesamtladung, also die Summe aller Ladungen, konstant.

Als Formelzeichen für elektrische Ladungen wird der Buchstabe Q verwendet. Die Einheit der Ladung ist das *Coulomb* mit dem Einheitenzeichen C. Es gilt also

$$[Q] = 1 \text{ C}. \quad (1.4)$$

Obwohl die Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.5)$$

eine *Naturkonstante* ist, ist das Coulomb keine Basiseinheit, sondern es wird über die Einheit des elektrischen Stroms definiert, die eine SI-Basiseinheit ist.

Jede Ladungsmenge Q ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung

$$Q = n \cdot e \quad (1.6)$$

²Dieses Phänomen ist seit weit über 2000 Jahren bekannt. Ein mit Tierfell geriebener Bernstein ist in der Lage, bestimmte leichte Gegenstände, z. B. Korkkrümel, anzuziehen. Die Worte Elektron, elektrisch und Elektrizität sind abgeleitet vom griechischen Wort *ήλεκτρον*, das Bernstein bedeutet.

mit $n \in \mathbb{Z}$. Man sagt, die Ladung ist „gequantelt“. Die Ladung eines Körpers kann also nicht beliebige Werte annehmen, sondern ist eine *wertdiskrete Größe*, die Gl. (1.6) genügen muss. Im Rahmen der Grundlagen der Elektrotechnik wird die elektrische Ladung aber als *wertkontinuierliche Größe* behandelt, die beliebige Werte annehmen kann, da der Betrag der betrachteten Ladungsmengen um viele Zehnerpotenzen über dem Wert der Elementarladung liegt. In der *Mikroelektronik* und insbesondere in der *Nanoelektronik* ist diese vereinfachte Betrachtungsweise allerdings nicht mehr zulässig, da dort teilweise einzelne oder wenige Elektronen für die Funktion von Bauelementen verantwortlich sind.

1.2.2 Elektrischer Strom

Die *gerichtete Bewegung* elektrischer Ladungsträger wird als *elektrischer Strom* bezeichnet. Hier werden nur *makroskopische* Ladungsträgerbewegungen oberhalb der atomaren Ebene betrachtet. Die stets vorhandene Bewegung der Elektronen der Atomhülle um den Atomkern wird (außer in Abschnitt 4.1.1.1) nicht berücksichtigt.

Eine Strömung elektrischer Ladungen setzt das Vorhandensein *frei beweglicher elektrischer Ladungsträger* voraus. Stoffe, die eine hohe Dichte frei beweglicher Ladungsträger aufweisen, nennt man *elektrische Leiter*, Stoffe mit sehr geringer Dichte oder ohne frei bewegliche Ladungsträger werden als *Nichtleiter*, *Isolatoren* oder *Dielektrika* bezeichnet (Abschnitte 3.3 und 10.4).

Ein elektrischer Strom kann prinzipiell in allen *Aggregatzuständen der Materie* fließen:

- *Festkörper* sind elektrisch leitfähig, sofern sie Atome enthalten, die Elektronen an den Atomverbund abgeben. Bei *Metallen* können sich diese freien Elektronen wie ein Gas innerhalb des durch die Atomkerne gebildeten Gitters bewegen. Man spricht daher vom „*Elektronengas*“. In Kupfer und bei den meisten anderen Metallen trägt jedes Atom mit einem Elektron zur elektrischen Leitfähigkeit bei. In Halbleitern treten nicht nur Elektronen, sondern auch *Defektelektronen* als freie Ladungsträger auf (Abschnitt 10.4).
- *Fluide*, also *Flüssigkeiten und Gase*, sind elektrisch leitfähig, sofern sie geladene Atome (*Ionen*) sowie evtl. freie Elektronen enthalten. Im Fall eines *Ionenstroms* ist der Ladungstransport immer mit einem *Materialtransport* verbunden. Ausführlich wird hierauf in den Abschnitten 10.2 und 10.3 eingegangen.
- In *Plasma*, also *vollständig ionisierter, gasförmiger Materie*, tragen sowohl die positiv geladenen Atomrümpfe wie auch die abgetrennten Elektronen zu einem Stromfluss bei.
- Im idealen *Vakuum*, also völlig materiefreiem Raum, ist keinerlei Stromfluss möglich. Ideales Vakuum ist technisch nicht realisierbar. Von großer praktischer Bedeutung ist der Ladungstransport im *technischen Vakuum*, das eine *geringe Dichte an kontrolliert erzeugten Ladungsträgern*, meist Elektronen, enthält. Anwendungen sind z. B. Kathodenstrahlröhren, Elektronenmikroskope und diverse Geräte, die zur Herstellung integrierter Schaltungen verwendet werden (Abschnitt 10.1).

Ein elektrischer Strom kann mit verschiedenen *Wirkungen* verbunden sein:

1. Materialtransport in Fluiden (s. o.).

2. Stoßen bewegte Ladungsträger mit Atomen zusammen, geben sie einen Teil ihrer *Bewegungsenergie* an die Atome ab. Hierdurch wird die *Schwingungsenergie* der Atome vergrößert, was sich makroskopisch als *Temperaturerhöhung* des Materials äußert. Handelt es sich bei dem Material um einen Festkörper, bezeichnet man die Schwingungen des durch die Atome bzw. Moleküle gebildeten Gitters auch als *Gitterschwingungen*, die sich ähnlich wie Schallwellen im Körper ausbreiten. Im Rahmen des *Welle-Teilchen-Dualismus* [BSR06] hat sich die Beschreibung dieses Effektes durch das Modell von Teilchen, die *Phononen* genannt werden, als zweckmäßig erwiesen.
3. Sind die Stöße zwischen Ladungsträgern und Atomen ausreichend stark, können Elektronen innerhalb eines Atoms von energetisch niedrigeren auf energetisch höhere Umlaufbahnen angehoben werden. Fallen diese Elektronen nach einiger Zeit auf eine energetisch niedrigere Bahn zurück, geben sie *elektromagnetische Strahlung* ab, die z. B. als Wärme- oder Lichtstrahlung wahrgenommen werden kann (Abschnitt 10.5.6.2).
4. Jede *Bewegung eines Ladungsträgers relativ zu einem Beobachter* ist aus Sicht des Beobachters stets mit einem *Magnetfeld* verbunden, das sich, ausgehend von der Ladung, in alle Richtungen des Raumes ausbreitet und durch seine Kraftwirkung auf andere bewegte Ladungen bemerkbar macht (Kapitel 4).
5. Menschen haben kein Sinnesorgan für den elektrischen Strom. Der menschliche Körper ist elektrisch leitfähig und die menschlichen Körperfunktionen (u. a. Gehirn und Herz) werden, genau wie die von Pflanzen und Tieren, durch Ionenströme gesteuert. Daher kann ein von außen bewirkter Stromfluss durch den menschlichen Körper sowohl eine lebenserhaltende (z. B. Herzschrittmacher, Defibrillator) oder heilende (z. B. Kurzwellentherapie) als auch eine schädigende oder sogar tödliche *physiologische*³ *Wirkung* haben. Daher gilt: *Beim Umgang mit elektrischem Strom ist umsichtiges Verhalten erforderlich!*

Die mit dem Formelzeichen I bezeichnete *elektrische Stromstärke* gibt an, welche Ladungsmenge ΔQ innerhalb einer Zeitspanne Δt durch einen Leiterquerschnitt transportiert wird:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1.7)$$

Ändert sich die Ladungsströmung zeitlich nicht, so ist auch die Stromstärke I konstant und man schreibt für diesen Fall eines *Gleichstroms*

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (1.8)$$

Ist die Ladungsströmung jedoch beliebig zeitvariant, muss man die betrachteten Zeitintervalle Δt um so kleiner wählen, je genauer man den Zeitverlauf des Stroms $i(t)$ erfassen möchte. Mathematisch werden *infinitesimal kleine* Zeitintervalle mit dt bezeichnet. Zu jedem einzelnen dt gehört dann eine ebenfalls infinitesimal kleine Ladungsmenge dQ . Damit folgt aus Gl. (1.7) die *allgemeingültige Definitionsgleichung* des elektrischen Stroms

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.9)$$

Die Einheit des elektrischen Stroms ist das *Ampere* mit dem Einheitenzeichen A. Es gilt also

$$[I] = 1 \text{ A}. \quad (1.10)$$

³einen lebenden Organismus betreffend

Das Ampere ist die einzige SI-Basiseinheit aus dem Bereich der Elektrizität. Es wird über die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern definiert (Abschnitt 4.3.2.4).

Fließen innerhalb einer Sekunde durch einen Leiterquerschnitt gleichförmig positive Ladungsträger mit der Gesamtladung 1 C, so beträgt nach Gl. (1.8) die Stromstärke des Stroms in Richtung dieser Ladungsträgerbewegung

$$I = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ A}. \quad (1.11)$$

Aus Gl. (1.11) folgt auch die Definitionsgleichung für das Coulomb

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}. \quad (1.12)$$

Beispiel 1.5: Driftgeschwindigkeit der Elektronen in metallischen Leitern

Durch einen Kupferdraht mit der Querschnittsfläche $A = 1 \text{ mm}^2$ fließt ein zeitlich konstanter Strom $I = 10 \text{ A}$. Kupfer enthält etwa $\eta = 10^{23}$ freie Elektronen pro cm^3 . In welcher Größenordnung liegt die *Driftgeschwindigkeit* (vgl. Abschnitt 10.4.3.1) der Elektronen?

Bei einer Stromstärke von 10 A fließen pro Sekunde

$$\frac{I t}{|-e|} = \frac{10 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \approx 6,25 \cdot 10^{19}$$

Elektronen durch jeden Querschnitt des Leiters. Ein Abschnitt der Länge $l = 1 \text{ mm}$ des Leiters enthält ungefähr

$$A l \eta = 1 \text{ mm}^2 \cdot 1 \text{ mm} \cdot \frac{10^{23}}{\text{cm}^3} = 10^{20}$$

freie Elektronen. Daraus folgt, dass sich das Elektronengas im Leiter mit einer Driftgeschwindigkeit in der Größenordnung von nur 1 mm/s bewegt. Da die Ladung der Elektronen negativ ist, bewegen sie sich entgegen der Stromrichtung.

1.2.3 Technische Stromrichtung

Die „*technische Stromrichtung*“ (in [dinf] etwas unglücklich als „*physikalische Richtung des Stroms*“ bezeichnet) wurde, noch bevor die Mechanismen des Ladungstransports bekannt waren, als die *Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger* definiert. Dabei wird nicht berücksichtigt, welches Vorzeichen die den Strom bewirkenden, physikalisch existenten Ladungen tatsächlich haben.

In der gesamten Elektrotechnik ist, wenn der Begriff der „Stromrichtung“ verwendet wird, stets die technische Stromrichtung gemeint!

Da in *metallischen Leitern* der Stromtransport durch die negativ geladenen Elektronen erfolgt, ist die physikalische Bewegungsrichtung der Ladungsträger in diesen Stoffen stets *entgegen der technischen Stromrichtung* gerichtet. In Halbleitern, leitfähigen Fluiden und Plasmen sind im Allgemeinen sowohl positive als auch negative freie Ladungsträger am Ladungstransport beteiligt.

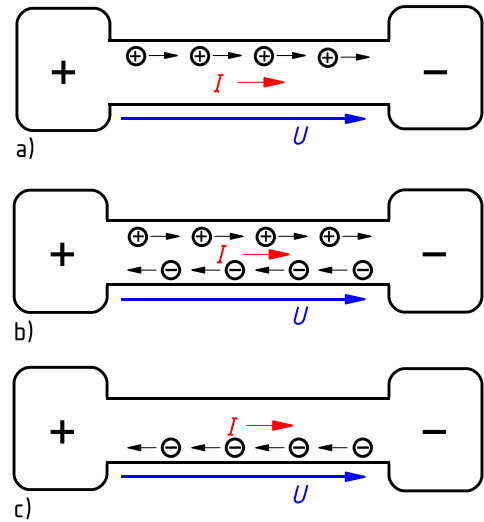


Bild 1.1: Ladungsträgerbewegung und technische Stromrichtung bei
 (a) nur positiven,
 (b) positiven und negativen und
 (c) nur negativen freien Ladungsträgern

Bild 1.1 zeigt schematisch zwei elektrisch entgegengesetzt geladene Gebiete (durch ein Plus- bzw. ein Minuszeichen symbolisiert), die durch Leiter mit unterschiedlichen Arten freier Ladungsträger verbunden sind. In Bild 1.1a sind nur freie positive Ladungsträger am Stromfluss beteiligt, in Bild 1.1c nur negative und in Bild 1.1b sowohl positive als auch negative. In allen drei Fällen ist die technische Stromrichtung vom positiv zum negativ geladenen Gebiet gerichtet.

1.2.4 Elektrisches Potenzial

Der Begriff des elektrischen Potenzials ist von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis elektrischer Vorgänge und Grundlage für die Begriffe „elektrische Spannung“ (Abschnitt 1.2.5) und „elektrische Leistung“ (Abschnitt 2.1.4).

Das *elektrische Potenzial* mit dem Formelzeichen φ ist ein Maß für die *elektrische Energie* W einer Ladung Q in einem Punkt des Raumes. Es gilt die Definitionsgleichung

$$\varphi = \frac{W}{Q}. \quad (1.13)$$

Die Einheit des elektrischen Potenzials ist das *Volt* mit dem Einheitenzeichen V. Es gilt also

$$[\varphi] = 1 \text{ V}. \quad (1.14)$$

Um das Wesen des elektrischen Potenzials besser verstehen zu können, ist die Betrachtung seiner mechanischen Entsprechung, des *mechanischen Potenzials*, hilfreich. Dazu wird die Anordnung in Bild 1.2 betrachtet.

Eine Masse m liege auf der Erde. Das Niveau der Erdoberfläche wird als Bezugsniveau gewählt. Bezüglich dieses Niveaus hat die Masse zunächst die *potenzielle mechanische Energie* (Energie der Lage) $W_{\text{pot}} = 0$. Masse und Erde ziehen sich an. Wird die Masse entgegen dieser Anziehungskraft hochgehoben, so muss hierfür mechanische Arbeit $W_{\text{mech}} > 0$ aufgewandt

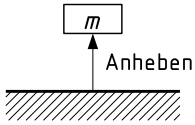


Bild 1.2: Anheben einer Masse vom Erdniveau

werden [BSR06]. Diese Arbeit wird als potenzielle Energie $W_{\text{pot}} = W_{\text{mech}} > 0$ in der Masse⁴ m gespeichert. Je weiter die Masse angehoben wird, desto größer wird ihre potenzielle Energie. Sobald keine gegen die Anziehungskraft wirkende *äußere Kraft* mehr auf die Masse einwirkt, fällt sie zurück zur Erdoberfläche und gibt hierbei ihre potenzielle Energie wieder vollständig ab.

Nun wird eine vergleichbare elektrische Anordnung betrachtet, nämlich eine beliebige Ladung Q , die sich direkt an der Erdoberfläche befindet und zunächst durch ihre *Gegenladung* $-Q$ elektrisch neutralisiert wird (Bild 1.3). Dann werden diese Ladungen voneinander getrennt.

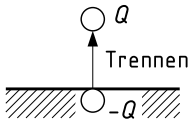


Bild 1.3: Trennen einer Ladung von ihrer Gegenladung an der Erdoberfläche

Das elektrische Potenzial der Erde wird, wie in der Elektrotechnik üblich, als konstantes *Bezugspotenzial* $\varphi_0 = 0$ betrachtet, auf dem Ladungen keine *potenzielle elektrische Energie* besitzen. Damit hat auch die betrachtete Ladung Q zunächst die potenzielle elektrische Energie $W_{\text{pot}} = 0$. Ladung und Gegenladung ziehen sich wegen ihres unterschiedlichen Vorzeichens an. Wird nun die Ladung Q durch eine *äußere Kraft* entgegen dieser Anziehungskraft von der Erde (und damit ihrer Gegenladung) weggezogen, so muss hierfür mechanische Arbeit $W_{\text{mech}} > 0$ aufgewandt werden. Diese Arbeit wird als potenzielle elektrische Energie $W_{\text{pot}} = W_{\text{mech}} > 0$ in der Ladung⁵ Q gespeichert. Je weiter die Ladung von ihrer Gegenladung an der Erdoberfläche weggezogen wird, desto größer wird ihre elektrische Energie. Sobald keine gegen die elektrische Anziehungskraft wirkende äußere Kraft mehr auf die Ladung wirkt, bewegt sie sich zurück zur Erde und gibt hierbei ihre elektrische Energie wieder vollständig ab.

Während in der klassischen Physik eine Masse nicht negativ sein kann, gibt es, wie bereits in Abschnitt 1.2.1 erklärt, sowohl positive als auch negative elektrische Ladungen. Die daraus resultierenden Unterschiede werden nachfolgend genauer betrachtet.

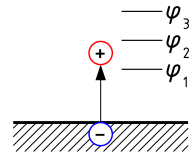
1. Fall: Bewegung einer positiven Ladung

Hier gilt $Q > 0$. Wie oben erläutert, gilt $W_{\text{pot}} > 0$. Aus Gl. (1.13) folgt $\varphi > 0$; das Potenzial der positiven Ladung ist also gegenüber dem Bezugspotenzial positiv. Mit Fortschreiten des Ladungstrennungsprozesses wird φ immer größer (Bild 1.4): $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$. Nach Entfernen der äußeren Kraft bewegt sich die positive Ladung zurück vom höheren zum niedrigeren Potenzial und gibt hierbei ihre elektrische Energie wieder ab.

⁴genauer gesagt im Gravitationsfeld zwischen Masse und Erde

⁵genauer gesagt im elektrischen Feld zwischen Ladung und Gegenladung (Abschnitt 3.3.6.1)

Bild 1.4: Trennen einer Ladung $Q > 0$ von ihrer Gegenladung

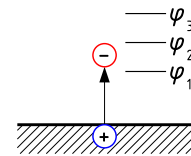


Aus diesem Gedankenexperiment folgt allgemeingültig: Überträgt man durch Ladungstrennung *positive* Ladungen auf einen *von seiner Umgebung isolierten, elektrisch leitfähigen* Körper, so *steigt* dessen elektrisches Potenzial.

2. Fall: Bewegung einer negativen Ladung

Nun gilt $Q < 0$ und weiterhin $W_{\text{pot}} > 0$. Aus Gl. (1.13) folgt nun $\varphi < 0$; das Potenzial der negativen Ladung ist also gegenüber dem Bezugspotenzial negativ. Mit Fortschreiten des Ladungstrennungsprozesses (Bild 1.5) wird φ immer kleiner (sein Betrag aber größer): $\varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$. Nach Entfernen der äußeren Kraft bewegt sich die negative Ladung zurück vom niedrigeren zum höheren Potenzial.

Bild 1.5: Trennen einer Ladung $Q < 0$ von ihrer Gegenladung



Aus diesem Gedankenexperiment folgt allgemeingültig: Überträgt man durch Ladungstrennung *negative* Ladungen auf einen *von seiner Umgebung isolierten, elektrisch leitfähigen* Körper, so *sinkt* dessen elektrisches Potenzial.

Gebiete, in denen Ladungsträgern durch eine äußere antreibende Kraft (*Elektromotorische Kraft*, EMK) elektrische Energie zugeführt werden kann, nennt man *aktive Gebiete* (vgl. Abschnitte 1.3.3 und 2.1.3) und Gebiete, in denen dies nicht der Fall ist, *passive Gebiete*.

Verbindet man zwei Gebiete mit freien Ladungsträgern unterschiedlichen elektrischen Potentials durch einen *passiven* Leiter, so bewegen sich die Ladungsträger im Leiter so, dass sie ihre elektrische Energie verringern. Positive Ladungen bewegen sich also vom höheren zum niedrigeren Potenzial, negative Ladungen vom niedrigeren zum höheren Potenzial. Die Ladungsbewegung endet, sobald die Potentialdifferenz ausgeglichen ist. *Ursache eines Stroms durch ein passives Gebiet ist also stets eine elektrische Potentialdifferenz.*

1.2.5 Elektrische Spannung

Die Differenz der elektrischen Potentiale zweier Punkte nennt man *elektrische Spannung* zwischen diesen Punkten. Wir bezeichnen diese beiden Punkte zunächst willkürlich mit P_A und P_B . Dann gilt unter Verwendung des Formelzeichens U der Spannung die Definitionsgleichung

$$U_{AB} = \varphi(P_A) - \varphi(P_B). \quad (1.15)$$

Die Einheit der elektrischen Spannung ist wie die des Potentials das *Volt*. Somit gilt

$$[U] = 1 \text{ V}. \quad (1.16)$$

Der *Doppelindex* AB an der Spannung U_{AB} in Gl. (1.15) bezeichnet eindeutig, dass vom Potential des ersten Punktes P_A das Potential des zweiten Punktes P_B subtrahiert werden muss, wenn die Spannung von Punkt P_A zu Punkt P_B berechnet werden soll. Daher gilt auch

$$U_{BA} = \varphi(P_B) - \varphi(P_A) = -(\varphi(P_A) - \varphi(P_B)) = -U_{AB}. \quad (1.17)$$

Gl. (1.17) verdeutlicht, dass die Angabe der Spannung zwischen zwei Punkten hinsichtlich ihres Vorzeichens nur dann eindeutig ist, wenn klar erkennbar ist, welches Potential von welchem subtrahiert wurde. Das Potential, das subtrahiert wird, spielt die Rolle eines *Bezugspotentials*. Dies wird besonders deutlich, wenn man den sehr praxisrelevanten Spezialfall betrachtet, dass das Bezugspotential null ist, also

$$\varphi(P_0) = 0 \text{ V} \quad (1.18)$$

gilt. Dann folgt für die Spannung zwischen einem beliebigen Punkt P_A und dem *Bezugspunkt* P_0

$$U_{A0} = \varphi(P_A) - \varphi(P_0) = \varphi(P_A). \quad (1.19)$$

Die Angabe einer Spannung für einen einzelnen Punkt ist nicht möglich.

Beispiel 1.6: Potenzialbetrachtungen bei einer Batterie

Betrachtet wird eine Batterie, deren Spannung zwischen Pluspol (P) und Minuspol (M) konstant 1,5 V betrage. Welches Potential hat der Minuspol der Batterie gegenüber dem Erdpotential φ_E , wenn

- die Batterie elektrisch isoliert aufgehängt ist
- der Minuspol der Batterie mit der Erde verbunden ist
- der Pluspol der Batterie mit der Erde verbunden ist
- der Pluspol der Batterie mit einem Hochspannungsgenerator verbunden ist, der ein Potential von $\varphi_H = 10.000 \text{ V}$ gegen Erde erzeugt?

Für die Batterie gilt $U_{PM} = \varphi_P - \varphi_M = 1,5 \text{ V}$ und damit auch $\varphi_M = \varphi_P - 1,5 \text{ V}$. Das Potential der Erde kann stets mit $\varphi_E = 0 \text{ V}$ angesetzt werden.

- Da die Batterie keine leitende Verbindung zur Erde hat und nicht bekannt ist, ob sie insgesamt elektrisch ungeladen ist, ist keine Aussage über ihr Potential möglich. Das Potential des Minuspols ist aber auf jeden Fall um 1,5 V niedriger als das des Pluspols.
- Der Minuspol liegt nun auf Erdpotential, es gilt also $\varphi_M = \varphi_E = 0 \text{ V}$.
- Nun gilt $\varphi_P = \varphi_E = 0 \text{ V}$. Daraus folgt $\varphi_M = -1,5 \text{ V}$.
- Es gilt $\varphi_P = \varphi_H = 10.000 \text{ V}$ und $\varphi_M = \varphi_P - 1,5 \text{ V} = \varphi_H - 1,5 \text{ V} = 9998,5 \text{ V}$.

1.3 Grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt werden Begriffe und Zusammenhänge erläutert, die für das Verständnis aller nachfolgenden Kapitel von fundamentaler Bedeutung sind.

1.3.1 Modellieren, Modell

Unter dem Begriff *Modellieren* versteht man das Beschreiben der Eigenschaften bzw. des Verhaltens eines komplexen Gegenstandes oder Sachverhaltes durch eine *einfachere Nachbildung*. Das Ergebnis dieses vereinfachenden Abbildungsprozesses ist ein *Modell*. Ein Modell kann z. B. bestehen aus

- einem Satz von Gleichungen,
- einer Skizze, die darstellt, welche funktionalen Komponenten wie miteinander verbunden sind,
- einem physikalischen Aufbau mit äquivalentem Verhalten,
- einem Programm, das das Verhalten auf einem Rechner nachbildet.

Ein Modell soll stets so *einfach* wie möglich sein, um den Aufwand zu seiner Erstellung und Anwendung so gering wie möglich zu halten. Andererseits muss ein Modell so *komplex* sein, dass es in der Lage ist, die Effekte, die untersucht werden sollen, *genau genug* nachzubilden. Eine *Abweichung* zwischen dem Verhalten eines Modells und der physikalischen Realität, die es beschreiben soll, ist bei technischen Anwendungen *unvermeidbar*. Das Bewusstsein für die Unverzichtbarkeit und die Konsequenzen des Modellierens ist eine fundamentale Voraussetzung für das sinnvolle und seriöse Arbeiten als Ingenieur.

Alle physikalischen Gesetze sind Modelle für die in der Natur auftretenden Erscheinungen (*Phänomene*). Je nach den Anforderungen an die Genauigkeit des Modells werden in der Physik für bestimmte Phänomene unterschiedliche Modelle verwendet (z. B. Aufbau der Materie, Gravitation). Menschen können wegen ihrer sehr beschränkten Sinne die sie umgebende Natur nur modellhaft beschreiben. Zu dieser Natur gehören auch alle elektrischen Erscheinungen. Die im Rahmen der Grundlagen der Elektrotechnik gelehrten Zusammenhänge reichen zur Beschreibung der elektrischen Phänomene aus *makroskopischer Sicht* (also oberhalb der Ebene der Atome) in der Regel aus. Die gesamte *Theorie der elektrischen Netzwerke* (Kapitel 2 und 5 bis 9) beruht auf einer groben Modellierung prinzipiell *räumlich ausgedehnter, zeitvarianter* und *nichtlinearer* elektromagnetischer Anordnungen durch einfache *Elemente mit konzentrierten Parametern*, die oftmals als *zeitinvariant* und *linear* betrachtet werden. Dass das unter Verwendung solcher Modelle berechnete Verhalten existierender oder zu entwickelnder Objekte nicht mit der Realität übereinstimmen kann, ist für die Ingenieur-Praxis unbedeutend, solange die Ergebnisse für einen bestimmten Anwendungsfall *genau genug* sind.

1.3.2 Klemme, Zweipol, Dreipol, n-Pol

Ein *Zweipol* ist eine elektrische Anordnung, die nur über zwei *Klemmen* (Anschlüsse) elektrisch zugänglich ist oder als zugänglich betrachtet wird. Das Schaltzeichen für einen *allgemeinen Zweipol* (Bild 1.6) sollte nicht mit dem des elektrischen Widerstandes (Abschnitt 2.1.1.2) verwechselt werden. Aus dem Ladungserhaltungssatz (Abschnitt 3.1.1.2) folgt, dass ein Strom, der in die eine Klemme eines Zweipols hineinfließt, *ohne zeitliche Verzögerung* aus der anderen

Klemme wieder herausfließen muss. Da bei genauer Betrachtung jede elektrische Anordnung unvermeidlich über den gesamten sie umgebenden Raum mit den sie umgebenden Objekten wechselwirkt, kann ein Zweipol nach obiger Definition nur eine Modellvorstellung sein. Beson-



Bild 1.6: Schaltzeichen eines allgemeinen Zweipols

ders einfach beschreiben lassen sich die idealisierten Modelle der elektrischen *Grundzweipole* Spannungsquelle, Stromquelle (Abschnitt 2.1.3), Widerstand (Abschnitte 2.1.2 und 5.5.1), Induktivität (Abschnitt 5.5.2) und Kapazität (Abschnitt 5.5.3). Zur vollständigen Beschreibung des *Klemmenverhaltens*, also des Zusammenhangs zwischen der Spannung zwischen den beiden Klemmen und dem Strom durch die Klemmen, reicht bei diesen Zweipolen eine einzige Gleichung aus, die nur einen das Zweipolverhalten kennzeichnenden *Kennwert* (*Parameter*) enthält.

Die wichtigsten Bauelemente der Elektronik sind die verschiedenen Ausführungsformen von Transistoren (Abschnitt 10.5.3), die *Dreipole* sind.

Eine Schaltung, die über n Klemmen zugänglich ist, bezeichnet man als *n-Pol*.

1.3.3 Aktiver und passiver Zweipol

Ein Zweipol, der *prinzipiell* in der Lage ist, *im zeitlichen Mittel* über seine Klemmen *elektrische Energie* an die übrige Schaltung abzugeben, wird als *aktiver Zweipol* bezeichnet. Alle *elektrischen Quellen* (Abschnitt 2.1.3) sind aktive Zweipole. Ein Zweipol, der diese Eigenschaft nicht aufweist, ist ein *passiver Zweipol*.

1.3.4 Erzeuger und Verbraucher

Ein Zweipol, der (zum betrachteten Zeitpunkt) *tatsächlich* über seine Klemmen *elektrische Energie* an die übrige Schaltung abgibt (der den Ladungsträgern, die ihn durchströmen, also elektrische Energie zuführt), wird als *Erzeuger* bezeichnet. Im zeitlichen Mittel können nur aktive Zweipole als Erzeuger wirken. Ein *Verbraucher* ist im Gegensatz dazu ein Zweipol, der *tatsächlich* über seine Klemmen *elektrische Energie* aufnimmt (in dem die strömenden Ladungsträger also elektrische Energie abgeben). Dabei ist es unerheblich, in welche andere Energieform (z. B. Wärme, mechanische Energie, chemische Energie) die aufgenommene Energie umgewandelt wird.

Widerstände (Abschnitt 2.1.2) sind stets Verbraucher. Die idealisierten Zweipole *Kapazität* (Abschnitt 3.3.5.1) und *Induktivität* (Abschnitt 4.3.1.5) können zu unterschiedlichen Zeiten sowohl als Erzeuger als auch als Verbraucher wirken, sind aber nur in der Lage, Energie abzugeben, die sie zuvor aufgenommen haben. Im zeitlichen Mittel geben sie also weder Energie ab, noch nehmen sie Energie auf. Sie werden daher zu den passiven Zweipolen gezählt. Ob ein *aktiver* Zweipol als Erzeuger oder als Verbraucher wirkt, hängt von seiner Beschaltung ab. Ein Akkumulator (Abschnitt 10.3.3.1) ist ein aktiver Zweipol, der sowohl als Erzeuger oder auch als Verbraucher (nämlich beim Aufladen) wirken kann.

1.3.5 Tor, Torbedingung, Zweitor

Ein *Klemmenpaar* eines n -Pols, bei dem der Strom, der in die eine Klemme hineinfließt, stets gleich dem Strom ist, der aus der anderen Klemme herausfließt (dies ist die *Torbedingung*), wird als *Tor* bezeichnet. Einen Zweipol kann man daher auch *Eintor* nennen, was aber unüblich ist. Ein beliebiges Klemmenpaar eines n -Pols wird auf jeden Fall dadurch zum Tor, dass es von außen mit einem Zweipol beschaltet wird, da dieser die Einhaltung der Torbedingung an dem Klemmenpaar, an das er angeschlossen ist, erzwingt.

Ein *Zweitor* ist ein *Vierpol*, der aus zwei Toren besteht. Häufig kann aufgrund des Informations- oder Energieflusses ein aus den *Eingangsklemmen* bestehendes *Eingangstor* und ein aus den *Ausgangsklemmen* bestehendes *Ausgangstor* festgelegt werden. Das Schaltzeichen eines allgemeinen Zweitors ist in Bild 1.7 dargestellt. Das bekannteste Beispiel für ein Zweitor ist ein Transformator (Abschnitt 5.13) mit zwei *galvanisch getrennten* (d. h. elektrisch nicht leitfähig verbundenen) Wicklungen).



Bild 1.7: Schaltzeichen eines allgemeinen Zweitors

1.3.6 Elektrisches Netzwerk

Die Zusammenschaltung mehrerer elektrischer n -Pole (*Netzwerkelemente*) nennt man elektrisches *Netzwerk* (in der Praxis oft nur „elektrische Schaltung“). Ein elektrisches Netzwerk kann im einfachsten Fall aus zwei Zweipolen (z. B. Batterie und Glühlampe), aber auch aus Milliarden von Netzwerkelementen (z. B. integrierter Halbleiterspeicher) bestehen. Die räumliche Ausdehnung eines elektrischen Netzwerks reicht von einigen Atomdurchmessern bei nanoelektronischen Schaltungen bis zu einem großen Teil der Erdoberfläche beim weltweiten Telekommunikationsnetz.

1.3.7 Schaltzeichen, Schaltplan

Die *grafische Darstellung* eines elektrischen Netzwerks unter Verwendung von *Schaltzeichen* für die enthaltenen *realen Bauelemente* wird in der Praxis als *Schaltplan* oder *Stromlaufplan* bezeichnet. Die Schaltzeichen für Schaltpläne sind u. a. in [ding] und [dinh] genormt. Aus einem Schaltplan geht hervor,

- welche Art von Bauelementen
- mit welchen elektrischen Kenngrößen (Parametern)
- wie elektrisch miteinander verbunden sind.

Schaltpläne werden z. B. zur Beschreibung einer im Labor aufzubauenden Schaltung und bei der Entwicklung und Reparatur elektronischer Geräte eingesetzt.

Der Signal- oder Energiefluss in einem Schaltplan erfolgt in der Regel von links nach rechts. In dieser Richtung ist ein Schaltplan daher auch zu „lesen“.

1.3.8 Ersatzschaltbild

Ein *Ersatzschaltbild* (ESB) ist auf den ersten Blick von einem Schaltplan kaum zu unterscheiden. Die in ihm enthaltenen *Schaltzeichen* stimmen mit denen in Schaltplänen gemäß Abschnitt 1.3.7 überein, bezeichnen aber *keine realen Bauelemente*, sondern *idealisierte Modelle von Bauelementen*. Das elektrische Verhalten dieser Modelle ist zwar mathematisch einfach zu beschreiben, kann aber mit dem der realen Bauelemente nicht identisch sein (Abschnitt 1.3.1). Um dennoch eine ausreichend genaue Nachbildung des Verhaltens einer realen elektrischen Schaltung zu erreichen, muss in der Regel das Verhalten eines einzelnen realen Bauelements durch eine *Ersatzschaltung* aus mehreren idealisierten Elementen nachgebildet werden. Auf verschiedene Möglichkeiten zum Modellieren des Verhaltens einfacher Bauelemente (elektrische Quelle, Widerstand, Kondensator, Spule, Transformator) wird in den entsprechenden Abschnitten dieses Buches eingegangen.

Durch Linien dargestellte *Verbindungsleitungen* sind in Ersatzschaltbildern stets als ideale (verlust- und verzögerungsfreie) elektrische Verbindungen aufzufassen, die dafür sorgen, dass alle mit einer solchen Leitung verbundenen Anschlüsse *zu jedem Zeitpunkt das gleiche elektrische Potenzial* haben.

Schaltpläne, anhand derer das Verhalten elektrischer Schaltungen untersucht werden soll, sind *stets als Ersatzschaltbilder aufzufassen*. Diese Denkweise bereitet Anfängern oft Schwierigkeiten, weil sie Informationen in Ersatzschaltbildern hineininterpretieren, die gar nicht enthalten sind. Ein Beispiel hierfür ist das Schaltzeichen für die Induktivität und die Spule. In einem *Ersatzschaltbild* wird durch dieses Schaltzeichen eine *ideale Spule* bezeichnet, die außer ihrer konstanten Induktivität keine weiteren Eigenschaften besitzt, insbesondere keinerlei Verluste. Sollen diese Verluste im Ersatzschaltbild modelliert werden, so ist hierfür unbedingt mindestens ein zusätzlicher Widerstand einzuzichnen und bei der Untersuchung des Schaltungsverhaltens entsprechend zu berücksichtigen (Abschnitt 5.12.4). Soll eine Schaltung mit einem *Netzwerkanalyseprogramm* (Abschnitt 2.6) untersucht werden, so ist ebenfalls zu beachten, dass die verwendete Schaltungsbeschreibung den Charakter eines Ersatzschaltbildes haben muss.

1.3.9 Analyse und Synthese

Die Untersuchung eines Gegenstandes, Prozesses oder Zusammenhangs nennt man *Analyse*. Hierbei wird das Untersuchungsobjekt in der Regel physikalisch oder logisch *zerlegt*, bis seine Struktur und/oder Funktion hinreichend genau bekannt und z. B. mittels mathematischer Gleichungen beschreibbar ist. Die Analyse physikalisch existierender Objekte erfolgt oftmals auf Basis von Messungen ihres Verhaltens.

Mit dem Begriff *Synthese* wird das *Zusammenfügen* von Einzelteilen zu einem komplexeren Ganzen bezeichnet. Synthese ist prinzipiell schwieriger als Analyse, da es in der Regel mehrere Möglichkeiten gibt, die gewünschten Eigenschaften zu realisieren [Süß05]. Je komplexer das zu entwickelnde Gebilde, desto anspruchsvoller ist das zu lösende *Optimierungsproblem*. Existieren Modelle des Zielsystems und der zur Verfügung stehenden Komponenten zu seiner Realisierung, kann das Lösen des Optimierungsproblems theoretisch einem geeigneten Rechenprogramm überlassen werden. Praktisch wächst die erforderliche Rechenzeit exponentiell mit der Komplexität. An dieser Stelle sind qualifizierte Ingenieure gefragt, die auf Grund ihrer Erfahrung und Kreativität den Optimierungsprozess so steuern, dass in kurzer Zeit eine Lösung

gefunden wird, die zwar in der Regel nicht optimal, für den jeweiligen Anwendungsfall aber *gut genug* ist.

1.4 Zählpfeile, Zählpfeilsysteme

Die Angabe des *vorzeichenbehafteten Zahlenwertes* einer Spannung oder eines Stroms ist nur zusammen mit der Angabe einer *Bezugsrichtung* eindeutig. Bei einer Spannung muss bekannt sein, zwischen welchen beiden Punkten *in welcher Reihenfolge* die Potenzialdifferenz gebildet wurde (Abschnitt 1.2.5). Bei einem Strom muss bekannt sein, welche *Annahme* seiner (technischen) Stromrichtung (Abschnitte 1.2.2 und 1.2.3) seiner Ermittlung zugrunde gelegt wurde.

Eine *skalare* elektrische (oder magnetische, siehe Kapitel 4) Größe, deren Wert vorzeichenbehaftet und nur zusammen mit der Angabe einer Bezugsrichtung hinsichtlich der Wirkungsrichtung eindeutig ist, nennt man *Zählpfeilgröße*. Die Sinnfälligkeit dieser Bezeichnung ist u. a. aus den Erläuterungen zu den Gln. (2.78) und (2.84) ersichtlich.

Die Festlegung der Bezugsrichtung kann durch Angabe geeigneter Indizes am Formelzeichen der betreffenden Größe oder durch Einzeichnen eines *Richtungspfeils* in einem Schaltplan bzw. Ersatzschaltbild in unmittelbarer Nähe des Formelzeichens der Größe erfolgen. Als Bezeichnung für diese Pfeile sind die Begriffe *Bezugspfeil* und *Zählpfeil* üblich ([dine], in [dinf] nur noch vage als „Pfeil“ bezeichnet).

Bei komplizierten Schaltungen ist es ratsam, für *alle* Zählpfeilgrößen Zählpfeile im Ersatzschaltbild einzuzeichnen.

Die konsequente Verwendung von Zählpfeilen ist in der deutschsprachigen elektrotechnischen Fachliteratur seit vielen Jahrzehnten üblich und ein wesentliches Merkmal der Fachdidaktik der Elektrotechnik. In Physik-Lehrbüchern werden Zählpfeile in der Regel leider nicht verwendet. Das führt dazu, dass in elektrischen Anordnungen, die in diesen Büchern untersucht werden, die Polaritäten von Spannungen und die Richtungen von Strömen oft durch Raten oder mittels Plausibilitätsbetrachtungen ermittelt werden müssen.

1.4.1 Strom- und Spannungszählpfeile

Der *Zählpfeil eines Stroms* wird – bei farblicher Darstellung in rot – in (oder neben) die Darstellung des Leiters gezeichnet, durch den der Strom fließt (Bild 1.8a). Der *Zählpfeil einer Spannung* wird – bei farblicher Darstellung in blau – vom Ort des ersten Potenzials zum Ort des zweiten Potenzials (des *Bezugspotenzials*) nach Gl. (1.15) als gerader (oder gebogener) Pfeil eingezeichnet⁶ (Bild 1.8b). Spannungszählpfeile sollen möglichst keine anderen grafischen Objekte berühren.

In einfachen Anordnungen sind die *physikalischen Wirkungsrichtungen* formal unbekannter Zählpfeilgrößen häufig offensichtlich. Für solche unbekanntes Größen und für vorgegebene Zählpfeilgrößen wählt man zweckmäßiger-, aber *nicht notwendigerweise* die Zählpfeilrichtungen so, dass die Zahlenwerte der zugehörigen Größen positive Vorzeichen haben.

In zu analysierenden Schaltungen sind in der Regel zunächst viele Ströme und Spannungen nach Betrag und Wirkungsrichtung unbekannt. Um eine unbekanntes Zählpfeilgröße zu berechnen,

⁶In [dinf] werden darüber hinaus etliche weitere Varianten zur Angabe der Bezugsrichtung elektrischer Spannungen angegeben, die im Gegensatz zu denen in [dine] nicht hilfreich sind.

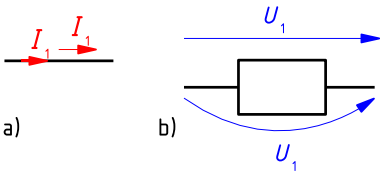


Bild 1.8: Varianten der Eintragung von Zählpeilen für Strom (a) und Spannung an einem allgemeinen Zweipol (b)

muss unbedingt *am Anfang* des Lösungsweges die Richtung ihres Zählpeils festgelegt werden. *Die hierbei gewählte Zählpeilrichtung ist prinzipiell beliebig!* Am Ende des Lösungsweges entscheidet das Vorzeichen des Zahlenwertes einer Zählpeilgröße, ob ihr Zählpeil in der Wirkungsrichtung oder der entgegengesetzten Richtung eingetragen wurde. *Es ist ein verbreiteter Anfängerfehler, den Zählpeil einer Zählpeilgröße, für die ein negativer Zahlenwert berechnet wurde, als „falsch angenommen“ zu bezeichnen und seine Richtung umzudrehen. Dann passt allerdings der Rechenweg nicht mehr zur Zählpeilrichtung, womit die Lösung insgesamt falsch ist!*

Hat ein Strom einen positiven Zahlenwert, stimmt seine *technische Stromrichtung* mit der Zählpeilrichtung überein. Anderenfalls sind technische Stromrichtung und Zählpeilrichtung entgegengesetzt.

Hat eine Spannung einen positiven Zahlenwert, so weist ihr Zählpeil vom höheren zum niedrigeren elektrischen Potenzial. Anderenfalls weist der Zählpeil vom niedrigeren zum höheren Potenzial.

Bild 1.9 zeigt die Zusammenschaltung zweier Zweipole ZP1 und ZP2 in vier Darstellungsvarianten, die alle den selben physikalischen Sachverhalt beschreiben. Die Varianten unterscheiden sich aber in der Richtung der Strom- und Spannungszählpeile und damit in den Vorzeichen der zugehörigen Klemmengrößen.

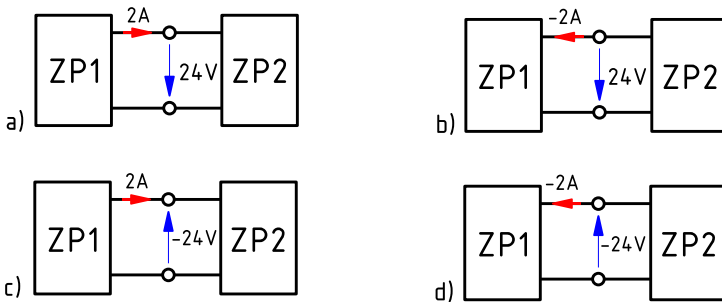


Bild 1.9: Verschiedene Anordnungen der Strom- und Spannungszählpeile bei der Zusammenschaltung zweier Zweipole und Auswirkung auf die Vorzeichen der Zählpeilgrößen

1.4.2 Zählfeilsysteme an Zweipolen

Bei einem Zweipol gibt es *zwei prinzipiell unterschiedliche* Möglichkeiten zur Anordnung der Zählpfeile für die Klemmengrößen *zueinander*. Sind die Zählpfeile *gleichgerichtet*, nennt man dies *Verbraucher-Zählfeilsystem* (VZS), sind sie *entgegengerichtet*, *Erzeuger-Zählfeilsystem* (EZS).

In den beiden folgenden Abschnitten wird gezeigt:

- Sowohl an Verbrauchern als auch an Erzeugern dürfen beide Zählfeilsysteme verwendet werden.
- Bei einem unbekanntem Zweipol lässt sich aus den Vorzeichen der Klemmengrößen und der Art des verwendeten Zählfeilsystems eindeutig schließen, ob es sich um einen Verbraucher oder einen Erzeuger handelt.

1.4.2.1 Verbraucher-Zählfeilsystem

Bild 1.10 zeigt zwei verschiedene, übliche Darstellungen eines allgemeinen Zweipols mit Zählpfeilen im Verbraucher-Zählfeilsystem.

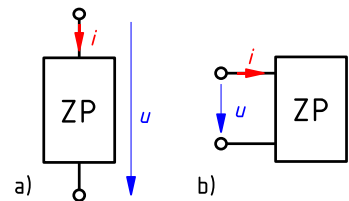


Bild 1.10: Verbraucher-Zählfeilsystem an einem allgemeinen Zweipol in zwei verschiedenen Darstellungsvarianten

Die Zählpfeile der Klemmenspannungen sind wie üblich (aber nicht notwendig) von oben nach untenweisend eingezeichnet.

Die Identifikation des Zählfeilsystems bei Zweipolen, deren Anschlüsse zu einer Seite hin gezeichnet sind (Bild 1.9, Bild 1.10b), bereitet Ungeübten oftmals Schwierigkeiten. Dann sollte man in Gedanken die Anschlüsse „geradeziehen“, so dass sich eine Darstellung ergibt, in der das Zählfeilsystem aufgrund der gleichgerichteten Zählpfeile sofort erkennbar ist (Bild 1.10a).

Freie positive Ladungsträger bewegen sich in einem *Verbraucher* vom höheren zum niedrigeren Potenzial (Abschnitt 1.2.4). Daraus folgt für einen Verbraucher bei Verbraucher-Zählfeilsystem (Bild 1.11a): Ist $u > 0$, so ist auch $i > 0$. Ist $u < 0$, muss auch $i < 0$ sein.

Allgemein gilt: *Bei einem Verbraucher haben die Klemmengrößen bei Verwendung des Verbraucher-Zählfeilsystems immer gleiche Vorzeichen.*

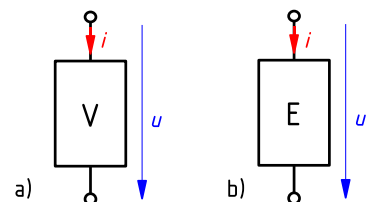


Bild 1.11: Verbraucher (a) und Erzeuger (b) mit Zählpfeilen im VZS

In einem *Erzeuger* werden freie positive Ladungsträger vom niedrigeren zum höheren Potenzial bewegt (Abschnitt 1.2.4). Daraus folgt für einen Erzeuger bei Verbraucher-Zählpfeilsystem (Bild 1.11b): Ist $u > 0$, so ist $i < 0$. Ist $u < 0$, so muss $i > 0$ gelten.

Allgemein gilt: *Bei einem Erzeuger haben die Klemmengrößen bei Verwendung des Verbraucher-Zählpfeilsystems immer unterschiedliche Vorzeichen.*

1.4.2.2 Erzeuger-Zählpfeilsystem

In Bild 1.12 sind zwei verschiedene, übliche Darstellungen von Zweipolen mit Zählpfeilen im Erzeuger-Zählpfeilsystem angegeben.

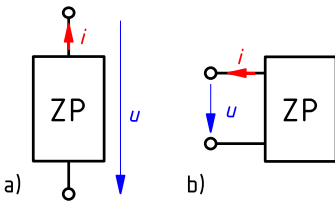


Bild 1.12: Erzeuger-Zählpfeilsystem an einem allgemeinen Zweipol in zwei verschiedenen Darstellungsvarianten

Die Zählpfeile der Klemmenspannungen sind wieder willkürlich von oben nach unten weisend eingezeichnet. In Bild 1.12a sind die einander entgegengerichteten Zählpfeile der Klemmengrößen sofort erkennbar.

Aus den in Abschnitt 1.4.2.1 dargestellten Gründen gilt für einen *Erzeuger* bei Erzeuger-Zählpfeilsystem (Bild 1.13a): Ist $u > 0$, so ist auch $i > 0$. Ist $u < 0$, so gilt auch $i < 0$.

Allgemein gilt: *Bei einem Erzeuger haben die Klemmengrößen bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems immer gleiche Vorzeichen.*

Daraus folgt für einen *Verbraucher* bei Erzeuger-Zählpfeilsystem (Bild 1.13b): Ist $u > 0$, so muss $i < 0$ sein. Ist $u < 0$, so muss $i > 0$ sein.

Allgemein gilt: *Bei einem Verbraucher haben die Klemmengrößen bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems immer unterschiedliche Vorzeichen.*

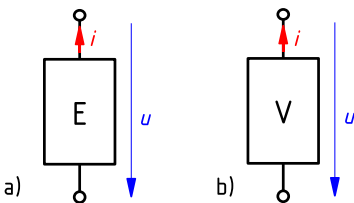


Bild 1.13: Erzeuger (a) und Verbraucher (b) mit Zählpfeilen im EZS

1.4.3 Zählpfeile an Zweitoren

Zweitore spielen bei der Verarbeitung elektrischer Signale, z. B. in der Nachrichtentechnik, eine überragende Rolle. Sie wandeln ein Signal an ihren *Eingangsklemmen* in ein (verändertes) Signal an ihren *Ausgangsklemmen* um. Die Wahl der Zählpfeilsysteme an den beiden Toren kann prinzipiell unabhängig voneinander erfolgen. In der Regel werden die Spannungszählpfeile an beiden Toren in der gleichen Richtung angenommen (Bild 1.14, Bild 1.15).

1.4.3.1 Symmetrisches Zählpfeilsystem

Soll nur ein einzelnes Zweitor betrachtet werden, ist es oft zweckmäßig, an beiden Toren das gleiche Zählpfeilsystem zu verwenden, da sich hierdurch eine bezüglich der Vorzeichen mathematisch symmetrische Beschreibung des Klemmenverhaltens des Zweitors ergibt.

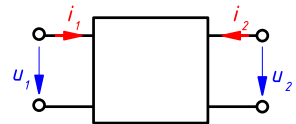


Bild 1.14: Symmetrisches Zählpfeilsystem an einem Zweitor

In der Regel wird das Verbraucher-Zählpfeilsystem gewählt, so dass die an gegenüberliegenden Klemmen der beiden Tore eingetragenen Stromzählpfeile in das Zweitor hinein weisen (Bild 1.14). Prinzipiell möglich, aber unüblich, ist die Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems an beiden Toren.

1.4.3.2 Ketten-Zählpfeilsystem

Bei der Signalverarbeitung werden häufig mehrere Zweitore kettenförmig hintereinander geschaltet.

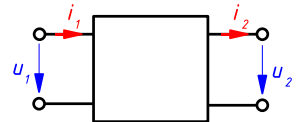


Bild 1.15: Ketten-Zählpfeilsystem an einem Zweitor

In diesem Fall sind die Klemmengrößen am Ausgang eines Zweitors identisch mit den Klemmengrößen am Eingang des nächsten Zweitors. Trägt man die Stromzählpfeile an den Eingangstoren im Verbraucher-Zählpfeilsystem an, so ergibt sich zwangsläufig, dass die Zählpfeile an den Ausgangstoren im Erzeuger-Zählpfeilsystem anliegen (Bild 1.15).



2 Gleichstromnetzwerke

Ein *Gleichstromnetzwerk* ist ein elektrisches Netzwerk, in dem alle Spannungen und Ströme *zeitlich konstant* (*zeitinvariant*) sind.

Gleichstromnetzwerke sind aus den *elementaren Zweipolen der Gleichstromtechnik* aufgebaut:

- elektrischer Widerstand
- elektrische Spannungsquelle
- elektrische Stromquelle.

Der Begriff der Gleichstromnetzwerke schließt durchaus die Behandlung von Netzwerken ein, bei denen die Eigenschaften eines oder mehrerer Zweipole variabel sind. Dann sind gedanklich nacheinander mehrere Varianten des Netzwerks zu betrachten, von denen jede zeitlich konstante Eigenschaften aufweist.

Die für *beliebige* Netzwerke gültigen Begriffe, Gesetzmäßigkeiten und Verfahren sind für den Spezialfall der Gleichstromnetzwerke besonders einfach mathematisch zu formulieren und auszuwerten. Daher ist es zur Vermittlung von Verständnis für die fundamentalen Zusammenhänge in elektrischen Netzwerken sinnvoll, zunächst die in der Praxis weniger bedeutsamen Gleichstromnetzwerke zu betrachten. Die Kapitel 5 bis 9, in denen das Verhalten und die Berechnung von Netzwerken bei *zeitlich veränderlichen* (*zeitvarianten*) Vorgängen behandelt werden, setzen die sichere Beherrschung der hier vermittelten Inhalte voraus.

2.1 Grundgesetze im unverzweigten Gleichstromkreis

In diesem Abschnitt werden sehr einfache, meist nur aus zwei Zweipolen bestehende Netzwerke betrachtet.

2.1.1 Ohmsches Gesetz

Das Ohmsche Gesetz beschreibt das Klemmenverhalten einer in der Praxis besonders wichtigen und mathematisch besonders einfach zu beschreibenden Klasse *resistiver Zweipole*, also von Zweipolen, die elektrische Energie nur aufnehmen und nicht speichern können und somit stets als *Verbraucher* wirken.

2.1.1.1 Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

Der deutsche Experimentalphysiker *Georg Simon Ohm* untersuchte um 1820 die Gesetzmäßigkeiten der Stromleitung in Metallen und Elektrolyten. Damals waren die uns heute selbstverständlichen Begriffe „Strom“ und „Spannung“ in der Elektrizitätslehre noch nicht allgemein gebräuchlich. Unter Verwendung selbst konstruierter Gleichspannungsquellen sowie Spannungs- und Strommesser stellte er fest, dass der Strom I durch die von ihm untersuchten *metallischen Leiter*¹ im Rahmen der Messgenauigkeit proportional zur an die Leiter gelegten Spannung U war. Ohm arbeitete mit vergleichsweise *kleinen Spannungen und Strömen* und bei *konstanter Temperatur* der Leiter. Die mathematische Formulierung der Beobachtung von Ohm lautet

$$I \sim U. \quad (2.1)$$

2.1.1.2 Elektrischer Leitwert, elektrischer Widerstand

Die durch Gl. (2.1) beschriebene *Proportionalität* kann durch Einführen eines Proportionalitätsfaktors G in eine *lineare Gleichung* umgewandelt werden:

$$I = GU \quad (2.2)$$

Nachfolgend wird davon ausgegangen, dass für die Klemmengrößen U und I des betrachteten Zweipols das Verbraucher-Zählpeilsystem verwendet wird. Bei einem Verbraucher haben Spannung und Strom dann immer das gleiche Vorzeichen (Abschnitt 1.4.2.1). Der daher stets positive Faktor G bestimmt, wie groß der Strom I durch einen passiven Zweipol bei angelegter Spannung U ist. Da der Strom I gemäß Gl. (2.2) proportional zu G ansteigt, wird G als *elektrischer Leitwert* des Zweipols bezeichnet. Die Einheit des elektrischen Leitwertes ist das *Siemens*² mit dem Formelzeichen S. Aus Gl. (2.2) folgt

$$[G] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ V}} = 1 \text{ S}. \quad (2.3)$$

Der Kehrwert des elektrischen Leitwertes ist der *elektrische Widerstand* R :

$$R = \frac{1}{G} \geq 0 \quad (2.4)$$

Aus Gl. (2.4) ergibt sich mit Gl. (2.2)

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.5)$$

Die Einheit des elektrischen Widerstandes ist das *Ohm* mit dem Formelzeichen Ω . Mit Gl. (2.5) folgt

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 1 \Omega. \quad (2.6)$$

¹Wenn Ohm statt mit metallischen Leitern mit damals bekannten Halbleitern wie Kohle oder Selen experimentiert hätte, wäre er zu völlig anderen Ergebnissen gekommen. Dann hätte sich die Elektrotechnik und damit unsere technische Umwelt möglicherweise ganz anders entwickelt.

²In der englischsprachigen Fachliteratur wird oftmals noch die veraltete Einheit mho (Ohm rückwärts geschrieben) mit dem Formelzeichen ̄ verwendet.

Meist wird die aus Gl. (2.5) abgeleitete lineare Gl. (2.7) als das *Ohmsche Gesetz* bezeichnet:

$$U = RI \quad (2.7)$$

Als *Ohmscher Widerstand* wird ein Zweipol bezeichnet, bei dem der Widerstandswert R gemäß Gl. (2.5) vom Wert der Klemmengrößen U und I unabhängig ist. Technisch sind Ohmsche Widerstände nur näherungsweise realisierbar, da der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung bei allen leitfähigen Zweipolen mehr oder weniger nichtlinear ist, insbesondere für sehr kleine und sehr große Ströme, bei denen die statistische Natur der Elektronenbewegung bzw. die Erwärmung des Leiters durch den Stromfluss nicht mehr vernachlässigt werden können.

Beispiel 2.1: Berechnung des Stroms durch einen Ohmschen Widerstand

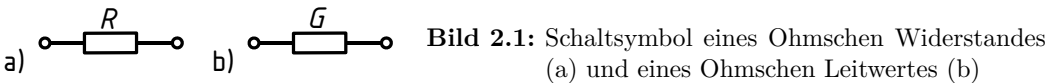
Eine Batterie liefert bei Anschluss eines Verbrauchers (z. B. einer Glühlampe) mit dem Widerstand $R = 7,5 \Omega$ die Klemmenspannung $U = 3,9 \text{ V}$. Wie groß ist der Strom I durch den Verbraucher?

Aus Gl. (2.7) ergibt sich der Strom zu

$$I = \frac{U}{R} = \frac{3,9 \text{ V}}{7,5 \Omega} = 0,52 \text{ A}$$

für Verbraucher-Zählpfeilsystem am Verbraucher.

Das in Schaltplänen und Ersatzschaltbildern verwendete Schaltzeichen für Ohmsche Widerstände nach [dinh] ist ein nicht ausgefülltes Rechteck (Bild 2.1).



Das Klemmenverhalten des Modells eines Ohmschen Widerstandes wird *vollständig* durch Angabe seines Widerstandswertes R oder seines Leitwertes G beschrieben. In der Praxis ist die Angabe des Widerstandswertes üblich. Wie auch in anderen Standardwerken zu den Grundlagen der Elektrotechnik wird in den folgenden Abschnitten aus didaktischen Gründen teilweise der Leitwert als Parameter zur Beschreibung des Klemmenverhaltens verwendet und dann der so beschriebene Zweipol insgesamt als *Ohmscher Leitwert* bezeichnet.

Die beiden Zweipoltypen „elektrischer Widerstand“ und „elektrischer Leitwert“ unterscheiden sich also in ihrem elektrischen Verhalten nicht. Sie werden lediglich durch unterschiedliche Kennwerte (Parameter) beschrieben.

Aus der Wortwahl der letzten Absätze geht hervor, dass der Begriff „Widerstand“ in der Elektrotechnik drei unterschiedliche Dinge bezeichnet:

1. ein reales Bauelement
2. einen idealisierten Zweipol als Modell für das reale Bauelement
3. den Widerstandswert eines Widerstandes nach 1. oder 2.

Beispiel 2.2: Parameter eines Ohmschen Widerstandes

Durch einen Ohmschen Widerstand fließt bei einer Spannung von 24 V ein Strom von 6 A. Wie groß sind der Widerstandswert R und der Leitwert G des Widerstandes?

Aus Gl. (2.5) folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24 \text{ V}}{6 \text{ A}} = 4 \Omega$$

und aus Gl. (2.4)

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{4 \Omega} = 0,25 \text{ S}.$$

Der durch das Ohmsche Gesetz beschriebene Zusammenhang wird grafisch durch die in Bild 2.2 dargestellte *Kennlinie* $U = f(I)$ oder gleichwertig durch die in Bild 2.3 dargestellte Kennlinie $I = g(U)$ beschrieben.

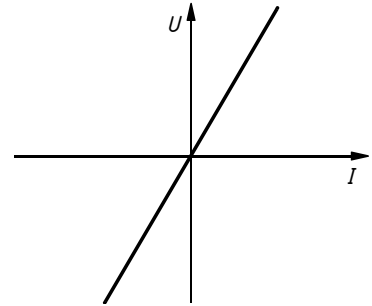


Bild 2.2: Kennlinie $U(I)$ eines Ohmschen Widerstandes bei VZS

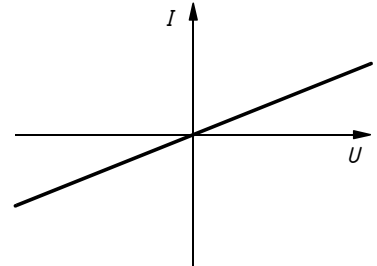


Bild 2.3: Kennlinie $I(U)$ eines Ohmschen Widerstandes bei VZS

Wichtige Eigenschaften dieser Kennlinien sind:

1. Sie sind Geraden wegen des linearen Zusammenhangs zwischen den Klemmengrößen.
2. Sie gehen durch den Ursprung $(0 \text{ A}, 0 \text{ V})$, da Widerstände passive Zweipole sind.
3. Sie verlaufen durch zwei Quadranten, da sich bei Umkehrung des Vorzeichens des Stroms auch das Vorzeichen der Spannung umkehrt.
4. Sie verlaufen durch den ersten und dritten Quadranten, wenn das Verbraucher-Zählpeilsystem am Widerstand verwendet wird, da dann Strom und Spannung immer das gleiche Vorzeichen haben. Bei Verwendung des Erzeuger-Zählpeilsystems an einem Widerstand verlaufen sie durch den zweiten und den vierten Quadranten.

5. Sie sind punktsymmetrisch zum Ursprung, da das Klemmenverhalten Ohmscher Widerstände polaritätsunabhängig ist.

2.1.2 Elektrische Widerstände

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen dem Widerstandswert und den geometrischen Abmessungen sowie den Materialeigenschaften für geometrisch besonders einfach aufgebaute Widerstände behandelt. Die hier nur plausibilisierten Zusammenhänge folgen aus den in Abschnitt 3.2 behandelten Grundgesetzen elektrischer Strömungsfelder.

2.1.2.1 Elektrische Leitfähigkeit, spezifischer elektrischer Widerstand

Betrachtet wird ein *gerader Leiter* aus einem Material, dessen elektrische Eigenschaften nicht vom Ort abhängen (*d. h. das Material ist elektrisch homogen*) und dessen Querschnittsgeometrie konstant über der Länge ist (Bild 2.4). Die Enden des Leiters seien mit *ideal leitfähigen Kontaktflächen (Elektroden)* senkrecht zur Leiterachse versehen.

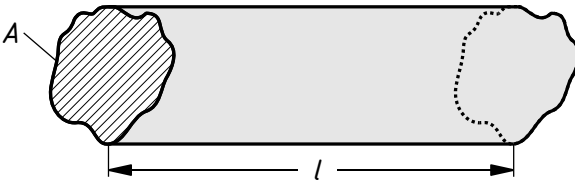


Bild 2.4: Gerader, homogener Leiter mit konstantem Querschnitt

Es leuchtet ein, dass der Wert des Widerstandes R zwischen den Elektroden proportional zur *Länge* l des Leiters ist. Also gilt

$$R \sim l. \quad (2.8)$$

Plausibel ist auch, dass der Wert des Leitwertes G zwischen den Elektroden proportional zum *Flächeninhalt* A des Leiterquerschnitts ist, also $G \sim A$ gilt und somit auch

$$R \sim \frac{1}{A}. \quad (2.9)$$

Die *Form* der Querschnittsfläche spielt keine Rolle, sofern es sich nicht um extrem dünne, schichtförmige Leiter handelt. Darüber hinaus ist der Widerstandswert zwischen den Elektroden nur noch vom Material des Leiters abhängig. Die aus Gl. (2.8) und Gl. (2.9) folgende Proportionalität

$$R \sim \frac{l}{A} \quad (2.10)$$

kann durch Einfügen eines *Proportionalitätsfaktors* in eine Gleichung überführt werden. Dieser Proportionalitätsfaktor berücksichtigt die elektrischen Eigenschaften des Leitermaterials.

Der Parameter ϱ in der *Bemessungsgleichung*

$$R = \varrho \frac{l}{A} \quad (2.11)$$

ist der *spezifische elektrische Widerstand* des Leitermaterials. Gl. (2.11) ist nicht allgemeingültig, sondern gilt exakt nur für Anordnungen gemäß Bild 2.4. Näherungsweise ist sie aber auch anwendbar, wenn der Leiter nicht gerade, sondern z. B. auf einen Trägerkörper aufgewickelt ist. Die Gleichung ist nicht mehr anwendbar, wenn das Material des Leiters *inhomogen* oder seine Querschnittsfläche nicht näherungsweise konstant ist.

In der Elektrotechnik ist es üblich, bei Leitern die Länge in m und die Querschnittsfläche in mm^2 anzugeben. Aus Gl. (2.11) ergibt sich als übliche Einheit von ϱ

$$[\varrho] = \frac{[R] [A]}{[l]} = 1 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{m}. \quad (2.12)$$

Mit Gl. (2.4) folgt aus Gl. (2.11)

$$G = \frac{1}{\varrho} \frac{A}{l}. \quad (2.13)$$

Der Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstandes ist die *elektrische Leitfähigkeit*³ κ des Leitermaterials

$$\kappa = \frac{1}{\varrho}. \quad (2.14)$$

Aus Gl. (2.14) folgt mit Gl. (2.12) als übliche Einheit der elektrischen Leitfähigkeit

$$[\kappa] = \frac{1}{[\varrho]} = 1 \frac{\text{m}}{\Omega \text{mm}^2} = 1 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} = 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}. \quad (2.15)$$

Mit Gl. (2.14) in Gl. (2.13) erhält man

$$G = \kappa \frac{A}{l}. \quad (2.16)$$

Tabelle 2.1 enthält für einige technisch wichtige metallische Leitermaterialien Anhaltswerte für die elektrische Leitfähigkeit bei 20 °C. Genauere Werte enthält Tabelle A.3 in Anhang A.3.

Tabelle 2.1: Anhaltswerte für die elektrische Leitfähigkeit einiger Metalle bei 20 °C

Material	Konstantan	Eisen	Platin	Aluminium	Gold	Kupfer	Silber
κ in S m/mm^2	2	10	10	36	45	56	62

Den von technisch wichtigen Materialien abgedeckten Wertebereich des spezifischen elektrischen Widerstandes stellt Bild 2.5 auf einer logarithmisch geteilten Skala dar.

Mit einem Verhältnis von etwa 1 : 10^{23} für die dargestellten üblichen Stoffe von metallischen Leitern wie Silber (Ag) über undotierte Halbleiter wie Silizium (Si) bis hin zu Isolatoren wie Polyvinylchlorid (PVC) ist der spezifische elektrische Widerstand eine Werkstoffeigenschaft mit einem besonders großen Wertebereich.

³alternative Formelzeichen für die elektrische Leitfähigkeit sind γ und σ

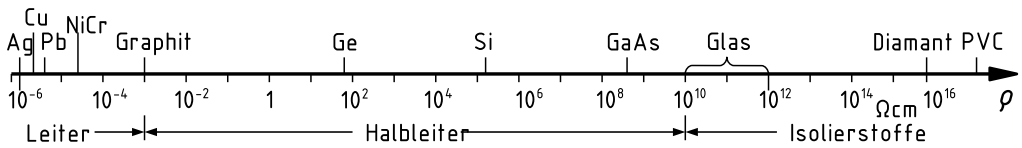


Bild 2.5: Wertebereich des spezifischen elektrischen Widerstandes

Beispiel 2.3: Widerstand einer zwiadrigen Leitung

Ein Verbraucher ist mittels einer 1 km langen, zwiadrigen Kupferleitung mit dem Kupferquerschnitt $A = 2 \cdot 70 \text{ mm}^2$ angeschlossen. Die Leitung hat bei 20°C die elektrische Leitfähigkeit $\kappa = 56 \text{ Sm/mm}^2$. Wie groß ist der Leitungswiderstand bei 20°C ?

Da der Strom durch den Hin- und den Rückleiter fließen muss, ist die Leiterlänge $l = 2 \cdot 1 \text{ km} = 2000 \text{ m}$. Da das Leitermaterial homogen und der Leiterquerschnitt konstant ist, darf Gl. (2.11) in Verbindung mit Gl. (2.14) angewandt werden:

$$R = \frac{l}{\kappa A} = \frac{2000 \text{ m}}{56 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} \cdot 70 \text{ mm}^2} = 0,51 \Omega$$

Der Widerstand dieser recht langen Leitung, wie sie z. B. zur Energieversorgung eingesetzt wird, ist wegen ihrer großen Querschnittsfläche erstaunlich klein.

Beispiel 2.4: Länge eines Widerstandsdrahtes

Wie lang muss der Heizdraht eines Kochgerätes sein, der aus Chromnickel mit der Leitfähigkeit $\kappa = 0,91 \text{ Sm/mm}^2$ besteht und den Durchmesser $d = 0,45 \text{ mm}$ hat, wenn er den Widerstand $R = 55 \Omega$ haben soll?

Bei dem Durchmesser $d = 0,45 \text{ mm}$ ist der Querschnitt $A = \pi d^2/4 = 0,159 \text{ mm}^2$. Nach Gl. (2.11) mit Gl. (2.14) wird dann die Leiterlänge

$$l = R \kappa A = 55 \Omega \cdot 0,91 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} \cdot 0,159 \text{ mm}^2 = 7,96 \text{ m}.$$

Obwohl der Heizdraht nicht gerade, sondern aufgewickelt ist, wird hier näherungsweise mit der Bemessungsgleichung für gerade Leiter gerechnet.

Beispiel 2.5: Ersatz einer Kupferleitung durch eine widerstandsgleiche Aluminiumleitung

Eine Kupferleitung mit der Leitfähigkeit $\kappa_{\text{Cu}} = 56 \text{ Sm/mm}^2$ und dem Querschnitt $A = 10 \text{ mm}^2$ soll durch eine etwa widerstandsgleiche Aluminiumleitung mit der Leitfähigkeit $\kappa_{\text{Al}} = 36 \text{ Sm/mm}^2$ ersetzt werden.

Welchen Querschnitt muss die Aluminiumleitung erhalten? Wie verhalten sich die Leitungsmassen zueinander, wenn die Dichte von Kupfer $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \text{ g/cm}^3$ und die Dichte von Aluminium $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ g/cm}^3$ beträgt?

Da beide Leitungen bei gleicher Länge den gleichen Widerstand haben sollen, gilt

$$R = \frac{l}{\kappa_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Al}} A_{\text{Al}}},$$

d. h.

$$\kappa_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}} = \kappa_{\text{Al}} A_{\text{Al}},$$

$$A_{\text{Al}} = \frac{\kappa_{\text{Cu}}}{\kappa_{\text{Al}}} A_{\text{Cu}} = \frac{56 \text{ S m/mm}^2}{36 \text{ S m/mm}^2} 10 \text{ mm}^2 = 15,6 \text{ mm}^2.$$

Nächster Normquerschnitt: 16 mm^2 . Für das Verhältnis der beiden Massen ergibt sich:

$$\frac{m_{\text{Al}}}{m_{\text{Cu}}} = \frac{\rho_{\text{Al}} A_{\text{Al}} l}{\rho_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}} l} = \frac{\rho_{\text{Al}} A_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}} A_{\text{Cu}}} = \frac{2,7 \text{ g/cm}^3 \cdot 16 \text{ mm}^2}{8,9 \text{ g/cm}^3 \cdot 10 \text{ mm}^2} = 0,485$$

Trotz seiner geringeren Leitfähigkeit ist das Aluminium hinsichtlich seiner Masse günstiger. Verglichen mit der Kupferleitung wird nur etwas weniger als die Hälfte der Masse an Leitermaterial benötigt.

Beispiel 2.6: Ersatz einer Aluminiumleitung durch eine Kupferleitung gleicher Abmessungen

Eine Verbindungsleitung in einer integrierten Schaltung hat eine Querschnittsfläche von $A = 10 \mu\text{m}^2$ und die Länge $l = 10 \text{ mm}$. Wie groß ist der Widerstand der Leitung, wenn sie aus Aluminium bzw. alternativ aus Kupfer hergestellt wird?

$$R_{\text{Al}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Al}} A} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{36 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} \cdot 10 \cdot (10^{-3} \text{ mm})^2} \approx 28 \Omega$$

Obwohl die Leitung sehr kurz ist, hat sie wegen ihrer sehr kleinen Querschnittsfläche einen erheblichen, hinsichtlich der Funktion der Schaltung nicht zu vernachlässigenden Widerstand.

$$R_{\text{Cu}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Cu}} A} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{56 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2} \approx 18 \Omega$$

Der um den Faktor $\kappa_{\text{Cu}}/\kappa_{\text{Al}} = 56/36 = 1,6$ verringerte Widerstand der Leitung wird mit deutlich erhöhtem Fertigungsaufwand erkaufte.

Beispiel 2.7: Strom durch eine große Glasplatte

Auf den beiden Seiten einer 6 mm dicken Glasplatte befinde sich je ein 2 m^2 großer Metallbelag. Das Glas habe den spezifischen Widerstand $\rho = 10 \text{ G}\Omega\text{m}$. Welcher Strom I fließt durch das Glas, wenn zwischen den Belägen die Spannung $U = 3 \text{ kV}$ anliegt?

Die Leiterlänge l ist hier durch die Dicke der Glasplatte gegeben. Der Leitungsquerschnitt kann mit guter Näherung gleich der Größe der Beläge gesetzt werden. Der Widerstand

beträgt daher nach Gl. (2.11)

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{10 \cdot 10^9 \Omega \text{m} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{m}}{2 \text{m}^2} = 30 \text{M}\Omega.$$

Mit Gl. (2.5) erhält man den Strom

$$I = \frac{U}{R} = \frac{3 \text{kV}}{30 \text{M}\Omega} = 0,1 \text{mA}.$$

Wegen des geringen Abstandes l der beiden Metallbeläge und der großen Durchtrittsfläche A fließt durch den Isolator der durchaus messbare Strom $I = 0,1 \text{mA}$!

2.1.2.2 Lineare Widerstände

Betrachtet man einen bestimmten Wert I_0 des Klemmenstroms, der durch einen beliebigen Widerstand R fließt, so gehört hierzu beim Verbraucher-Zählpfeilsystem ein bestimmter Wert

$$U_0 = R I_0 \quad (2.17)$$

der Klemmenspannung. Das Wertepaar (I_0, U_0) wird als *Arbeitspunkt* bezeichnet. Ändert sich der Klemmenstrom von I_0 ausgehend um einen beliebigen Wert ΔI , so ändert sich die Klemmenspannung um einen Wert ΔU .

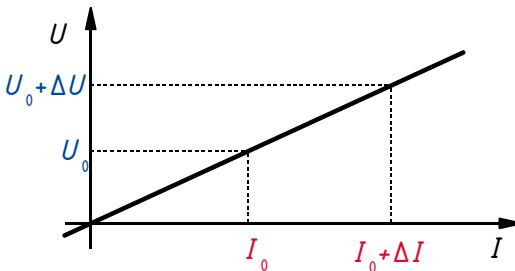


Bild 2.6: Kennlinie $U(I)$ eines Ohmschen Widerstandes bei VZS mit Arbeitspunkt und Steigungsdreieck

Nur bei Ohmschen Widerständen gilt (vgl. Bild 2.6)

$$U_0 + \Delta U = R(I_0 + \Delta I) = R I_0 + R \Delta I = U_0 + R \Delta I, \quad (2.18)$$

also

$$\Delta U = R \Delta I. \quad (2.19)$$

Betrachtet man kleine Änderungen ΔI um I_0 herum, so schreibt man im Grenzfall $\Delta I \rightarrow \pm 0$, aber $\Delta I \neq 0$ statt ΔI für die infinitesimal kleine Änderung dI und ebenso statt ΔU für die infinitesimal kleine Änderung dU . Damit folgt für Ohmsche Widerstände

$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} = R = \frac{U}{I}. \quad (2.20)$$

Ein Ohmscher Widerstand hat für *beliebige* Werte von I_0 und ΔI stets den selben Widerstandswert R . Die Steigung der Kennlinie $U(I)$ ist bei Ohmschen Widerständen bei Verbraucher-Zählpfeilsystem gleich dem Widerstandswert R . Daher wird bei Widerständen gern die Kennlinie $U(I)$ verwendet statt der meist üblichen Darstellung $I(U)$.

2.1.2.3 Nichtlineare Widerstände

Nun werden *nichtlineare resistive Zweipole* betrachtet, die hier als „nichtlineare Widerstände“ bezeichnet werden, da nur ihr Klemmenverhalten, nicht aber ihre Funktion relevant ist.

Die Kennlinien $U(I)$ dieser Zweipole müssen wie die der linearen Widerstände durch den Ursprung der U-I-Ebene gehen, da sie passiv sind. Bei Verbraucher-Zählpfeilsystem verlaufen sie im ersten und dritten Quadranten. Nichtlineare Widerstände können *polaritätsabhängig* sein. In diesem Fall ist die Darstellung ihrer Kennlinie nur zusammen mit einer Festlegung der Strom- und Spannungs-Zählpfeile eindeutig. In Bild 2.7 sind die Kennlinien $U(I)$ zweier nichtlinearer Widerstände dargestellt.

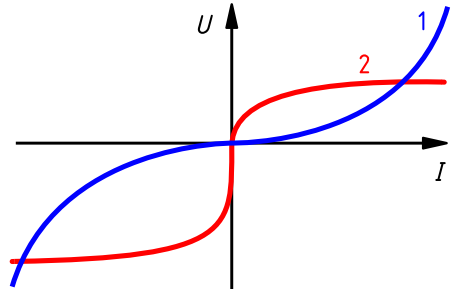


Bild 2.7: Kennlinien $U(I)$ von nichtlinearen Widerständen bei VZS (schematisch):
 1 polaritätsunabhängig (Glühlampe)
 2 polaritätsabhängig (Z-Diode)

Betrachtet man wieder einen bestimmten Arbeitspunkt (I_0, U_0) , so wird der Quotient

$$\frac{U_0}{I_0} = R_0(I_0) \quad (2.21)$$

als *Gleichstromwiderstand* oder *statischer Widerstand* in diesem Arbeitspunkt bezeichnet. Grafisch ist R_0 gleich der Steigung der Geraden, die durch den Ursprung und den Arbeitspunkt (I_0, U_0) verläuft, also der *Steigung der Sekante durch den Arbeitspunkt*, siehe Bild 2.8.

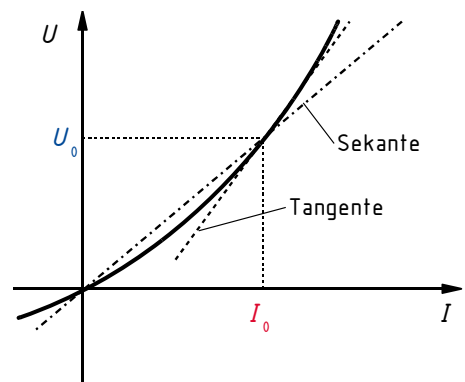


Bild 2.8: Kennlinie $U(I)$ eines nichtlinearen Widerstandes bei VZS mit Arbeitspunkt

Der statische Widerstand beschreibt das Klemmenverhalten eines nichtlinearen Widerstandes in einem bestimmten, festen Arbeitspunkt. Der Wert

$$\lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} \Big|_{I_0} = \frac{dU}{dI} \Big|_{I_0} = r(I_0) \quad (2.22)$$

wird als *differenzieller* oder *dynamischer Widerstand* des Zweipols im Arbeitspunkt (I_0, U_0) bezeichnet. Grafisch ist $r(I_0)$ gleich der *Steigung der Tangente an die Kennlinie im Arbeitspunkt* (I_0, U_0) , siehe Bild 2.8.

Der differenzielle Widerstand beschreibt das Verhalten eines nichtlinearen Widerstandes bei kleinen Veränderungen (*Aussteuerungen*) der Klemmengrößen um einen bestimmten Arbeitspunkt herum. Damit werden die Veränderungen der Klemmengrößen in der Umgebung des Arbeitspunktes durch eine lineare Funktion angenähert (*Linearisierung im Arbeitspunkt*, Abschnitt 2.5.1). Diese *Näherung* ist um so genauer, je weniger die Kennlinie im Aussteuerbereich um den jeweiligen Arbeitspunkt gekrümmt ist und je geringer die Genauigkeitsanforderungen an die Berechnung sind.

Bei nichtlinearen Widerständen sind sowohl der statische als auch der dynamische Widerstand arbeitspunktabhängig. Nur bei linearen Widerständen gilt $R_0 = r = R = \text{const.}$

Wird statt der Kennlinie $U(I)$ die Kennlinie $I(U)$ betrachtet, so gelten die oben angestellten Überlegungen über Widerstandswerte sinngemäß für die Leitwerte und die Steigungen sind gleich dem *statischen Leitwert* $G_0(U_0)$ beziehungsweise dem *differenziellen Leitwert* $g(U_0)$ in einem Arbeitspunkt (I_0, U_0) .

2.1.2.4 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Der spezifische elektrische Widerstand ϱ und die elektrische Leitfähigkeit κ sind bei jedem Material abhängig von der Temperatur ϑ in °C bzw. T in K. Man unterscheidet

- metallische Leiter: κ sinkt (d. h. ϱ steigt) mit steigender Temperatur (*Kaltleiter*)
- Halbleiter: κ steigt (d. h. ϱ sinkt) mit steigender Temperatur (*Heißleiter*)
- Isolatoren: κ steigt (d. h. ϱ sinkt) leicht mit steigender Temperatur

Die Abhängigkeiten $\varrho(\vartheta)$ und $\kappa(\vartheta)$ sind *bei jedem Material nichtlinear*. Für viele Werkstoffe lässt sich aber für kleine Temperaturänderungen ΔT die Temperaturabhängigkeit *näherungsweise* durch eine *lineare Funktion* (Polynom ersten Grades) beschreiben. Daraus folgt für die Änderung des Widerstandswertes eines Leiters gegenüber dem Wert bei *Bezugstemperatur*

$$R(\vartheta) = R_{\vartheta_0}(1 + \alpha_{\vartheta_0}(\vartheta - \vartheta_0)) \quad (2.23)$$

mit

R_{ϑ_0} Widerstandswert bei Bezugstemperatur

α_{ϑ_0} *linearer Temperaturkoeffizient* von ϱ bei Bezugstemperatur ϑ_0 mit

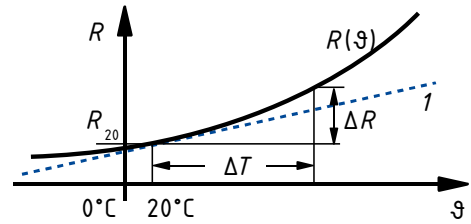
$$[\alpha_{\vartheta_0}] = 1 \text{ K}^{-1} \quad (2.24)$$

$\Delta T = \vartheta - \vartheta_0$ Abweichung der betrachteten Temperatur von der Bezugstemperatur.

Je nach Grad der Nichtlinearität von $\varrho(\vartheta)$ und den Anforderungen an die Genauigkeit des Ergebnisses ist der Temperaturbereich, für den die Näherung (2.23) akzeptable Ergebnisse liefert, unterschiedlich. Ein grober Anhaltswert ist der Bereich $\Delta T = \pm 100 \text{ K}$.

Bild 2.9 zeigt schematisch die nichtlineare Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur und die näherungsweise Beschreibung durch eine lineare Funktion.

Bild 2.9: Nichtlineare Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur und Näherungsgerade 1 für die Bezugstemperatur 20°C



Für größere Temperaturänderungen wird die Temperaturabhängigkeit *näherungsweise* durch die *quadratische Funktion* (Polynom zweiten Grades)

$$R(\vartheta) = R_{\vartheta_0} (1 + \alpha_{\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0) + \beta_{\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0)^2) \quad (2.25)$$

beschrieben mit den auch in Gl. (2.23) auftretenden Größen sowie

β_{ϑ_0} *quadratischer Temperaturkoeffizient* von ρ bei Bezugstemperatur ϑ_0 mit

$$[\beta_{\vartheta_0}] = 1 \text{ K}^{-2}. \quad (2.26)$$

Als Bezugstemperatur ϑ_0 wählt man zweckmäßigerweise eine typische *Betriebstemperatur*, für die die benötigten Materialparameter (ρ bzw. κ sowie α und ggf. β) verfügbar sind.

Anhaltswerte für die Temperaturkoeffizienten von ρ von einigen Metallen bei 20°C können Tabelle 2.2 entnommen werden.

Tabelle 2.2: Temperaturkoeffizienten des spezifischen elektrischen Widerstandes einiger Metalle

Material	α_{20} in K^{-1}	β_{20} in K^{-2}
Eisen	$6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-6}$
Platin	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
Gold	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$
Silber	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$
Konstantan ⁴	$0,01 \cdot 10^{-3}$	

Für die in Tabelle 2.2 aufgeführten reinen Metallen sollte man sich als groben Anhaltswert $\alpha_{20} \approx 0,4\%/K$ merken. Bei einer Erhöhung der Temperatur um 100 K steigt der Widerstandswert also um etwa 40 %.

Beispiel 2.8: Temperaturabhängigkeit des Widerstandes einer Glühlampe

Eine Glühlampe enthält einen doppelt gewendelten Wolframdraht mit dem Durchmesser $d = 24 \mu\text{m}$ und der Länge $l = 62 \text{ cm}$. Der Widerstand des Drahtes zwischen dem kalten Einschaltzustand und der Betriebstemperatur $\vartheta = 2200^\circ\text{C}$ soll ermittelt und in einem Diagramm $R(\vartheta)$ dargestellt werden.

Die für Gl. (2.25) benötigten Temperaturkoeffizienten $\alpha_{20} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ und $\beta_{20} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$ sowie die Leitfähigkeit $\kappa_{20} = 18,2 \text{ Sm/mm}^2$ werden Tabelle A.3 im Anhang A.3 entnommen. Mit $d = 0,024 \text{ mm}$ ergibt sich der Leiterquerschnitt $A = \pi d^2/4 = 0,4524 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$. Nach Gl. (2.11) mit (2.14) erhält man den Kaltwiderstand R_{20} für 20°C

$$R_{20} = \frac{l}{\kappa_{20} A} = \frac{0,62 \text{ m}}{18,2 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} \cdot 0,4524 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2} = 75,3 \Omega.$$

⁴Konstantan ist eine Legierung aus Kupfer, Nickel und Mangan, bei deren Entwicklung die Minimierung der Temperaturkoeffizienten von ρ angestrebt wurde.

Mit $\Delta\vartheta = \vartheta - 20^\circ\text{C}$ liefert Gl. (2.25) die gesuchte Temperaturabhängigkeit

$$R = R_{20}[1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^\circ\text{C}) + \beta_{20}(\vartheta - 20^\circ\text{C})^2]$$

$$R = 75,3\ \Omega [1 + 4,1 \cdot 10^{-3}\text{K}^{-1}(\vartheta - 20^\circ\text{C}) + 10^{-6}\text{K}^{-2}(\vartheta - 20^\circ\text{C})^2].$$

Mit dieser Gleichung sind einige Werte zwischen $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ und $\vartheta = 2200^\circ\text{C}$ berechnet und in Bild 2.10 dargestellt worden.

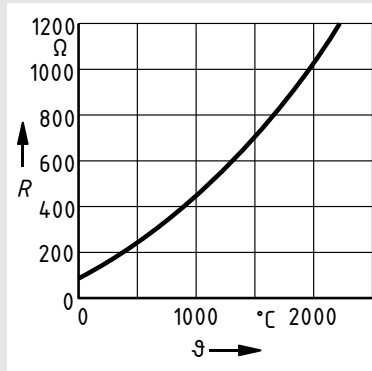


Bild 2.10: Widerstand eines Glühdrahtes in Abhängigkeit von seiner Temperatur

Bei der Betriebstemperatur $\vartheta = 2200^\circ\text{C}$ gilt $R_{2200} \approx 75,3\ \Omega (1 + 8,7 + 4,8) \approx 1,1\ \text{k}\Omega$.

Der durch den quadratischen Temperaturkoeffizienten verursachte Beitrag zur Widerstandserhöhung ist in diesem Beispiel also erheblich. Seine Vernachlässigung hätte zu einem grob falschen Ergebnis geführt.

Beispiel 2.9: Einschaltstrom und Betriebsstrom einer Glühlampe

Welche Ströme fließen durch die Glühlampe in Beispiel 2.8 im kalten Zustand bzw. bei Betriebstemperatur bei einer Spannung von $U = 230\ \text{V}$?

Mit Gl. (2.5) erhält man für die Ströme bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ und bei $\vartheta = 2200^\circ\text{C}$

$$\vartheta = 20^\circ\text{C} : I_{20} = \frac{U}{R_{20}} = \frac{230\ \text{V}}{75,3\ \Omega} = 3,05\ \text{A}$$

$$\vartheta = 2200^\circ\text{C} : I_{2200} = \frac{U}{R_{2200}} = \frac{230\ \text{V}}{1106\ \Omega} = 0,208\ \text{A}.$$

Wenn die Glühlampe eingeschaltet wird, ist ihr Wolframdraht im Allgemeinen noch kalt und es fließt rund das 15-fache des normalen Betriebsstroms. Solche Einschaltstromstöße wirken sich u. U. störend auf andere Verbraucher aus, die an die selbe Versorgungsspannung angeschlossen sind. Außerdem rüttelt jedes Einschalten durch den starken Stromstoß wegen der dabei auftretenden magnetischen Kräfte (Abschnitt 4.3.2) an dem dünnen Wolframdraht. Glühlampen brennen daher meist beim Einschalten durch.

Beispiel 2.10: Indirekte Messung der Wicklungstemperatur einer elektrischen Maschine

Eine elektrische Maschine enthält eine Wicklung aus Kupfer, die bei 20°C einen Widerstand $R_{20} = 150\ \Omega$ aufweist. Wie groß ist die mittlere Wicklungstemperatur der Maschine, wenn der Wicklungswiderstand auf $R_x = 185\ \Omega$ angestiegen ist?

Da eine Temperaturerhöhung um weniger als 100 K vermutet wird, liefert Gl. (2.23)

$$185\ \Omega = 150\ \Omega (1 + 4 \cdot 10^{-3}\text{K}^{-1} \cdot \Delta T).$$

Auflösen nach ΔT liefert

$$\Delta T = \left(\frac{185\ \Omega}{150\ \Omega} - 1 \right) \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}\text{K}^{-1}} = 58\ \text{K}.$$

Der lineare Ansatz war also zulässig. Die mittlere Wicklungstemperatur der Maschine liegt demnach bei

$$\vartheta_{\text{mittel}} = 20^\circ\text{C} + \Delta T = 78^\circ\text{C}.$$

2.1.2.5 Memristor

Memristoren (von Memory Resistor) sind zweipolige Widerstände, deren Widerstandswert zu einem Zeitpunkt t von der bis zu diesem Zeitpunkt durch den Widerstand geflossenen Ladungsmenge $q(t)$ abhängt [Tet14]. Sie zeigen somit ein „Gedächtnis“, das zum Bau von nichtflüchtigen Speichern eingesetzt werden kann. Diese Speicher sind mit Abmessungen im Bereich weniger Nanometer herstellbar und benötigen keine Energie zum Informationserhalt. Daher ist es wahrscheinlich, dass sie mittelfristig andere Speicherarten (wie DRAM, Flash) ablösen werden.

Memristoren sind bislang als Einzelbauelemente nicht kommerziell verfügbar. Die Existenz von Memristoren wurde im Jahre 1971 vorhergesagt [Chu71]. In den letzten Jahren wurde das Modell des idealen Memristors stark erweitert (Generic Memristor, Extended Memristor) [Chu14].

Auch klassische elektrische Netzwerke können memristives Verhalten zeigen [CA12]. Aktuelle Forschungen beschäftigen sich u. a. mit dem Aufbau neuronaler Netze und rekonfigurierbarer Schaltungen mittels Memristoren.

Die Klemmengrößen eines Memristors werden bei VZS durch die Gleichung

$$u(t) = M(q(t)) \cdot i(t) \tag{2.27}$$

miteinander verknüpft. Die zeitvariante Memristanz M ist im einfachsten Fall eine realisierungsabhängige Funktion vom Typ

$$M(q(t)) = f\left(\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau\right) \tag{2.28}$$

Die Kennlinie $i(u)$ von Memristoren zeigt eine typische Hysterese, wie sie schematisch in Bild 2.11 dargestellt ist.

Der Memristor wird neben Widerstand, Kapazität (3.3.5.1) und Induktivität (4.3.1.5) als vierter fundamentaler passiver Zweipol angesehen.

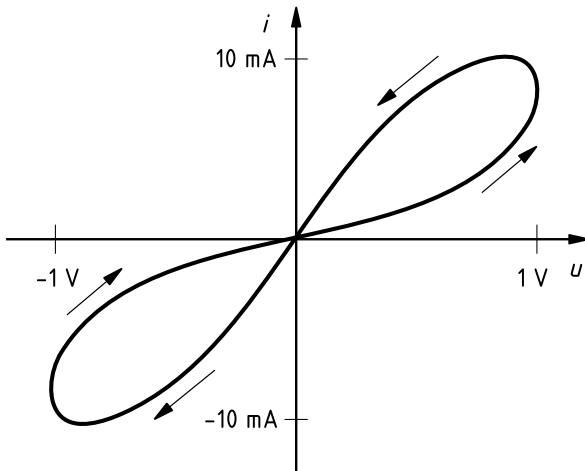


Bild 2.11: Schematische Darstellung der Kennlinie $i(u)$ eines Memristors

2.1.2.6 Ausführungsformen von Widerständen

Widerstände als technische Bauelemente sind in einer Vielzahl von Ausführungsformen erhältlich. Nachfolgend werden nur diskrete, zwei- und dreipolige Widerstände für Niederspannungsanwendungen berücksichtigt. Daneben gibt es mehrpolige Widerstände in monolithisch integrierten Halbleiterschaltungen (Abschnitt 10.5.6) und als *Widerstandsnetzwerke*, die mehrere Widerstände in einem Bauelement enthalten. Für Anwendungen in der Hochspannungstechnik werden hoch belastbare Widerstände mit sehr großen Abmessungen hergestellt.

Zur groben Klassifikation von Widerständen eignet sich die Unterscheidung in *annähernd lineare* und *stark nichtlineare* Widerstände. *Ideal lineare* Widerstände sind u. a. auf Grund der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes (Abschnitt 2.1.2.4) nicht realisierbar.

Lineare Widerstände

Ihr Widerstandswert hängt nicht wesentlich vom elektrischen *Arbeitspunkt* (der durch Klemmenspannung bzw. Klemmenstrom beschreibbar ist) ab. Er kann aber durchaus von physikalischen Größen abhängen, die dem Widerstand *von außen aufgeprägt* werden, also z. B. Zeit, Temperatur, Druck, Magnetfeld, Beleuchtung. Zu dieser Gruppe gehören:

- Zweipolige *Festwertwiderstände* in Form eines Zylinders mit axialen Anschlussdrähten oder eines Quaders mit seitlichen Kontaktflächen, die in der Regel auf Leiterplatten montiert werden. Festwertwiderstände werden mit genormten Widerstandswerten und unterschiedlichen thermischen Belastbarkeiten in einer Vielzahl von mechanischen Bauformen angeboten. Die E 24-Normreihe enthält pro Dekade 24 verschiedene Widerstandswerte, die E 12-Normreihe 12 verschiedene (Anhang A.8).
- Widerstände mit mechanisch durch Schieben oder Drehen verstellbarem Widerstandswert, die in der Regel als Dreipole mit einem *Schleifkontakt* auf der Widerstandsbahn ausgeführt werden. Soll ihr Wert nur einmalig oder selten eingestellt werden, so werden sie als *Trimmer* bezeichnet, sonst als *Potenzioometer*.
- *Dehnungsmessstreifen* (DMS), die zur Messung kleiner mechanischer Verformungen eingesetzt werden [Ber96], [Gie94].

- *Feldplatten*, deren Widerstandswert von der Stärke eines externen Magnetfeldes abhängt (siehe Abschnitt 10.4.4.5).
- *Fremderwärmte temperaturabhängige Widerstände*. Ihre Temperatur wird nicht wesentlich durch ihre Klemmengrößen, sondern hauptsächlich durch die Umgebungstemperatur bestimmt.

Unterschieden werden *NTC-Widerstände* (Negative Temperature Coefficient) und *PTC-Widerstände* (Positive Temperature Coefficient). Bei NTC-Widerständen nimmt der Widerstandswert mit steigender Temperatur ab (*Heißleiter*). Bei PTC-Widerständen nimmt der Widerstandswert mit steigender Temperatur zu (*Kaltleiter*).

Zu den fremderwärmten temperaturabhängigen Widerständen gehören alle *Widerstandsthermometer*, z. B. aus Platin, mit denen Temperaturen über einen Temperaturbereich von weit über 1000 K gemessen werden können.

- *Photowiderstände* (Light Deependent Resistor, LDR), deren Widerstand von der Beleuchtungsstärke abhängig ist (siehe Abschnitt 10.4.4.4).

Nichtlineare Widerstände

Ihr Widerstandswert wird bei konstant gehaltenen physikalischen Umgebungsbedingungen im Wesentlichen durch den *Arbeitspunkt* bestimmt. Zu dieser Gruppe gehören:

- *Spannungsabhängige Widerstände*, auch *Varistoren* genannt (Voltage Deependent Resistor, VDR), die bei Überschreiten einer bestimmten Klemmenspannung ihren Widerstandswert drastisch verringern [LBL08]. Sie werden z. B. zum Ableiten von Überspannungen eingesetzt.
- *Selbsterwärmte temperaturabhängige Widerstände*. Bei ihnen führt eine Veränderung des Betriebsstroms zu einer deutlichen Temperaturänderung, die eine Veränderung des Widerstandswertes bewirkt.

Bild 2.12 zeigt die Betriebskennlinie eines selbsterwärmten NTC-Widerstandes. Ab dem Punkt P nimmt der Widerstand durch die Eigenerwärmung stärker ab, als der Strom zunimmt, so dass das Produkt $U = RI$ kleiner wird.

Aus der in Bild 2.13 dargestellten Betriebskennlinie eines selbsterwärmten PTC-Widerstandes ist zu erkennen, dass jenseits des Punktes P der Widerstand durch die Eigenerwärmung stärker wächst als die Spannung, so dass der Strom $I = U/R$ abnimmt.

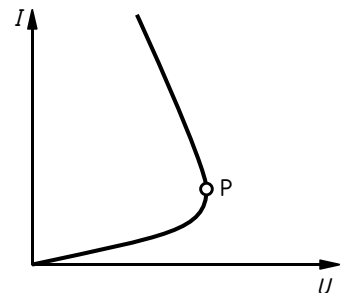


Bild 2.12: Schematische Betriebskennlinie eines selbsterwärmten NTC-Widerstandes

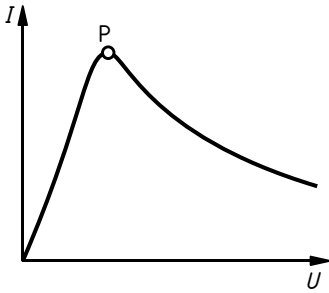


Bild 2.13: Schematische Betriebskennlinie eines selbsterwärmten PTC-Widerstandes

Alle oben aufgeführten linearen und nichtlinearen Widerstandstypen sind polaritätsunabhängig. Alle Halbleiterdioden (Abschnitt 10.5.2) können als nichtlineare, polaritätsabhängige Widerstände aufgefasst werden.

Ausführliche Informationen zu technischen Ausführungsformen von Widerständen sind [BSR06] zu entnehmen.

Beispiel 2.11: Abhängigkeit des Widerstandwertes von der Spannung bei einem Varistor

Für einen Varistor ist der Widerstandswert in Abhängigkeit von der Spannung gesucht. Die Kennlinie $I(U)$ verlaufe nach der Funktion

$$\frac{I}{\text{A}} = \left(\frac{U}{6 \text{ kV}} \right)^5.$$

Aus Gl. (2.5) ergibt sich der Widerstand

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\left(\frac{U}{6 \text{ kV}} \right)^5 \text{ A}} = 6^5 \frac{\text{kV}}{\left(\frac{\text{kV}}{\text{A}} \right)^5} \cdot \frac{\text{kV}}{\text{A}}$$

$$\frac{R}{\text{k}\Omega} = 7776 \left(\frac{U}{\text{kV}} \right)^{-4}.$$

Der Widerstand ist also nicht linear, sondern stark spannungsabhängig: Bei $U = 1 \text{ kV}$ beträgt er beispielsweise $R = 7776 \text{ k}\Omega$, bei $U = 3 \text{ kV}$ aber nur noch $R = 96 \text{ k}\Omega$.

2.1.3 Elektrische Quellen

Elektrische Quellen sind *aktive Zweipole*, die aufgrund ihres physikalischen Aufbaus elektrische Ladungen trennen können, wobei den Ladungsträgern elektrische Energie zugeführt wird (Abschnitt 1.2.4). In den nachfolgenden Abschnitten werden verschiedene *Modelle* für elektrische Quellen behandelt.

Die zuerst betrachteten *idealen Quellen* sind mathematisch sehr einfach beschreibbar. Eine ideale Quelle prägt der mit ihr verbundenen Schaltung über ihre Klemmen entweder eine bestimmte Spannung oder einen bestimmten Strom ein. Eine solche *eingeprengte Größe* wird auch

als *Quellengröße* bezeichnet und mit dem Index „q“ versehen. Ideale Quellen sind allerdings technisch nicht realisierbar.

Das Modell der *linearen Quelle* ist etwas komplexer und damit aufwändiger zu beschreiben, kann das Klemmenverhalten realer Quellen aber schon in vielen Betriebsfällen mit ausreichender Genauigkeit beschreiben. Eine genauere Nachbildung des Verhaltens *realer Quellen* wie Trockenbatterien, Akkumulatoren (Abschnitt 10.3.3 und [Jak93]), Solargeneratoren oder elektronischer Netzgeräte erfordert einen Modellierungsaufwand, der weit über den Rahmen der Grundlagenausbildung hinausgeht.

Nicht betrachtet werden *gesteuerte Quellen*, deren Verhalten durch Spannungen oder Ströme an anderen Stellen eines Netzwerks bestimmt werden. Sie werden zum Modellieren des Klemmenverhaltens aktiver Mehrpole wie z. B. Verstärkern benötigt [FV82], [Hei11], [Süß05].

2.1.3.1 Ideale Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle erzeugt eine bestimmte Potenzialdifferenz zwischen ihren Klemmen, die Quellenspannung U_q („Spannungseinspeisung“). Die Quellenspannung ist unabhängig vom Strom, der durch die Quelle fließt, und kann positiv, null oder negativ sein.

Eine ideale Spannungsquelle darf nicht im *Kurzschluss* (widerstandslose Verbindung der beiden Klemmen) betrieben werden. Ein Kurzschluss würde gleiches Potenzial zwischen den Klemmen der Spannungsquelle erzwingen, was für $U_q \neq 0$ zu einem Widerspruch führen würde.

Wichtig für die im Abschnitt 2.6 behandelten Netzwerkanalyseverfahren ist folgende Tatsache: *Eine ideale Spannungsquelle mit der Quellenspannung null erzwingt identisches Potenzial an ihren beiden Klemmen und wirkt somit wie ein Kurzschluss.*

Ist die Polarität einer Spannungsquelle bekannt, so wird die Richtung ihres Spannungszählpfeils üblicherweise so gewählt, dass die Quellenspannung einen positiven Zahlenwert hat. Eine entgegengesetzte Wahl der Zählpfeilrichtung ist aber nicht falsch.

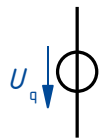


Bild 2.14: Schaltzeichen einer idealen Spannungsquelle

Das Schaltzeichen einer idealen Spannungsquelle nach [ding] ist zusammen mit einem Zählpfeil für die Quellenspannung in Bild 2.14 dargestellt. Bei Verwendung dieses Schaltzeichens entscheidet das *Vorzeichen der Klemmenspannung zusammen mit der Richtung des Zählpfeils* über die Polarität der Quelle.

Bild 2.15 zeigt das Schaltzeichen für eine Batterie bzw. einen Akkumulator nach [dini], das nur für diese beiden technischen Quellenarten, nicht aber für allgemeine Spannungsquellen verwendet werden sollte.



Bild 2.15: Schaltzeichen von Batterie bzw. Akkumulator

Bei diesem Schaltzeichen liegt die Polarität der Quelle fest: der kurze, dicke Strich kennzeichnet den negativen Pol. Damit erübrigt sich ein Zählpfeil für die Quellenspannung, die nur positiv sein kann. Ein Wechsel der Polarität der Quelle erfordert bei Verwendung dieses Schaltzeichens ein Umzeichnen des Schaltplans.

Die *Strom-Spannungs-Kennlinie* $U(I)$ einer idealen Spannungsquelle bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems gemäß Bild 2.16 ist in Bild 2.17 für den Fall eines positiven Wertes der Quellenspannung dargestellt.

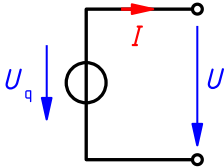


Bild 2.16: Zählpfeile für die Klemmengrößen im EZS an einer idealen Spannungsquelle

Die Kennlinie verläuft stets durch zwei Quadranten, da der durch die äußere Beschaltung bestimmte Strom durch die Quelle sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann.

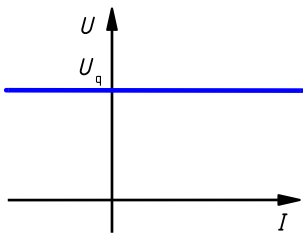


Bild 2.17: Kennlinie $U(I)$ einer idealen Spannungsquelle für $U_q > 0$

Die Konsequenzen hieraus für den Leistungsumsatz der Quelle werden in Abschnitt 2.1.4 untersucht.

2.1.3.2 Ideale Stromquelle

Eine ideale Stromquelle treibt unabhängig von ihrer äußeren Beschaltung durch ihre Klemmen einen bestimmten *Quellenstrom* I_q („*Stromeinspeisung*“). Der Quellenstrom kann positiv, null oder negativ sein.

Eine ideale Stromquelle darf nicht im *Leerlauf* (keine leitfähige Verbindung zwischen den Klemmen) betrieben werden, da dann der durch die Quelle eingepreßte Strom nicht fließen könnte, was für $I_q \neq 0$ zu einem Widerspruch führen würde.

Eine besondere Rolle spielen bei der Netzwerkanalyse Stromquellen, deren Quellenstrom null ist: *Eine ideale Stromquelle mit dem Quellenstrom null wirkt wie eine Unterbrechung.*

Ist die Polarität einer Stromquelle bekannt, so wird die Richtung ihres Stromzählpfeils üblicherweise so gewählt, dass ihr Quellenstrom einen positiven Zahlenwert hat.

Bild 2.18 zeigt das Schaltzeichen einer idealen Stromquelle nach der aktuellen Norm [ding] mit eingezeichnetem Zählpfeil für den Quellenstrom.

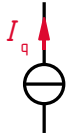


Bild 2.18: Schaltzeichen einer idealen Stromquelle

Die *Strom-Spannungs-Kennlinie* $U(I)$ einer idealen Stromquelle bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems gemäß Bild 2.19 ist in Bild 2.20 für den Fall eines positiven Wertes des Quellenstroms dargestellt.

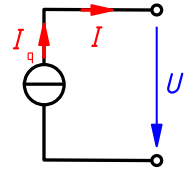


Bild 2.19: Zählpfeile für die Klemmengrößen im EZS an einer idealen Stromquelle

Diese Kennlinie verläuft immer durch zwei Quadranten, da die Spannung über einer idealen Stromquelle durch die äußere Beschaltung der Quelle bestimmt wird und sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann.

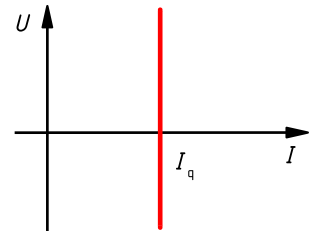


Bild 2.20: Kennlinie $U(I)$ einer idealen Stromquelle für $I_q > 0$

Das *Modell* der idealen Quelle ist immer in der Lage, sowohl als Erzeuger als auch als Verbraucher zu wirken, was bei realen Quellen in der Regel nicht der Fall ist.

2.1.3.3 Allgemeine lineare Quelle

Merkmal *linearer Quellen* ist die *lineare Abhängigkeit zwischen Klemmenstrom und Klemmenspannung*. Bild 2.22 zeigt die $U(I)$ -Kennlinie einer allgemeinen linearen Quelle bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems gemäß Bild 2.21 für den Fall $U_0 > 0$.

Zwei besondere Arbeitspunkte einer linearen Quelle sind nach Bild 2.22:

- Leerlauf (Klemmen offen): $I = 0$, $U = U_0$
- Kurzschluss (Klemmen kurzgeschlossen): $I = I_k$, $U = 0$

U_0 ist die *Leerlaufspannung* der Quelle (oft auch mit U_L bezeichnet⁵).

I_k ist der *Kurzschlussstrom* der Quelle.

Die *Strom-Spannungs-Kennlinie* $U(I)$ lässt sich bei jeder linearen Quelle durch die *lineare Funktion*

$$U(I) = U_0 - \frac{U_0}{I_k} \cdot I \quad (2.29)$$

⁵Hier wird U_0 statt U_L verwendet, um Verwechslungen mit der Lastspannung zu vermeiden.

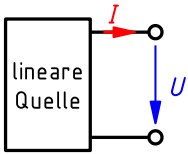


Bild 2.21: Allgemeine lineare Quelle mit Zählpfeilen im EZS

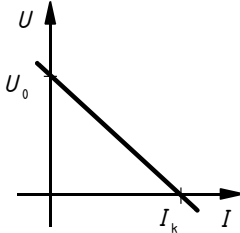


Bild 2.22: Kennlinie einer linearen Quelle bei EZS

mit festen Werten U_0 und I_k beschreiben. Das elektrische Verhalten einer linearen Quelle wird bei gegebenen Zählpfeilen also vollständig durch die *zwei Parameter* Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom charakterisiert.

Die Kenngröße U_0/I_k hat die Dimension eines Widerstandes und wird *Innenwiderstand* R_i der linearen Quelle genannt:

$$R_i = \frac{U_0}{I_k} \quad (2.30)$$

Bei Verwendung des Erzeuger-Zählpfeilsystems haben U_0 und I_k stets gleiches Vorzeichen und R_i ist gleich der *negativen* Steigung (also dem Gefälle) der $U(I)$ -Kennlinie der Quelle (Bild 2.22).

Der Kehrwert des Innenwiderstandes wird als *Innenleitwert* der linearen Quelle bezeichnet:

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad (2.31)$$

Mit Gl. (2.30) in Gl. (2.29) erhält man die lineare Gleichung

$$U(I) = U_0 - R_i I, \quad (2.32)$$

die das Klemmenverhalten einer linearen Quelle mittels der zwei Parameter Leerlaufspannung und Innenwiderstand beschreibt. Aus Gl. (2.32) folgt durch Auflösen nach dem Klemmenstrom

$$I = \frac{U_0}{R_i} - \frac{U}{R_i}, \quad (2.33)$$

woraus mit Gl. (2.30) und Gl. (2.31) die lineare Gleichung

$$I(U) = I_k - G_i U \quad (2.34)$$

folgt, die mit den zwei Parametern Kurzschlussstrom I_k und Innenleitwert G_i das Klemmenverhalten einer linearen Quelle beschreibt.

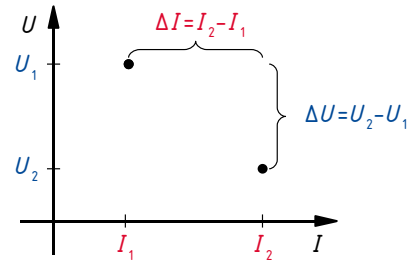


Bild 2.23: Bestimmung der Kennlinie einer linearen Quelle aus zwei Messpunkten

Allgemein genügen also zwei von den drei Parametern (U_0 , I_k und R_i bzw. G_i) zur vollständigen Beschreibung des Klemmenverhalten einer linearen Quelle mit bekannten Zählpfeilen.

Um diese beiden *Parameter messtechnisch zu bestimmen*, ist bei einer realen Quelle, die durch das Modell der linearen Quelle ausreichend genau beschrieben wird, die Aufnahme *zweier Messwert-Paare* (Klemmenstrom, Klemmenspannung) ausreichend⁶. In Bild 2.23 sind die Messwert-Paare (U_1, I_1) und (U_2, I_2) eingetragen. Die nachfolgenden Rechnungen und Ergebnisse setzen Erzeuger-Zählpfeilsystem an der Quelle voraus, gelten aber für Messwerte mit beliebigen Vorzeichen.

Aus den beiden Messwert-Paaren lässt sich zunächst der Innenwiderstand der Quelle bestimmen:

$$R_i = - \frac{\Delta U}{\Delta I} = - \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} \quad (2.35)$$

Da Gl. (2.32) für jeden Punkt (U, I) der Kennlinie gilt, ist die Gleichung auch für die beiden Messpunkte gültig. Daraus folgen die beiden Bestimmungsgleichungen

$$U_1 = U_0 - R_i I_1 \quad (2.36)$$

und

$$U_2 = U_0 - R_i I_2, \quad (2.37)$$

von denen nur eine benötigt wird, um unter Verwendung des Ergebnisses der Gl. (2.35) die Leerlaufspannung U_0 zu berechnen. Anschließend kann aus R_i und U_0 über Gl. (2.30) der Kurzschlussstrom I_k bestimmt werden.

Besonders einfach ist die messtechnische Bestimmung der Quellen-Parameter, wenn mit einer der beiden Messungen direkt die Leerlaufspannung ermittelt werden kann. Der Kurzschlussstrom ist in der Praxis nicht direkt messtechnisch erfassbar, da reale elektrische Quellen meistens nicht kurzschlussfest sind und ein echter Kurzschluss (exakt null Ohm zwischen den Klemmen der Quelle) nicht realisierbar ist.

Das Modell der linearen Quelle lässt sich nur innerhalb gewisser Grenzen technisch realisieren. Da es mathematisch einfach handhabbar und für viele Anwendungsfälle hinreichend genau ist, spielt es in der Elektrotechnik jedoch eine bedeutende Rolle.

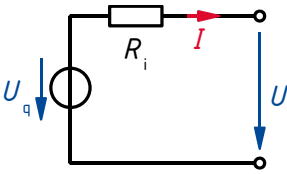


Bild 2.24: Lineare Spannungsquelle mit EZS

2.1.3.4 Lineare Spannungsquelle, lineare Stromquelle

Die Gln. (2.32) und (2.34) beschreiben gleichwertig das Klemmenverhalten linearer Quellen bei Erzeuger-Zählpfeilsystem.

Das Klemmenverhalten der aktiven Zweipole nach Bild 2.24 bzw. Bild 2.25, die jeweils aus einer *idealen Quelle* und einem *linearen Widerstand* (bzw. *linearen Leitwert*) bestehen, wird ebenfalls durch diese Gleichungen beschrieben, sofern $U_q = U_0$ und $I_q = I_k$ gesetzt wird.

Damit folgt die Beschreibung des Klemmenverhaltens der linearen Spannungsquelle in der Form

$$U = U_q - R_i I \quad (2.38)$$

und der linearen Stromquelle in der mathematisch analogen Form

$$I = I_q - G_i U. \quad (2.39)$$

Die Quelle in Bild 2.24 wird als *lineare Spannungsquelle*, die Quelle in Bild 2.25 als *lineare Stromquelle* bezeichnet.

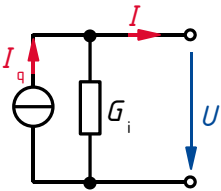


Bild 2.25: Lineare Stromquelle mit EZS

Das *Klemmenverhalten* der beiden Quellen ist identisch, sofern die Bedingungen

$$U_q = I_q R_i \quad (2.40)$$

und

$$R_i = 1/G_i \quad (2.41)$$

erfüllt sind.

Interessant ist die Betrachtung von *Grenzfällen* dieser linearen Quellen:

- Eine lineare Spannungsquelle mit $R_i = 0$ verhält sich wie eine *ideale Spannungsquelle*.
- Eine lineare Stromquelle mit $G_i = 0$, also $R_i = 1/G_i \rightarrow \infty$ verhält sich wie eine *ideale Stromquelle*.

⁶Eine Gerade wird durch zwei verschiedene Punkte eindeutig beschrieben.

- Eine lineare Spannungsquelle mit $U_q = 0$ („deaktivierte Quelle“) verhält sich wie ein *Ohmscher Widerstand* R_i .
- Eine lineare Stromquelle mit $I_q = 0$ („deaktivierte Quelle“) verhält sich wie ein *Ohmscher Leitwert* G_i bzw. wie ein Ohmscher Widerstand $R_i = 1/G_i$.

Eine lineare Quelle mit sehr kleinem Innenwiderstand verhält sich also *näherungsweise* wie eine ideale Spannungsquelle, eine lineare Quelle mit sehr großem Innenwiderstand *näherungsweise* wie eine ideale Stromquelle.

Wie die obigen Grenzfälle verdeutlichen, lässt sich mittels des Modells der linearen Quelle bei geeigneter Wahl der Quellenparameter *das Klemmenverhalten beliebiger linearer elektrischer Zweipole beschreiben*. Von dieser Tatsache wird in Abschnitt 2.4.5 Gebrauch gemacht.

Da jede lineare Quelle bezüglich ihres Klemmenverhaltens gleichwertig als lineare Spannungs- oder lineare Stromquelle beschrieben werden kann, wählt man in einem konkreten Fall, also bei bekanntem Lastwiderstand R_{Last} an der Quelle, dasjenige Modell, mit dem man am einfachsten rechnen kann, ansonsten das Modell, das das Quellenverhalten *bei kleinen Änderungen des Lastwiderstandes* am ehesten beschreibt:

- Ist der Lastwiderstand viel größer als der Innenwiderstand der Quelle, also $R_{\text{Last}} \gg R_i$, wählt man das Modell der linearen Spannungsquelle, da sich bei kleinen Änderungen des Lastwiderstandes die Klemmenspannung U nur wenig ändert. Die Quelle verhält sich also *näherungsweise* wie eine ideale Spannungsquelle.
- Für $R_{\text{Last}} \ll R_i$ wählt man in der Regel das Modell der linearen Stromquelle, da sich bei kleinen Änderungen des Lastwiderstandes der Klemmenstrom nur wenig ändert. Die Quelle verhält sich also *näherungsweise* wie eine ideale Stromquelle.

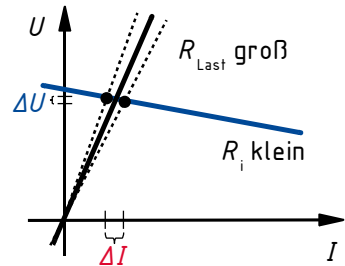


Bild 2.26: Lineare Spannungsquelle an großem Lastwiderstand

Die Bilder 2.26 und 2.27 sollen diese Aussagen veranschaulichen. In diesen Bildern sind jeweils die Quellenkennlinie (bei Erzeuger-Zählpeilsystem) und die Lastkennlinie (bei Verbraucher-Zählpeilsystem) in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt (vgl. Bilder 2.33 und 2.34). Die Schnittpunkte der Kennlinien von Quelle und Last sind die *Arbeitspunkte* der Schaltung. Man erkennt auch gut: Je größer der Wert von R_i bzw. von R_{Last} ist, desto steiler verläuft die $U(I)$ -Kennlinie der linearen Quelle bzw. des Lastwiderstandes.

2.1.3.5 Reale Quellen

Technisch realisierte Quellen können nur in mehr oder weniger guter Näherung mittels der Modelle der idealen bzw. linearen Quelle beschrieben werden. Hochwertige *elektronisch geregelte*

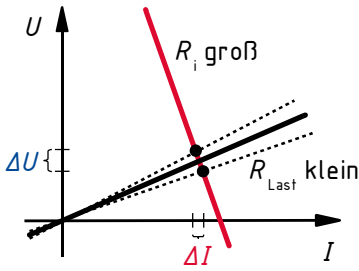


Bild 2.27: Lineare Stromquelle an kleinem Lastwiderstand

Konstantspannungsquellen verhalten sich innerhalb eines bestimmten Betriebsbereiches fast wie ideale Spannungsquellen.

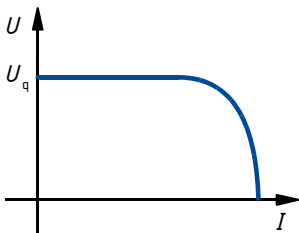


Bild 2.28: Kennlinie einer elektronisch geregelten Spannungsquelle mit Strombegrenzung (schematisch)

Bild 2.28 zeigt ein Beispiel für die Kennlinie $U(I)$ einer solchen realen Quelle. Diese Quelle liefert eine näherungsweise konstante (oftmals einstellbare) Spannung, sofern sie einen Strom zwischen null und einem bestimmten (oftmals einstellbaren) Maximalstrom liefern muss. Wird der Maximalstrom überschritten, senkt die Quelle ihre Spannung ab. Durch dieses Verhalten können die Quelle und die von ihr gespeiste Schaltung vor Überlastung geschützt werden. Die hier betrachtete reale Quelle kann keine negativen Ströme liefern.

Eine ideale Gleichstromquelle kann innerhalb eines bestimmten Betriebsbereiches durch eine *elektronisch geregelte Konstantstromquelle* nachgebildet werden.

Bild 2.29 zeigt ein Beispiel für die Kennlinie $U(I)$ einer solchen Quelle.

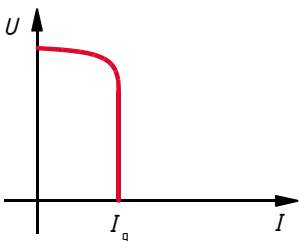


Bild 2.29: Kennlinie einer elektronisch geregelten Stromquelle mit Spannungsbegrenzung (schematisch)

Bei realen elektrischen Quellen, deren stets nichtlineares Klemmenverhalten durch das Modell der linearen Quelle beschrieben werden soll, sind die messtechnisch ermittelten Werte der Quellen-Parameter im Allgemeinen abhängig von den gewählten Messpunkten!

Beispiel 2.12: Modellierung eines Akkumulators durch eine lineare Quelle

Ein Akkumulator liefert im Leerlauf die Spannung $U_0 = 24,5 \text{ V}$ und bei Belastung mit dem Nennstrom $I_{\text{nom}} = 80 \text{ A}$ die Nennspannung $U_{\text{nom}} = 23,6 \text{ V}$. Das durch diese beiden Arbeitspunkte beschriebene Klemmenverhalten soll mittels des Modells der linearen Quelle nachgebildet werden. Für dieses Modell sind der Innenwiderstand R_i und der Kurzschlussstrom I_k zu bestimmen.

Nach Gl. (2.35) beträgt der Innenwiderstand

$$R_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_0 - U_{\text{nom}}}{I_{\text{nom}} - 0} = \frac{24,5 \text{ V} - 23,6 \text{ V}}{80 \text{ A}} = 11,25 \text{ m}\Omega.$$

Der Kurzschlussstrom ergibt sich mit Gl. (2.30) zu

$$I_k = \frac{U_0}{R_i} = \frac{24,5 \text{ V}}{11,25 \text{ m}\Omega} = 2178 \text{ A}.$$

Dieser Wert ist um den Faktor 27 größer als der Nennstrom. Der tatsächliche Kurzschlussstrom ist wesentlich kleiner, da das Modell der linearen Quelle das tatsächliche Verhalten eines Akkumulators mit zunehmender Belastung immer schlechter beschreibt. Da Akkumulatoren der hier betrachteten Art bei Kurzschluss durchaus Ströme von vielen Hundert Ampere liefern können, ist dieser Betriebsfall unbedingt zu vermeiden, da er nach einigen Sekunden zur thermischen Zerstörung des Akkumulators führen kann.

Beispiel 2.13: Modellierung einer elektronischen Konstantstromquelle durch eine lineare Quelle

Eine elektronisch geregelte Konstantstromquelle liefert bei der Klemmenspannung $U_1 = 2 \text{ V}$ den Strom $I_1 = 60 \text{ mA}$. Wenn sie an ihren Klemmen die Spannung $U_2 = 8 \text{ V}$ aufbauen muss, sinkt der Strom auf $I_2 = 57 \text{ mA}$ ab. Beide Messpunkte liegen im linearen Bereich der Quellenkennlinie. Gesucht sind die Kenngrößen U_0 , I_k und R_i des linearen Quellenmodells, das diesen Kennlinienabschnitt beschreibt.

Gl. (2.35) liefert den Innenwiderstand

$$R_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{8 \text{ V} - 2 \text{ V}}{60 \text{ mA} - 57 \text{ mA}} = 2 \text{ k}\Omega$$

und Gl. (2.36) die Leerlaufspannung

$$U_0 = U_1 + R_i I_1 = 2 \text{ V} + 2 \text{ k}\Omega \cdot 60 \text{ mA} = 122 \text{ V},$$

die hier nur theoretischen Wert hat, da die Kennlinie einer realen Konstantstromquelle nur in der Nähe des Kurzschlusspunktes linear verläuft (vgl. Bild 2.29). Der Kurzschlussstrom ergibt sich aus Gl. (2.30) zu

$$I_k = \frac{U_0}{R_i} = \frac{122 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} = 61 \text{ mA}.$$

2.1.4 Energie und Leistung

In diesem Abschnitt werden anhand eines allgemeinen Modells die Energie und die Leistung hergeleitet, die ein *beliebiger* Zweipol über seine Klemmen mit dem restlichen Netzwerk austauscht. Es wird gezeigt, dass die richtige Interpretation berechneter Energie- und Leistungswerte hinsichtlich der Richtung des Energieflusses einfach möglich ist, wenn konsequent mit Zählpfeilen gearbeitet wird. Die gleichermaßen für die Nachrichten- wie die Energietechnik wichtigen Begriffe Verlust, Wirkungsgrad und Leistungsanpassung werden eingeführt und auf einfache Schaltungen mit großer praktischer Bedeutung angewandt.

2.1.4.1 Energieumsatz von Zweipolen

Betrachtet wird eine Ladungsströmung durch einen beliebigen zeitinvarianten Zweipol (Bild 2.30). Die Klemmen des Zweipols sind mit A und B bezeichnet. Die Klemme A habe das Potenzial φ_A , die Klemme B das Potenzial φ_B .

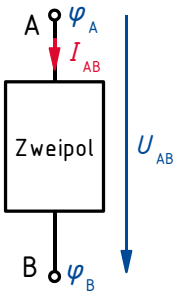


Bild 2.30: Allgemeiner Zweipol mit Zählpfeilen im VZS

Aus der Definition des elektrischen Potenzials in Gl. (1.13) folgt: Die Energie einer Ladung ΔQ auf Potenzial φ_A ist

$$\Delta W_A = \Delta Q \varphi_A, \quad (2.42)$$

die Energie dieser Ladungsmenge auf Potenzial φ_B ist

$$\Delta W_B = \Delta Q \varphi_B. \quad (2.43)$$

Strömt die Ladung ΔQ innerhalb eines Zeitraumes Δt gleichförmig von Klemme A durch den Zweipol zu Klemme B, so fließt gemäß Gl. (1.7) von Klemme A zu Klemme B der Strom

$$I_{AB} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (2.44)$$

Bei der Strömung der Ladung ΔQ durch den Zweipol *verringert* sich ihre *elektrische Energie* formal um den Wert

$$\Delta W_{AB} = \Delta W_A - \Delta W_B. \quad (2.45)$$

Ist $\Delta W_{AB} > 0$, nimmt die Energie der Ladungsträger tatsächlich um ΔW_{AB} ab. Diese elektrische Energie wird dem Stromkreis im Zweipol entzogen. Somit nimmt der Zweipol elektrische Energie aus dem Stromkreis auf, wirkt also als *Verbraucher* (Abschnitt 1.3.4).

Ist $\Delta W_{AB} < 0$, so nimmt die Energie der Ladungsträger beim Durchströmen des Zweipols tatsächlich um $-\Delta W_{AB} = |\Delta W_{AB}|$ zu. Diese Energie wird den Ladungsträgern im Zweipol zugeführt, der somit als *Erzeuger* wirkt (Abschnitt 1.3.4).

Aus Gl. (2.45) folgt mit den Gln. (2.42), (2.43), (2.44) und der in Bild 2.30 im Verbraucher-Zählpfeilsystem angetragenen Spannung

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B \quad (2.46)$$

$$\Delta W_{AB} = \Delta Q \varphi_A - \Delta Q \varphi_B = \Delta Q(\varphi_A - \varphi_B) = \Delta Q U_{AB} = I_{AB} \Delta t U_{AB}, \quad (2.47)$$

also

$$\Delta W_{AB} = U_{AB} I_{AB} \Delta t. \quad (2.48)$$

Für den Fall zeitinvarianter Größen lautet die *allgemein übliche* Schreibweise der Gl. (2.48)

$$W = U I t. \quad (2.49)$$

Bei Verbraucher-Zählpfeilsystem nimmt ein Zweipol die mittels Gl. (2.49) berechnete elektrische Energie W auf. Ist $W < 0$, so gibt er tatsächlich die Energie $|W|$ ab.

In Gl. (2.49) ist durch das Weglassen der Indizes der Klemmengrößen die Information über das verwendete Zählpfeilsystem verloren gegangen. Die Herleitung der Gleichung und die oben angegebene Interpretation der Bedeutung der mit ihr berechneten Energie gelten aber nur bei Verbraucher-Zählpfeilsystem am Zweipol!

Nun wird zur Beschreibung des oben betrachteten Vorgangs das Erzeuger-Zählpfeilsystem am Zweipol verwendet. Dies wird dadurch erreicht, dass die Spannung $U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = -U_{AB}$ mit Zählpfeil von Klemme B zu Klemme A betrachtet wird. Dann folgt an Stelle von Gl. (2.48) die Gleichung

$$\Delta W_{AB} = -U_{BA} I_{AB} \Delta t, \quad (2.50)$$

die sich bei Weglassen aller Indizes bzgl. des Vorzeichens von Gl. (2.49) unterscheidet!

Wird bei einem Zweipol mit Erzeuger-Zählpfeilsystem die allgemein übliche Gl. (2.49) verwendet, so ist das Rechenergebnis anders zu interpretieren: Bei Erzeuger-Zählpfeilsystem gibt ein Zweipol die mittels Gl. (2.49) berechnete elektrische Energie W ab. Ist $W < 0$, nimmt er $|W|$ auf.

Im Fall zeitvarianter Vorgänge sind in der Herleitung von Gl. (2.48) die Zeitfunktionen $u(t)$, $i(t)$ und infinitesimal kleine Größen $\Delta Q \rightarrow dQ$, $\Delta t \rightarrow dt$ und $\Delta W \rightarrow dW$ zu betrachten. Anschließend ist über die Zeit zu integrieren, was zu der symbolischen Schreibweise

$$W = \int u(t) i(t) dt \quad (2.51)$$

führt, die die Verallgemeinerung von Gl. (2.49) darstellt. Für die Interpretation der berechneten Zahlenwerte gelten unverändert die obigen Aussagen.

In der Mechanik übliche Einheiten für die Energie sind Joule und Newtonmeter (Gl. (1.3)). In der Elektrotechnik wird als Basiseinheit der Energie die Wattsekunde verwendet:

$$[W] = 1 \text{ Ws} \quad (2.52)$$

Da insbesondere in der Energietechnik sehr hohe Energiemengen⁷ auftreten, werden in der Praxis oft die nicht kohärenten Energieeinheiten $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$, $1 \text{ MWh} = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Ws}$ und $1 \text{ GWh} = 3,6 \cdot 10^{12} \text{ Ws}$ verwendet.

Beispiel 2.14: Energieumsatz einer Kühltasche

Eine Kühltasche zum Anschluss an das 12 V Bordnetz von Pkws nimmt einen Strom von 4 A auf. Wie groß ist die von der Kühltasche innerhalb von 8 Stunden aufgenommene elektrische Energie?

Aus Gl. (2.49) folgt

$$W = 12 \text{ V} \cdot 4 \text{ A} \cdot 8 \text{ h} = 384 \text{ Wh}.$$

2.1.4.2 Leistungsumsatz von Zweipolen

Die in einem Zweipol eines Gleichstromnetzwerks umgesetzte Energie hängt davon ab, wie lange dieser Zweipol (z. B. Glühlampe, Batterie) in Betrieb ist. Verdoppelt man die Betriebsdauer, so verdoppelt sich auch die umgesetzte Energie. Daher liegt es nahe, die umgesetzte Energie auf die Betriebsdauer zu beziehen, wodurch sich eine *Kenngröße für den Energieumsatz des Zweipols pro Zeit* ergibt: es ist die vom Zweipol umgesetzte *elektrische Leistung* P . Bei zeitinvarianten Anordnungen gilt

$$P = \frac{W}{t}. \quad (2.53)$$

Allgemein ist der Augenblickswert der Leistung gleich der zeitlichen Ableitung der Energie

$$p(t) = \frac{d}{dt}W(t). \quad (2.54)$$

Ist W im betrachteten Zeitraum t nicht konstant, liefert Gl. (2.53) die *mittlere Leistung*. Mit Gl. (2.49) folgt aus Gl. (2.53) für beliebige Zweipole in Gleichstromnetzwerken

$$P = U I \quad (2.55)$$

bzw. allgemein für beliebige Zweipole bei zeitvarianten Klemmengrößen

$$p(t) = u(t) i(t). \quad (2.56)$$

Die SI-Einheit der Leistung ist das Watt. Aus Gl. (2.55) folgt

$$[P] = [U] \cdot [I] = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 1 \text{ W}. \quad (2.57)$$

Ausschließlich zur Berechnung der in Ohmschen Widerständen umgesetzten Leistung folgen aus dem Ohmschen Gesetz zusätzlich zu Gl. (2.55)

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (2.58)$$

und

$$P = I^2 R. \quad (2.59)$$

Da das Ohmsche Gesetz in der Form von Gl. (2.7) nur für das Verbraucher-Zählpeilsystem gilt, liegt den Gln. (2.58) und (2.59) implizit auch das Verbraucher-Zählpeilsystem zugrunde!

⁷Beispielsweise liefert eine mittlere Windenergieanlage ca. 3000 MWh pro Jahr, ein mittleres Steinkohle- oder Kernspaltungskraftwerk ca. 5000 GWh.

Beispiel 2.15: Maximale Betriebsspannung eines Widerstandes

An welcher Spannung darf ein Widerstand mit dem Widerstandswert $4,7\text{ k}\Omega$ und einer Dauerbelastbarkeit von $1/8\text{ W}$ maximal betrieben werden, damit er thermisch nicht überlastet wird?

Aus Gl. (2.58) folgt

$$U = \sqrt{PR} = \sqrt{0,125\text{ W} \cdot 4,7\text{ k}\Omega} \approx 24\text{ V}.$$

Beispiel 2.16: Betrieb eines Widerstandes mit halber Nennleistung

Ein Ohmscher Widerstand soll nur 50 % seiner Nennleistung aufnehmen. Wie weit ist seine Betriebsspannung dafür gegenüber der Spannung, bei der er seine Nennleistung aufnimmt, abzusinken?

Bei Betrieb mit Nennleistung gilt wegen Gl. (2.58)

$$U_{\text{nom}} = \sqrt{P_{\text{nom}} R},$$

bei Betrieb mit halber Nennleistung

$$U_{0,5\text{ nom}} = \sqrt{P_{0,5\text{ nom}} R} = \sqrt{0,5 P_{\text{nom}} R} = \sqrt{0,5} \cdot \sqrt{P_{\text{nom}} R} = \sqrt{0,5} \cdot U_{\text{nom}} = 0,7071 U_{\text{nom}}.$$

Wegen der quadratischen Abhängigkeit zwischen Leistung und Spannung bei einem Ohmschen Widerstand führt eine Absenkung der Spannung um 30 % etwa zu einer Halbierung der umgesetzten Leistung.

2.1.4.3 Interpretation von berechneten Leistungen

Die Überlegungen zur Interpretation des berechneten Wertes der in einem Zweipol umgesetzten Energie in Abhängigkeit vom verwendeten Zählpfeilsystem aus Abschnitt 2.1.4.1 sind direkt auf elektrische Leistungen übertragbar, die mittels Gl. (2.55) berechnet wurden. Daraus folgen die in Tabelle 2.3 zusammengefassten Aussagen.

Tabelle 2.3: Interpretation von Leistungen aufgrund von Vorzeichen und Zählpfeilsystem

$P = UI$	VZS am Zweipol	EZS am Zweipol
$P > 0$	Zweipol nimmt die Leistung P auf, wirkt also als Verbraucher	Zweipol gibt die Leistung P ab, wirkt also als Erzeuger
$P < 0$	Zweipol gibt die Leistung $ P $ ab, wirkt also als Erzeuger	Zweipol nimmt die Leistung $ P $ auf, wirkt also als Verbraucher

Um die Richtung des Energiestroms bei einem Zweipol zu kennzeichnen, kann man auch für die Leistung P einen *Leistungszählpfeil* verwenden. Bei Verbraucher-Zählpfeilsystem weist der Zählpfeil für P zum betrachteten Zweipol, bei Erzeuger-Zählpfeilsystem vom Zweipol weg (Bild 2.31). Die *tatsächliche* Richtung des Energiestroms ergibt sich aus der Richtung des Zählpfeils für P zusammen mit dem Vorzeichen von P aus Tabelle 2.3.

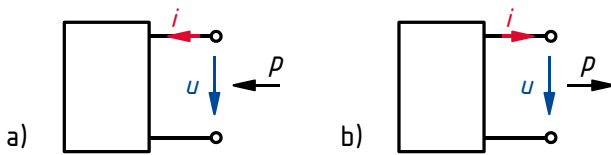


Bild 2.31: Zählpfeile für die in Zweipolen umgesetzte Leistung bei VZS (a) bzw. EZS (b)

2.1.4.4 Verluste und Wirkungsgrad

Bei der *Energieumwandlung* von einer Form W_{zu} (z. B. elektrischer Energie) in eine andere Form W_{Nutz} (z. B. mechanische Energie) wird stets ein Teil der zugeführten Energie in eine nicht erwünschte Form W_{Verlust} (meist Wärmeenergie) umgesetzt (Bild 2.32).

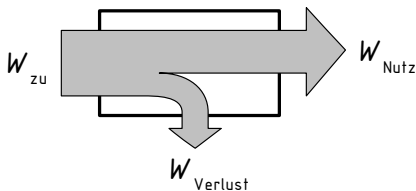


Bild 2.32: Schematisierter Energieumwandlungsprozess

Unter der Voraussetzung, dass innerhalb des Prozesses keine Energie gespeichert werden kann, gilt

$$W_{\text{zu}} = W_{\text{Nutz}} + W_{\text{Verlust}} \quad (2.60)$$

Bezieht man die innerhalb eines Zeitintervalls umgesetzten Energien auf dieses Zeitintervall, erhält man gemäß Gl. (2.53) bzw. Gl. (2.54) eine Aussage über die umgesetzten Leistungen:

$$P_{\text{zu}} = P_{\text{Nutz}} + P_{\text{Verlust}} \quad (2.61)$$

Ein Maß für die *Effizienz der Energieumwandlung* ist der *Wirkungsgrad* η mit

$$\eta = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{zu}} - P_{\text{Verlust}}}{P_{\text{zu}}} = 1 - \frac{P_{\text{Verlust}}}{P_{\text{zu}}} \quad (2.62)$$

Der Wirkungsgrad wird meist in Prozent angegeben. Bei physikalischen Prozessen kann er nicht größer als 100 % sein.

Der Wirkungsgrad einer Rundfunkübertragung, also das Verhältnis der Empfangsleistung an der Antenne zu der im Sender erzeugten elektrischen Leistung liegt bei Werten von 10^{-14} oder noch darunter. Bei der Übertragung der Informationen von Forschungsatelliten zur Empfangsstation auf der Erde treten Wirkungsgrade auf, die noch um mehrere Zehnerpotenzen darunter liegen. Kleine Haushaltsgeräte haben teilweise nur geringe Wirkungsgrade von etwa 10 %.

Der Wirkungsgrad großer elektrischer Maschinen ist in der Regel weit höher als der vergleichbarer anderer Kraftmaschinen. So haben elektromechanische Generatoren Wirkungsgrade bis über 98 % und große Transformatoren bis über 99 %. Auch bei der Energieübertragung ist die elektrische Energie allen anderen Möglichkeiten zum Energietransport hinsichtlich der geringen Verluste überlegen.

Zur Beurteilung der Effizienz von Energieumwandlungsprozessen ist der *energetische Wirkungsgrad*

$$\eta_W = \frac{W_{\text{Nutz}}}{W_{\text{Zu}}} \quad (2.63)$$

eine wesentliche Kenngröße. Er macht im Gegensatz zum Wirkungsgrad nach Gl. (2.62) keine Aussage über einen bestimmten Zeitpunkt, sondern über einen Betriebszyklus oder den gesamten Lebenszyklus einer Anlage.

Bei Kraftwerken und Speichern für elektrische Energie wird der energetische Wirkungsgrad in der Regel als das Verhältnis von tatsächlich nutzbarer abgegebener elektrischer Energie zu aufgebrachtener *elektrischer* Energie definiert.

Zur aufgebrauchten elektrischen Energie zählt neben der direkt aufgenommen auch die indirekt (für Forschung, Entwicklung, Rohstoffgewinnung, Produktion, Installation, Betrieb, Instandhaltung und Entsorgung) benötigte elektrische Energie. Der energetische Wirkungsgrad ist nicht mit dem „betriebswirtschaftlichen Wirkungsgrad“ gleichzusetzen.

Die Speicherung elektrischer Energie ist nur in geringem Umfang möglich und beruht fast immer auf der reversiblen Umwandlung in eine andere Energieform, z. B. mechanische Energie (Schwungmasse, Pumpspeicherwerk), chemische Energie (Akkumulator, Wasserstoffherzeugung und Brennstoffzelle) oder thermische Energie. Jeder dieser Umwandlungsprozesse hat nur einen kleinen energetischen Wirkungsgrad.

Der energetische Wirkungsgrad von Kraftwerken muss größer als 100 % sein, da sie sonst mehr elektrische Energie verbrauchen als erzeugen. Ein solcher Wirkungsgrad ist natürlich nur möglich, weil nicht-elektrische Energieformen unberücksichtigt bleiben, z. B. die chemische Energie von Brennstoffen, die kinetische Energie von Luft, die potenzielle Energie von Wasser oder die elektromagnetische Energie von Sonnenlicht.

Beispiel 2.17: Leistungsaufnahme und Verluste eines Elektromotors

Welche elektrische Leistung P_{Motor} muss ein Elektromotor aufnehmen, der mit einem Wirkungsgrad $\eta = 88\%$ elektrische in mechanische Leistung umwandelt und eine Kreiselpumpe mit der Leistungsaufnahme $P_{\text{Pumpe}} = 3 \text{ kW}$ antreiben soll?

Da der Elektromotor $P_{\text{Nutz}} = 3,0 \text{ kW}$ mechanisch abgeben muss, ergibt sich nach Gl. (2.62) die notwendige Leistungsaufnahme zu

$$P_{\text{Motor}} = P_{\text{Zu}} = \frac{P_{\text{Nutz}}}{\eta} = \frac{P_{\text{Pumpe}}}{\eta} = \frac{3 \text{ kW}}{0,88} = 3,409 \text{ kW}.$$

Die im Motor anfallende Verlustleistung beträgt

$$P_{\text{Verlust}} = P_{\text{Zu}} - P_{\text{Nutz}} = 3,409 \text{ kW} - 3,0 \text{ kW} = 409 \text{ W}.$$

2.1.4.5 Leerlauf, Kurzschluss und Leistungsanpassung bei linearen Quellen

Zunächst wird eine Anordnung aus einer *beliebigen* elektrischen Quelle und einem *beliebigen, einstellbaren* Lastwiderstand R_{Last} betrachtet (Bild 2.33).

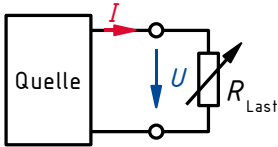


Bild 2.33: Quelle mit Lastwiderstand und Zählpfeilen für die Klemmengrößen

Die über die Klemmen von der Quelle an die Last abgegebene Leistung lässt sich nach Gl. (2.55) über die den beiden Zweipolen gemeinsamen Klemmengrößen ausdrücken als

$$P_{\text{Last}} = U I . \quad (2.64)$$

Bei $I = 0$ (*Leerlauf*, also $R_{\text{Last}} \rightarrow \infty$) und bei $U = 0$ (*Kurzschluss*, also $R_{\text{Last}} = 0$) gilt wegen Gl. (2.64) $P_{\text{Last}} = 0$, es wird also keine Leistung von der Quelle an die Last abgegeben. Im Bereich zwischen diesen beiden extremen Lastfällen muss es einen Wert von R_{Last} geben, für den die an die Last abgegebene Leistung maximal ist. Daraus ergibt sich die für nachrichtentechnische und messtechnische Anwendungen sehr wichtige Fragestellung: *Welchen Wert muss ein Lastwiderstand haben, damit er von einer gegebenen Quelle möglichst viel Leistung aufnimmt?*

Bei *realen* Quellen mit beliebiger Abhängigkeit zwischen den Klemmengrößen (z. B. bei Solar-Generatoren [Rin01] oder elektronisch geregelten Quellen (Abschnitt 2.1.3.5) wird mittels der Strom-Spannungs-Kennlinie der Quelle *punktweise* das Produkt nach Gl. (2.55) berechnet. Man erhält in der Regel genau einen *Arbeitspunkt* ($U_{P_{\text{max}}}$, $I_{P_{\text{max}}}$), bei dem P_{Last} maximal ist. Dieser Arbeitspunkt kann eingestellt werden, indem die Quelle mit dem Lastwiderstand

$$R_{\text{Last}} = \frac{U_{P_{\text{max}}}}{I_{P_{\text{max}}}} \quad (2.65)$$

beschaltet wird.

Nun wird der besonders wichtige Spezialfall untersucht, dass es sich in Bild 2.33 bei der Quelle um eine *lineare* Quelle und bei dem einstellbaren Lastwiderstand um einen *linearen* Widerstand handelt. Die gemeinsamen Klemmengrößen U und I müssen nun sowohl Gl. (2.32) erfüllen, die das Klemmenverhalten linearer Quellen bei Erzeuger-Zählpfeilsystem beschreibt, als auch das Ohmsche Gesetz, das das Klemmenverhalten linearer Widerstände bei Verbraucher-Zählpfeilsystem beschreibt. Der sich bei der Zusammenschaltung ergebende *Arbeitspunkt* (U_{AP} , I_{AP}) muss also sowohl auf der *Quellenkennlinie* als auch auf der *Lastkennlinie* liegen.

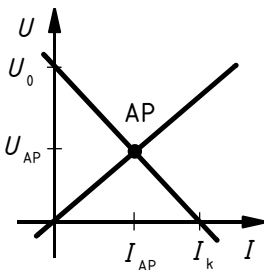


Bild 2.34: Grafische Bestimmung des Arbeitspunktes aus Quellen- und Lastkennlinie

In Bild 2.34 sind die Kennlinien der beiden Zweipole für den Fall $U_0 > 0$ in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt. Der Schnittpunkt der Kennlinien ist der sich einstellende Arbeitspunkt AP – im Fall einer linearen Quelle an einem linearen Zweipol kann es nur genau einen sein.

Aus Gl. (2.64) folgt mit Gl. (2.32) die von der Quelle an die Last abgegebene Leistung

$$P_{\text{Last}} = U I = (U_0 - R_i I) I = U_0 I - R_i I^2. \quad (2.66)$$

Die Funktion $P_{\text{Last}}(I)$ wird also durch eine nach unten geöffnete Parabel dargestellt, die bei $I = 0$ und $I = U_0/R_i = I_k$ Nullstellen hat (Bild 2.35). Daraus folgt, dass das Maximum der Funktion (2.66) bei $I = 0,5 I_k$ liegen muss. Die zugehörige Spannung ist nach Gl. (2.20) bzw. Bild 2.35 $U = 0,5 U_0$.

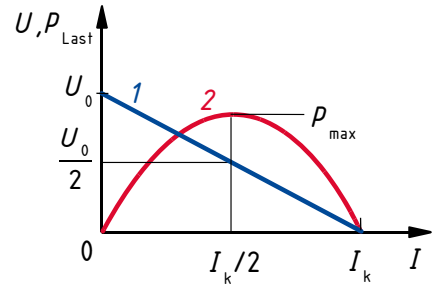


Bild 2.35: $U(I)$ -Kennlinie (1) und $P(I)$ -Kennlinie (2) einer linearen Quelle

Zum gleichen Ergebnis kommt man analytisch durch Ableiten der Funktion (2.66) nach der Variablen I und Nullsetzen des Ergebnisses:

$$\frac{d}{dI} P_{\text{Last}}(I) = U_0 - R_i 2I = 0. \quad (2.67)$$

Daraus folgt

$$I = \frac{U_0}{2 R_i} = \frac{1}{2} I_k. \quad (2.68)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.68) in Gl. (2.32) erhält man

$$U = U_0 - R_i \frac{U_0}{2 R_i} = \frac{U_0}{2}. \quad (2.69)$$

Die maximal übertragbare Leistung ist also

$$P_{\text{max}} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{I_k}{2} = \frac{1}{4} U_0 I_k. \quad (2.70)$$

Der erforderliche Wert des Lastwiderstandes, um diesen Betriebspunkt einzustellen, ergibt sich aus seinen durch die Gln. (2.68) und (2.69) bestimmten Klemmengrößen zu

$$R_{\text{Last}} = \frac{0,5 U_0}{0,5 I_k} = \frac{U_0}{I_k}, \quad (2.71)$$

woraus mit Gl. (2.30) die Anpassungsbedingung für *Leistungsanpassung* bei linearen Quellen in Gleichstromnetzwerken folgt:

$$R_{\text{Last}} = R_i \quad (2.72)$$

Eine lineare Quelle gibt maximale Leistung an einen Lastwiderstand ab, wenn der Wert des Lastwiderstandes gleich dem Innenwiderstand der Quelle ist.

Nun soll der Wirkungsgrad der gerade betrachteten Anordnung im Anpassungsfall untersucht werden. Die Nutzleistung P_{Nutz} ist die im Lastwiderstand umgesetzte Leistung. Die zugeführte Leistung P_{zu} ist die Leistung, die innerhalb der linearen Quelle in elektrische Leistung umgesetzt wird.

Um sie berechnen zu können, muss die Schaltungsstruktur der linearen Quelle bekannt sein.

Betrachtet wird zunächst der besonders einfache Fall, dass die lineare Quelle die Struktur einer linearen Spannungsquelle (Abschnitt 2.1.3.4) mit den Parametern $U_q = U_0$ und R_i aufweist. Die in der idealen Quelle zugeführte Leistung ergibt sich aus dem Produkt ihrer Quellenspannung und des Stroms nach Gl. (2.68), der im Anpassungsfall durch sie fließt

$$P_{\text{zu}} = U_0 \cdot \frac{1}{2} I_k. \quad (2.73)$$

(Dieses Ergebnis erhält man auch bei Durchführung der Rechnung mit einer linearen Stromquelle.)

Damit ist der Wirkungsgrad der Schaltung bei Leistungsanpassung

$$\eta = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{\frac{1}{4} U_0 I_k}{\frac{1}{2} U_0 I_k} = 0,5 = 50\%. \quad (2.74)$$

Das heißt, dass nur die Hälfte der innerhalb der Quelle zugeführten Leistung genutzt wird und die andere Hälfte verloren geht.

Damit ist der Betriebsfall der Leistungsanpassung für die Energietechnik völlig inakzeptabel. Bei der Übertragung elektrischer Energie werden Wirkungsgrade von über 98 % angestrebt. Dies wird erreicht durch $R_{\text{Last}} \gg R_i$.

Weicht die innere Struktur der linearen Quelle von der einer linearen Spannungsquelle bzw. der einer linearen Stromquelle ab, ist der Wirkungsgrad bei Leistungsanpassung im Allgemeinen sogar kleiner als 50 %.

Beispiel 2.18: Maximale Leistungsabgabe einer linearen Quelle

Die Starterbatterie eines Kfz habe die Leerlaufspannung $U_0 = 13,8 \text{ V}$ und den Innenwiderstand $R_i = 40 \text{ m}\Omega$. Welche Leistung kann der Akkumulator maximal an einen Verbraucher abgeben? Wie groß muss für diesen Fall der Widerstand des Verbrauchers sein?

Die maximal abgebbare (verfügbare) Leistung beträgt nach Gl. (2.70) mit Gl. (2.30)

$$P_{\text{max}} = \frac{U_0^2}{4 R_i} = \frac{13,8^2 \text{ V}^2}{4 \cdot 40 \text{ m}\Omega} = 1,19 \text{ kW}.$$

Diese Leistung wird tatsächlich abgegeben, wenn die Anpassungsbedingung Gl. (2.72) erfüllt ist:

$$R_{\text{Last}} = R_i = 40 \text{ m}\Omega$$

Abschließend sollen die am Anfang dieses Abschnitts betrachteten extremen Lastfälle *Leerlauf* und *Kurzschluss* bei einer *linearen Spannungsquelle* und einer *linearen Stromquelle* betrachtet werden, die *identisches Klemmenverhalten* aufweisen, also die Gln. (2.40) und (2.41) erfüllen. In beiden Lastfällen geben beide Quellen keine Leistung ab.

Bei *Leerlauf* wird in der linearen Spannungsquelle *keine Leistung* umgesetzt, da kein Strom fließt. Dieser Betriebsfall ist also der *energetisch günstigste*. In der linearen Stromquelle muss bei Leerlauf der gesamte Quellenstrom I_q durch den Innenwiderstand R_i fließen. Die elektrische Leistung $I_q^2 R_i$, die innerhalb der (idealen) Quelle zugeführt wird, geht auch innerhalb der (linearen) Quelle wieder verloren ($\eta = 0$). Dies ist der *energetisch ungünstigste* Betriebsfall einer linearen Stromquelle.

Bei *Kurzschluss* einer linearen Spannungsquelle fließt durch die Quelle der Kurzschlussstrom U_q/R_i , der dazu führt, dass innerhalb der (idealen) Quelle dem Stromkreis die Leistung U_q^2/R_i zugeführt wird, die innerhalb des Innenwiderstandes der (linearen) Quelle gleich wieder dem Stromkreis entzogen wird ($\eta = 0$). Dies ist der *energetisch ungünstigste* Betriebsfall einer linearen Spannungsquelle. Bei Kurzschluss einer linearen Stromquelle fließt der gesamte Quellenstrom durch den Kurzschluss. Die Spannung über der (idealen) Quelle und dem Innenwiderstand der (linearen) Quelle ist null. Damit wird bei Kurzschluss in einer linearen Stromquelle keine Leistung umgesetzt. Dieser Betriebsfall ist – auch wenn es zunächst paradox klingen mag – der *energetisch günstigste*.

Verallgemeinernd lässt sich feststellen: Lineare Quellen mit *identischem Klemmenverhalten* unterscheiden sich im Allgemeinen bezüglich ihres *inneren Leistungsumsatzes* bei verschiedenen Betriebsfällen.

2.1.4.6 Leistungsbilanz

Der *Energieerhaltungssatz* ist eines der fundamentalen Gesetze der Physik. Er besagt, dass die *Summe aller Energien* in einem *abgeschlossenen System konstant* ist. Daraus folgt für abgeschlossene elektrische Netzwerke, die keine elektrische Energie speichern können, zu jedem Zeitpunkt: Die Summe der dem Netzwerk *zugeführten elektrischen Leistungen* ist gleich der Summe der vom Netzwerk *abgegebenen* (d. h. in eine nichtelektrische Energieform umgewandelten) *elektrischen Leistungen*.

Ein Widerstand kann elektrische Leistung nur aufnehmen. Was mit dieser Leistung geschieht, ist hier uninteressant, da ein Widerstand in einem *Ersatzschaltbild* einen beliebigen Verbraucher elektrischer Energie modelliert, der diese Energie in eine beliebige Energieform (z. B. Wärmeenergie, chemische Energie, mechanische Energie) umwandelt.

Das *Modell* der idealen Strom- oder Spannungsquelle kann prinzipiell elektrische Leistung sowohl abgeben als auch aufnehmen. Ob eine solche Quelle in einer Schaltung als Erzeuger oder Verbraucher elektrischer Leistung wirkt, wird durch die äußere Beschaltung der Quelle bestimmt.

Eine *Leistungsbilanz* gibt Aufschluss darüber, wie viel *elektrische Leistung* in einem Netzwerk insgesamt (von Erzeugern) zugeführt bzw. (von Verbrauchern) aufgenommen wird. Sie kann als *Plausibilitätstest* für die Ergebnisse einer Netzwerkanalyse verwendet werden. Stimmt die Leistungsbilanz nicht, so muss ein Fehler aufgetreten sein. Die in der Literatur üblichen mathematischen Formulierungen für eine Leistungsbilanz, nämlich $\Sigma P = 0$ und $\Sigma P_{\text{ab}} = \Sigma P_{\text{auf}}$, enthalten keine Vorschrift zur Berechnung der Leistungen. Dies kann zu Vorzeichenproblemen

führen, die teilweise durch Plausibilitätsbetrachtungen oder Spezialfallbehandlung gelöst werden. Solche Schwierigkeiten sind durch konsequente Anwendung der Zählpeile vermeidbar.

Die in einem beliebigen Zweipol in einem Gleichstromnetzwerk umgesetzte Leistung wird *in jedem Fall* mittels Gl. (2.55)

$$P = U I$$

berechnet. Ein solcher Wert ist nur zusammen mit dem am betrachteten Zweipol verwendeten Zählpeilsystem eindeutig (Abschnitt 2.1.4.3). Zu beachten ist, dass den nur für Widerstände geltenden Gln. (2.58) und (2.59) implizit das Verbraucher-Zählpeilsystem zugrunde liegt.

Damit ergeben sich drei mögliche Varianten zum Aufstellen einer Leistungsbilanz:

1. Enthält eine Schaltung sowohl Zweipole mit Erzeuger-Zählpeilsystem als auch mit Verbraucher-Zählpeilsystem, so sollte die allgemeine Form

$$\Sigma P_{EZS} = \Sigma P_{VZS} \quad (2.75)$$

verwendet werden. Hier sind alle Leistungen, die bei Zweipolen mit Erzeuger-Zählpeilsystem berechnet werden, auf der einen und alle Leistungen, die bei Zweipolen mit Verbraucher-Zählpeilsystem berechnet werden, auf der anderen Seite, *jeweils mit ihren Vorzeichen*, einzusetzen.

2. Wenn an allen Zweipolen der betrachteten Schaltung das selbe Zählpeilsystem verwendet wird, ist eine der beiden Seiten in Gl. (2.75) null. Dann kann die vereinfachte Form

$$\Sigma P = 0 \quad (2.76)$$

angewandt werden. Alle Leistungen werden wieder mit Vorzeichen eingesetzt. In Gl. (2.76) haben alle tatsächlich abgegebenen Leistungen das entgegengesetzte Vorzeichen der tatsächlich aufgenommenen Leistungen.

3. Die spezielle Form

$$\Sigma P_{ab} = \Sigma P_{auf} \quad (2.77)$$

darf nur angewandt werden, wenn *jede einzelne* berechnete Leistung gemäß Tabelle 2.3 zunächst *interpretiert* (Zweipol gibt Leistung ab oder nimmt Leistung auf) und dann der *Betrag* der Leistung auf der entsprechenden Seite der Gl. (2.77) eingesetzt wird.

2.2 Verzweigte Gleichstromkreise

In diesem Abschnitt werden alle wichtigen Gesetze zur Berechnung einfacher Gleichstromnetzwerke vorgestellt. In formal verallgemeinerter Form gelten sie auch für Netzwerke mit zeitvarianten Strömen und Spannungen. Die hier vermittelten Inhalte bilden die Basis der Berechnungsverfahren für beliebig komplizierte Gleichstromnetzwerke, die in Abschnitt 2.4 behandelt werden.

2.2.1 Knoten, Zweig, Masche

2.2.1.1 Knoten

Ein Punkt eines elektrischen Netzwerks, in dem mindestens drei Anschlüsse von Schaltungselementen zusammentreffen, in dem sich also *der Strom verzweigen kann*, heißt *Knoten* des Netzwerks. Alle mit einem Knoten verbundenen Leitungen haben in einem *Ersatzschaltbild* stets das gleiche Potenzial wie der Knoten. Das nichtideale elektrische Verhalten *realer* Verbindungsleitungen ist ggf. in einem *Ersatzschaltbild* durch Einfügen geeigneter Schaltungselemente zu berücksichtigen.

Knoten werden in der Regel mit lateinischen Buchstaben (z. B. a, b, c, ...; K_1, K_2, K_3, \dots) bezeichnet. Es ist empfehlenswert, Knoten in einem Ersatzschaltbild durch ausgefüllte Kreise an den Verbindungsstellen der Leitungen hervorzuheben (Bild 2.36).

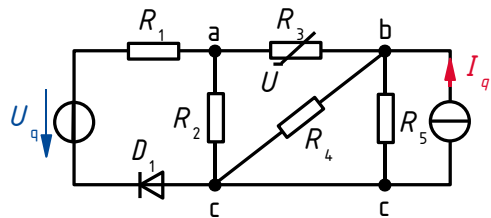


Bild 2.36: Gleichstromnetzwerk mit Knotenbezeichnungen

Sind in einem Ersatzschaltbild zwei oder mehr Knoten durch Verbindungsleitungen *unmittelbar* miteinander verbunden, so bilden sie im Sinne der Netzwerktheorie einen einzigen Knoten (*Superknoten*). Die beiden in Bild 2.36 mit c bezeichneten Knoten sind zwar grafisch getrennt dargestellt, bilden aber elektrisch nur einen Knoten! Das Netzwerk in Bild 2.36 enthält also die drei Knoten a, b und c.

Beim Arbeiten mit Netzwerkanalyseprogrammen (Abschnitt 2.6) ist zu beachten, dass dort – im Gegensatz zur Netzwerktheorie – *jede* Verbindung von mindestens *zwei* Anschlüssen von Schaltungselementen als Knoten bezeichnet wird, also auch die Verbindung zwischen nur *zwei* Zweipolen.

2.2.1.2 Zweig

Ein *Zweig* eines elektrischen Netzwerks verbindet genau zwei Knoten durch einen Zweipol oder durch mehrere hintereinander („in Reihe“) geschaltete Zweipole. Durch alle Zweipole eines Zweiges fließt wegen der *Kontinuitätsgleichung* stets der selbe Strom. Ein Knotenpaar darf durch beliebig viele *parallele Zweige* verbunden werden. Die 6 Zweige der Schaltung in Bild 2.36 werden mit Ausnahme des linken Zweiges durch je einen Zweipol gebildet. Der linke Zweig besteht aus der *Reihenschaltung* der mit D_1 , U_q und R_1 bezeichneten Zweipole. Alle Zweige, die mit einem bestimmten Knoten unmittelbar verbunden sind, werden als *inzident* (von lat. incidere = einfallen, sich ereignen) mit diesem Knoten bezeichnet.

2.2.1.3 Masche

Eine *Masche* in einem elektrischen Netzwerk ist ein *geschlossener Weg durch das Netzwerk*, der aus mindestens zwei⁸ Zweigen besteht. Verzweigte Netzwerke enthalten stets mehrere Maschen. Von einer *betrachteten Masche* darf jeder Zweig des Netzwerks nur höchstens einmal durchlaufen und jeder Knoten nur höchstens einmal berührt werden (mit Ausnahme des Startknotens, der auch Zielknoten ist). Zur Netzwerkanalyse verwendete Maschen werden oft in das Ersatzschaltbild eingezeichnet. Maschen werden nachfolgend mit römischen Zahlen (I, II, III, IV, ...) oder z. B. mit M_1, M_2, M_3, \dots (Bild 2.72) bezeichnet. Oft ist der *Umlaufsinn* einer Masche von Bedeutung. Er wird durch einen *Richtungspfeil* am eingezeichneten Maschenumlauf gekennzeichnet (Bild 2.72).

2.2.2 Kirchhoffsche Gesetze

Die Kirchhoffschen Gesetze bilden zusammen mit dem Ohmschen Gesetz die mathematische Berechnungsgrundlage für elektrische Gleichstromnetzwerke. Bei der praktischen Berechnung von Netzwerken mittels der Kirchhoffschen Gesetze ist sorgfältig zu unterscheiden zwischen den Vorzeichen, mit denen die *Formelzeichen* (Variablenamen) der Ströme und Spannungen in die Kirchhoffschen Gleichungen eingesetzt werden und den Vorzeichen der *Zahlenwerte* der Ströme und Spannungen, die bei den Zahlenwertrechnungen die Variablenamen ersetzen.

2.2.2.1 Knotensatz (1. Kirchhoffsches Gesetz)

In Gleichstromnetzwerken sind alle Spannungen und Ströme zeitinvariant. Deshalb muss die Gesamtladung jedes Knotens im Netzwerk ebenfalls zeitinvariant sein. Daraus folgt, dass die Ladungen, die durch p Ströme zu einem Knoten transportiert werden, *unmittelbar* durch q andere Ströme wieder abtransportiert werden müssen. Für jeden Knoten muss also *in jedem Augenblick* gelten „*Summe der zufließenden gleich Summe der abfließenden Ströme*“:

$$\sum_{\mu=1}^p I_{zu,\mu} = \sum_{\nu=1}^q I_{ab,\nu} \quad (2.78)$$

Zählt man alle zum Knoten hinfließenden Ströme positiv und alle abfließenden negativ (oder umgekehrt), so folgt bei n mit dem Knoten inzidenten Zweigen der *Knotensatz* in der einfach zu merkenden Kurzform „*Summe aller Ströme gleich null*“:

$$\sum_{\nu=1}^n I_{\nu} = 0 \quad (2.79)$$

Da die Zahlenwerte der einzelnen Ströme im Allgemeinen nicht bekannt sind, sollten die Ausdrücke „zufließend“ und „abfließend“ *immer* auf die Richtungen der zugehörigen *Stromzählpfeile* bezüglich des gerade betrachteten Knotens bezogen werden.

Werden die Ströme, deren Zählpfeile vom betrachteten Knoten *weg* weisen, positiv gezählt, so führt die Anwendung der Gl. (2.79) auf den Knoten in Bild 2.37 zu

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0. \quad (2.80)$$

⁸Eine Ausnahme bildet ein unverzweigter Stromkreis, der aus genau einer Masche besteht (Abschnitt 2.1).

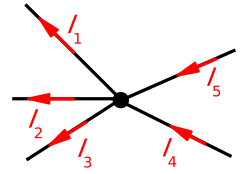


Bild 2.37: Knoten eines Netzwerks mit inzidenten Zweigen und Stromzählpfeilen

Zählt man die Ströme, deren Zählpfeile zum betrachteten Knoten *hin* weisen positiv, ergibt sich

$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0. \quad (2.81)$$

Anwendung des Knotensatzes in der Form von Gl. (2.78) auf den Knoten ergibt

$$I_4 + I_5 = I_1 + I_2 + I_3. \quad (2.82)$$

Die drei Ansätze führen offensichtlich zur gleichen Aussage.

Beispiel 2.19: Anwendung des Knotensatzes

In Bild 2.37 gilt für die Ströme $I_1 = 4 \text{ A}$, $I_2 = -5 \text{ A}$, $I_4 = 7 \text{ A}$, $I_5 = -10 \text{ A}$. Der Strom I_3 ist zu bestimmen.

Aus jeder der Gln. (2.80) bis (2.82) ergibt sich für den gesuchten Strom

$$I_3 = -I_1 - I_2 + I_4 + I_5 = -4 \text{ A} - (-5 \text{ A}) + 7 \text{ A} + (-10 \text{ A}) = -2 \text{ A}.$$

Wie die letzte Zeile von Beispiel 2.19 zeigt, ist bei der Anwendung des Knotensatzes streng zwischen den Vorzeichen der Zahlenwerte der Ströme und den aus den Zählpfeilrichtungen folgenden mathematischen Operationszeichen $+$ und $-$ zu unterscheiden!

Der Knotensatz ist direkt auf Netzwerke mit beliebig zeitvarianten Größen übertragbar, solange die Voraussetzung, dass die Knotenladungen konstant sind, gilt. Ist dies nicht mehr der Fall, so ist die Ladungsspeicherefähigkeit der Knoten im *Ersatzschaltbild* durch Kapazitäten zu modellieren (vgl. Beispiel 5.6 in Abschnitt 5.5.3.2).

2.2.2.2 Maschensatz (2. Kirchhoffsches Gesetz)

Betrachtet wird eine allgemeine Masche in einem Gleichstromnetzwerk (Bild 2.38).

Die Masche enthält die n Knoten $K_1 \dots K_n$ mit den *eindeutigen* elektrischen Potenzialen $\varphi_1 \dots \varphi_n$. Zwischen den Knoten liegen n betrachtete Zweige aus beliebigen Zweipolen.

Die Spannungen zwischen benachbarten Knoten (*Zweigspannungen*) können mittels Gl. (1.15) jeweils als Differenz der zugehörigen Knotenpotenziale ausgedrückt werden. Die einzelnen Zweigspannungen können sich aus *Spannungsabfällen* über Widerständen oder Stromquellen oder *Quellenspannungen* über Spannungsquellen oder einer Kombination daraus zusammensetzen.

Die Summe der Zweigspannungen über einen *geschlossenen Maschenumlauf* (*Umlaufspannung*) in Richtung der Spannungszählpfeile ist (Bild 2.38)

$$U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n-1,n} + U_{n,1} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + (\varphi_n - \varphi_1) = 0. \quad (2.83)$$

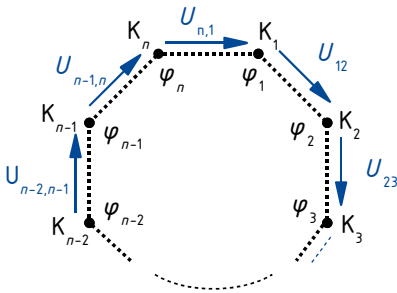


Bild 2.38: Allgemeine Masche eines Netzwerks mit n Zweigen

Offensichtlich heben sich die Potenziale in benachbarten Klammerausdrücken gegenseitig auf. Die Umlaufspannung ist also stets null. Daraus folgt der *Maschensatz* in der einfach zu merkenden Kurzform „Summe aller Spannungen gleich null“:

$$\sum_{\nu=1}^n U_{\nu} = 0 \tag{2.84}$$

Vor dem Aufstellen einer Maschengleichung ist ein *Umlaufsinn* für die Masche zu wählen. Seine Richtung ist prinzipiell beliebig. Alle Spannungsabfälle über Widerständen und Stromquellen und alle Quellenspannungen von Spannungsquellen sind in Gl. (2.84) *positiv* einzusetzen, wenn ihre Spannungszählpfeile *in Richtung des Umlaufsinn*s weisen, sonst *negativ*.

Nur bei Spannungs- und Stromquellen müssen *Spannungszählpfeile* im Schaltplan eingezeichnet sein. Bei Widerständen reicht es aus, wenn *Stromzählpfeile* in ihren Zweigen eingezeichnet sind. Dann wird für die Spannungsabfälle $+RI$ bzw. $-RI$ eingesetzt, je nachdem, ob Umlaufsinn der Masche und Stromzählpfeil gleiche bzw. entgegengesetzte Richtung haben.

Beispiel 2.20: Anwendung des Maschensatzes

Wie groß ist der Strom I_3 in dem in Bild 2.39 dargestellten Netzwerkausschnitt? Die Werte aller Widerstände und Quellenspannungen sowie die Ströme I_1, I_2 und I_4 seien bekannt.

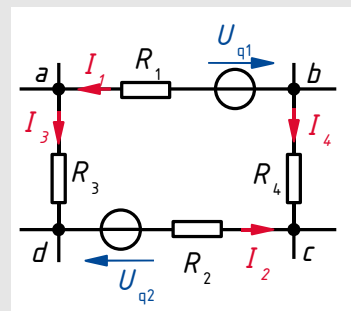


Bild 2.39: Masche eines Netzwerks mit Zählpfeilen für Ströme und Quellenspannungen

Ein Maschenumlauf im – willkürlich gewählten – Uhrzeigersinn liefert

$$-R_1 I_1 + U_{q1} + R_4 I_4 - R_2 I_2 + U_{q2} - R_3 I_3 = 0.$$

Daraus folgt

$$I_3 = \frac{-R_1 I_1 + U_{q1} + R_4 I_4 - R_2 I_2 + U_{q2}}{R_3}.$$

Der Maschensatz kann auch verwendet werden, um die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten eines Netzwerks zu berechnen, die *nicht* durch einen Zweig *direkt* miteinander verbunden sind. Hierbei wird von der Eindeutigkeit der Knotenpotenziale Gebrauch gemacht. Man wählt einen Umlauf, *der sich über den Zählpfeil der gesuchten Spannung schließt*. So kann z. B. in dem Schaltungsausschnitt in Bild 2.39 die Spannung U_{bd} zwischen den Knoten b und d bestimmt werden. Aus dem z. B. über den Knoten c geschlossenen Umlauf folgt

$$U_{bd} - U_{q2} + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0, \quad (2.85)$$

also

$$U_{bd} = R_4 I_4 - R_2 I_2 + U_{q2}. \quad (2.86)$$

Aus Gl. (2.86) folgt allgemeingültig, dass man nur vom Knoten am Anfang des Zählpfeils der gesuchten Spannung zum Knoten an seiner Spitze durch Zweige des Netzwerks zu laufen und dabei die Spannungen nach den oben genannten Vorzeichenregeln zu addieren braucht.

Der Maschensatz ist über die Gleichstromnetzwerke hinaus näherungsweise auch auf Netzwerke mit beliebig zeitvarianten Strömen anwendbar, sofern die Spannungsinduktionswirkung der durch die Ströme erzeugten Magnetfelder vernachlässigt werden kann. Anderenfalls ist anstelle des Maschensatzes das allgemeinere *Induktionsgesetz* (Abschnitt 4.3.1.4) anzuwenden oder die Induktionswirkung durch Induktivitäten im *Ersatzschaltbild* zu modellieren.

2.2.3 Parallelschaltung von Widerständen

In den folgenden Abschnitten werden Parallelschaltungen beliebig vieler Widerstände untersucht. Aus didaktischen Gründen werden dabei zunächst nicht Widerstände, sondern Leitwerte betrachtet.

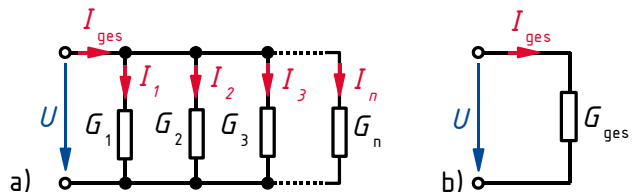
2.2.3.1 Gesamtwiderstand

Werden n Widerstände R_μ bzw. Leitwerte

$$G_\mu = 1/R_\mu \quad (2.87)$$

gemäß Bild 2.40a *parallel geschaltet*, so liegen alle Zweipole an der selben Spannung U und die durch die parallelen Zweige fließenden Ströme I_μ addieren sich zum Gesamtstrom I_{ges} .

Bild 2.40: Parallelschaltung von Leitwerten mit Zählpfeilen im VZS (a) und Ersatz-Zweipol (b)



Mit den in Bild 2.40a eingetragenen Zählpfeilen folgt aus dem Ohmschen Gesetz

$$I_1 = U G_1, I_2 = U G_2, \dots, I_n = U G_n. \quad (2.88)$$

Die Anwendung des Knotensatzes auf den oberen *Superknoten* in Bild 2.40a ergibt

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{\mu=1}^n I_{\mu}. \quad (2.89)$$

Gl. (2.88) in Gl. (2.89) führt zu

$$I_{\text{ges}} = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = U \sum_{\mu=1}^n G_{\mu}. \quad (2.90)$$

Das Klemmenverhalten der Schaltung in Bild 2.40a kann nachgebildet werden durch die *Ersatzschaltung* in Bild 2.40b, die aus nur einem Leitwert bzw. Widerstand

$$R_{\text{ges}} = 1/G_{\text{ges}} \quad (2.91)$$

besteht. Für die Ersatzschaltung gilt

$$I_{\text{ges}} = U G_{\text{ges}}. \quad (2.92)$$

Der *Koeffizientenvergleich* der Gln. (2.90) und (2.92) ergibt

$$G_{\text{ges}} = \sum_{\mu=1}^n G_{\mu}. \quad (2.93)$$

Bei einer Parallelschaltung von Widerständen addieren sich ihre Leitwerte zum Gesamtleitwert. Daraus folgt: Bei der Parallelschaltung mehrerer Leitwerte ist der Gesamtleitwert stets größer als der größte Einzelleitwert.

Die Parallelschaltung n gleicher Leitwerte G ergibt den Gesamtleitwert

$$G_{\text{ges}} = n G. \quad (2.94)$$

Mit Gl. (2.91) und Gl. (2.87) in Gl. (2.93) folgt für den Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung von n Widerständen R_{μ}

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{R_{\mu}} \quad (2.95)$$

beziehungsweise

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{\mu=1}^n \frac{1}{R_{\mu}}}. \quad (2.96)$$

Bei Verwendung der Kehrwert-Taste eines Taschenrechners ist die Auswertung von Gl. (2.96) besonders einfach: Die Kehrwerte der Widerstandswerte werden addiert und abschließend der Kehrwert der Summe gebildet.

Der Wert des Gesamtwiderstandes gemäß Gl. (2.96) wird mit jedem zusätzlich parallel geschalteten Widerstand kleiner, da der Nenner des Bruches vergrößert wird. Entsprechend der aus Gl. (2.93) abgeleiteten Folgerung ergibt sich: *Bei einer Parallelschaltung von Widerständen ist der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.*

Beispiel 2.21: Parallelschaltung von drei Widerständen

Die drei gemäß Bild 2.40a parallel geschalteten Widerstände $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ liegen an der Spannung $U = 6\ \text{V}$. Gesucht sind der Gesamtwiderstand R_{ges} und der Strom I_{ges} .

Mit Gl. (2.96) ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega}} = \frac{60}{11}\ \Omega = 5,45\ \Omega$$

und der Strom

$$I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{6\ \text{V}}{\frac{60}{11}\ \Omega} = 1,1\ \text{A}.$$

Für den häufig auftretenden Fall der *Parallelschaltung von zwei Widerständen* folgt mit $n = 2$ aus Gl. (2.95)

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}, \quad (2.97)$$

also

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.98)$$

Gl. (2.98) sollte man auswendig kennen, da sie sehr häufig benötigt wird. Als Merkhilfe dafür, das Pluszeichen und wo der Multiplikationspunkt hingehören, ist eine Dimensionsbetrachtung der beiden Seiten der Gleichung hilfreich.

Werden n Widerstände mit gleichem Widerstandswert R parallelgeschaltet, folgt aus Gl. (2.96)

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{n} R. \quad (2.99)$$

Oft wird die Parallelschaltung von Widerständen bei einem Rechenansatz mit einem senkrechten Doppelstrich symbolisiert, z. B. $R_1 \parallel R_2$, sprich „ R_1 parallel R_2 “. Ein solcher symbolischer Ausdruck wird nach Gl. (2.98) ausgewertet:

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.100)$$

Beispiel 2.22: Dimensionierung einer Parallelschaltung von Widerständen

Durch Parallelschalten von Widerständen der Norm-Reihe E 12 (Anhang A.8) mit einer Toleranz des Widerstandswertes von 5 % ist ein Widerstand mit dem Wert $R_{\text{ges}} = 20\ \Omega$ zu realisieren.

Da in Parallelschaltungen der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand ist, muss ein Widerstandswert aus der Norm-Reihe ausgewählt werden, dessen Wert größer als der benötigte Wert ist. Willkürlich wird der nächstliegende Wert $R_1 = 22\ \Omega$ verwendet.

Aus Gl. (2.97) folgt

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_1}},$$

was mit den gegebenen Zahlenwerten $R_2 = 220 \Omega$ ergibt. Dies ist zufällig ein Wert der E 12-Norm-Reihe. Anderenfalls würde man den am nächsten benachbarten Wert der Normreihe wählen.

2.2.3.2 Stromteilerregel

Bei der Parallelschaltung von Widerständen bzw. Leitwerten gemäß Bild 2.40a ist nach Gl. (2.88) der Strom in einem Zweig proportional zum Leitwert dieses Zweiges, da an allen Zweigen die selbe Spannung anliegt. Für zwei beliebige Zweigströme gilt also bei Verbraucher-Zählpfeilsystem an allen Widerständen

$$I_\mu = U G_\mu \quad (2.101)$$

und

$$I_\nu = U G_\nu. \quad (2.102)$$

Da bei einer Gleichung die Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens den gleichen Wert haben, folgt aus der Division der linken und rechten Seite der Gl. (2.101) durch die linke bzw. rechte Seite der Gl. (2.102) und Kürzen des Faktors U auf der rechten Seite sowie mit Gl. (2.87) die als *Stromteilerregel* bekannte Gleichung

$$\frac{I_\mu}{I_\nu} = \frac{G_\mu}{G_\nu} = \frac{R_\nu}{R_\mu}. \quad (2.103)$$

Bei einer Parallelschaltung von Widerständen verhalten sich die Zweigströme zueinander wie die zugehörigen Zweigleitwerte.

Einer der betrachteten Ströme darf auch der Gesamtstrom sein, d. h. für den Index μ oder den Index ν darf der Index „ges“ eingesetzt werden, z. B.

$$\frac{I_\mu}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_\mu}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_\mu} \quad (2.104)$$

mit G_{ges} nach Gl. (2.93) und R_{ges} nach Gl. (2.96).

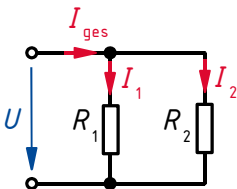


Bild 2.41: Parallelschaltung von zwei Widerständen

Für den in Bild 2.41 dargestellten, häufig auftretenden Spezialfall der *Parallelschaltung von zwei Widerständen* R_1 und R_2 gilt speziell

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_2}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_2}, \quad (2.105)$$

woraus mit Gl. (2.98) die häufig benötigten Gleichungen

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.106)$$

folgen.

Bei einer Parallelschaltung von zwei Widerständen verhält sich ein Teilstrom zum Gesamtstrom wie der Widerstand des anderen Zweiges zur Summe der Widerstände der Zweige. (Die Summe der Widerstände in den beiden parallelen Zweigen wird auch als „Ringwiderstand der Masche“ bezeichnet.)

Gl. (2.106) ist prinzipiell auch anwendbar, wenn eine Parallelschaltung mehrerer Widerstände vorliegt. Dazu werden gedanklich alle Widerstände außer dem im betrachteten Zweig zu einem resultierenden Widerstand, der den anderen Zweig bildet, zusammengefasst. Der Strom durch den betrachteten Zweig verhält sich zum Gesamtstrom wie der resultierende Widerstand der Parallelschaltung der Widerstände in den anderen Zweigen zur Summe aus dem Widerstand des betrachteten Zweiges und dem resultierenden Widerstand der anderen Zweige.

Bei allen Formen und Anwendungen der Stromteilerregel ist zu beachten, dass die oben angegebenen Gleichungen nur gelten, wenn die Stromzählpfeile in allen Zweigen bezüglich der gemeinsamen Spannung im Verbraucher-Zählpfeilsystem angetragen sind. Ströme mit umgekehrter Zählpfeilrichtung sind mit negativem Vorzeichen in die Gleichungen einzusetzen.

Beispiel 2.23: Stromaufteilung bei Parallelschaltung von drei Widerständen

Durch eine Parallelschaltung von drei Widerständen $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 40 \text{ k}\Omega$ entsprechend Bild 2.40a fließt der Strom $I_{\text{ges}} = 60 \text{ mA}$. Der Teilstrom I_1 ist zu berechnen.

Gl. (2.104) liefert unter Berücksichtigung der Gl. (2.93)

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} .$$

Mit Gl. (2.4) erhält man hieraus

$$I_1 = I_{\text{ges}} \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 60 \text{ mA} \frac{\frac{1}{10 \text{ k}\Omega}}{\frac{1}{10 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{40 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{40 \text{ k}\Omega}} = 40 \text{ mA} .$$

2.2.4 Reihenschaltung von Widerständen

2.2.4.1 Gesamtwiderstand

Werden n Widerstände R_μ gemäß Bild 2.42a in Reihe geschaltet, so fließt durch alle Widerstände der selbe Strom I .

Mit den in Bild 2.42a eingetragenen Zählpfeilen folgt aus dem Ohmschen Gesetz

$$U_1 = I R_1, \quad U_2 = I R_2, \quad \dots, \quad U_n = I R_n . \quad (2.107)$$

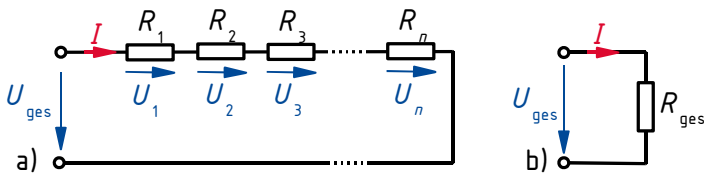


Bild 2.42: Reihenschaltung von Widerständen mit Zählpfeilen im VZS (a) und Ersatz-Zweipol (b)

Die Anwendung des Maschensatzes auf einen Umlauf, der die Einzelspannungen sowie die Gesamtspannung umfasst, liefert

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{\mu=1}^n U_{\mu}. \quad (2.108)$$

Aus Gl. (2.107) in Gl. (2.108) folgt

$$U_{\text{ges}} = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = I \sum_{\mu=1}^n R_{\mu}. \quad (2.109)$$

Das Klemmenverhalten der Schaltung in Bild 2.42a kann also nachgebildet werden durch die Ersatzschaltung in Bild 2.42b, die aus nur einem Widerstand R_{ges} besteht. Für die Ersatzschaltung gilt

$$U_{\text{ges}} = I R_{\text{ges}}. \quad (2.110)$$

Der Koeffizientenvergleich von Gl. (2.109) und Gl. (2.110) ergibt

$$R_{\text{ges}} = \sum_{\mu=1}^n R_{\mu}. \quad (2.111)$$

Bei einer Reihenschaltung von Widerständen addieren sich ihre Widerstandswerte zum Gesamtwiderstand.

Daraus folgt: Werden mehrere Widerstände in Reihe geschaltet, so ist der Gesamtwiderstand größer als der größte Einzelwiderstand.

Eine Reihenschaltung n gleicher Widerstände mit dem Wert R hat nach Gl. (2.111) den Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = n R. \quad (2.112)$$

Beispiel 2.24: Reihenschaltung von drei Widerständen

Eine Reihenschaltung der Widerstände $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ entsprechend Bild 2.42a liegt an der Spannung $U_{\text{ges}} = 6 \text{ V}$.

Gesucht sind der Gesamtwiderstand R_{ges} und der Strom I .

Mit Gl. (2.111) ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = 10 \Omega + 20 \Omega + 30 \Omega = 60 \Omega,$$

aus dem der Strom folgt:

$$I = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} = \frac{6 \text{ V}}{60 \Omega} = 0,1 \text{ A}.$$

2.2.4.2 Spannungsteilerregel

Bei der Reihenschaltung von Widerständen gemäß Bild 2.42a ist nach Gl. (2.107) die Spannung über einem Teilwiderstand proportional zu seinem Widerstandswert, da durch alle Widerstände der selbe Strom fließt. Für zwei beliebige Teilspannungen gilt also bei Verbraucher-Zählpeilsystem an allen Widerständen

$$U_{\mu} = I R_{\mu} \quad (2.113)$$

und

$$U_{\nu} = I R_{\nu}. \quad (2.114)$$

Aus Gl. (2.113) und Gl. (2.114) folgt entsprechend der Herleitung von Gl. (2.103) die als *Spannungsteilerregel* bekannte Gleichung

$$\frac{U_{\mu}}{U_{\nu}} = \frac{R_{\mu}}{R_{\nu}}. \quad (2.115)$$

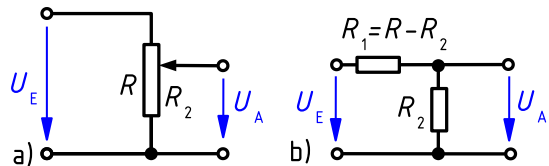
Bei einer Reihenschaltung von Widerständen verhalten sich die Teilspannungen zueinander wie die Werte der Widerstände, über denen sie abfallen.

Für den Index μ oder den Index ν in Gl. (2.115) darf der Index „ges“ eingesetzt werden, z. B.

$$\frac{U_{\mu}}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_{\mu}}{R_{\text{ges}}}. \quad (2.116)$$

Eine sehr verbreitete technische Anwendung von Gl. (2.116) ist der *einstellbare Spannungsteiler* unter Verwendung eines *Potenzimeters*, dessen Schaltung in Bild 2.43a dargestellt ist.

Bild 2.43: Unbelasteter Spannungsteiler mit einem Potenziometer (a) und Ersatzschaltung (b)



Ein Potenziometer ist ein *Dreipol*. Zwischen zwei seiner Klemmen liegt der Gesamtwiderstand R . Die dritte Klemme ist mit einem mechanisch verstellbaren *Schleifer* verbunden, der den Gesamtwiderstand elektrisch in zwei Teilwiderstände R_1 und R_2 mit

$$R = R_1 + R_2 \quad (2.117)$$

aufteilt. Wird eine Eingangsspannung an die beiden festen Anschlüsse des Potenziometers gelegt, so kann zwischen dem Schleifer und einem der festen Anschlüsse eine Ausgangsspannung abgegriffen werden, die durch Verändern der Schleiferstellung zwischen 0 und der Eingangsspannung einstellbar ist. Die Anwendung von Gl. (2.116) auf die Schaltung in Bild 2.43a liefert für den Fall, dass der Spannungsteiler *an seinem Ausgang unbelastet* ist, über seine Ausgangsklemmen also kein Strom fließt,

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{R_2}{R}. \quad (2.118)$$

Bild 2.43b zeigt das Ersatzschaltbild der Schaltung in Bild 2.43a. Ist der Widerstand R_2 in Bild 2.43a proportional zur mechanischen Schleiferstellung (Schiebeweg oder Drehwinkel, siehe [BSR06]), gilt also

$$R_2 = k R, \quad (2.119)$$

so hat das Potenziometer eine *lineare Stellkennlinie* und die Skala für den Wert k reicht von $k = 0$ bis $k = 1$. Gl. (2.117) ergibt mit Gl. (2.119)

$$R_1 = (1 - k) R. \quad (2.120)$$

Aus Gl. (2.118) folgt mit Gl. (2.119) für den unbelasteten Spannungsteiler

$$\frac{U_A}{U_E} = k. \quad (2.121)$$

Das Spannungsteilungsverhältnis kann beim unbelasteten Spannungsteiler also direkt von der Skala abgelesen werden.

Das elektrische Verhalten belasteter Spannungsteiler wird im folgenden Abschnitt behandelt.

2.2.5 Gemischte Schaltungen

Ein Zweipol, der aus einer Reihen- oder Parallelschaltung von Zweipolen besteht, die ihrerseits wiederum aus einer Parallel- oder Reihenschaltung von passiven Zweipolen bestehen, wird als „gemischte Schaltung“ bezeichnet. Zur Analyse dieser Zweipole reicht die Anwendung der Gesetze aus, die für Parallelschaltungen (Abschnitt 2.2.3) und Reihenschaltungen (Abschnitt 2.2.4) von Widerständen gelten. In diesem Abschnitt werden zwei gemischte Schaltungen behandelt, die besonders praxisrelevant sind: der belastete Spannungsteiler und dessen Verallgemeinerung, der mehrstufige Spannungsteiler.

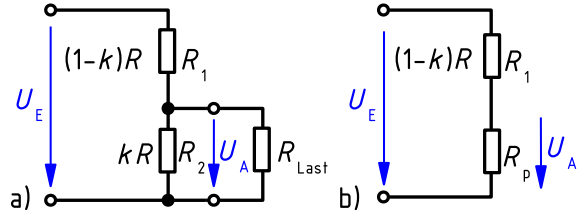
2.2.5.1 Belasteter Spannungsteiler

Betrachtet wird ein Spannungsteiler gemäß Bild 2.44a, der aus zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 besteht, die an der Eingangsspannung U_E liegen.

Diese beiden Widerstände können auch die Teilwiderstände $(1 - k) R$ und $k R$ eines Potenziometers mit dem Gesamtwiderstand R sein (Gln. (2.119) und (2.120) in Abschnitt 2.2.4.2).

An der über dem Widerstand R_2 abgegriffenen Ausgangsspannung U_A liegt der Lastwiderstand R_{Last} . Im Gegensatz zum unbelasteten Spannungsteiler (Abschnitt 2.2.4.2) fließt nun ein Strom durch die Ausgangsklemmen des Spannungsteilers. Die Ausgangsspannung U_A fällt nicht mehr

Bild 2.44: Belasteter Ohmscher Spannungsteiler (a) und Ersatzschaltbild (b)



über dem Widerstand R_2 ab, sondern über der Parallelschaltung aus R_2 und R_{Last} , die zu dem Ersatz-Widerstand R_P mit

$$R_P = \frac{R_{\text{Last}} \cdot R_2}{R_{\text{Last}} + R_2} \quad (2.122)$$

zusammengefasst wird. Damit ergibt sich das in Bild 2.44b dargestellte Ersatzschaltbild des belasteten Spannungsteilers. Mittels dieses Ersatzschaltbildes lässt sich unter Verwendung der Gl. (2.116) das Spannungsteilungsverhältnis des belasteten Spannungsteilers berechnen:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{R_P}{R_P + R_1} = \frac{\frac{R_{\text{Last}} R_2}{R_{\text{Last}} + R_2}}{\frac{R_{\text{Last}} R_2}{R_{\text{Last}} + R_2} + R_1} = \frac{R_{\text{Last}} R_2}{R_{\text{Last}} R_2 + R_{\text{Last}} R_1 + R_2 R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_{\text{Last}}}} \quad (2.123)$$

Für $R_{\text{Last}} \rightarrow \infty$ (keine Belastung des Spannungsteilers) geht Gl. (2.123) in Gl. (2.118) über. Für $R_{\text{Last}} \rightarrow 0$ (hohe Belastung des Spannungsteilers) bricht die Ausgangsspannung gegenüber dem Fall des unbelasteten Spannungsteilers ein. Dieser Sachverhalt lässt sich besser untersuchen, wenn man die Gln. (2.119) und (2.120) in Gl. (2.123) einsetzt, so dass das Spannungsteilungsverhältnis nur noch vom Widerstandsverhältnis k und dem Verhältnis R/R_{Last} abhängig ist:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{1 + (1-k)k \frac{R}{R_{\text{Last}}}} = \frac{1}{\frac{1}{k} + (1-k) \frac{R}{R_{\text{Last}}}} \quad (2.124)$$

Die Funktion (2.124) ist – im Gegensatz zur Funktion (2.121) – bzgl. des Widerstandsverhältnisses k nichtlinear.

Bild 2.45 zeigt das Spannungsteilungsverhältnis belasteter Spannungsteiler als Funktion des Widerstandsverhältnisses k für fünf verschiedene Werte von R_{Last} . Da der Wert von R_{Last} bezogen auf R angegeben wird, ist diese Darstellung allgemeingültig.

Aus Bild 2.45 geht hervor, dass bei einem Potenziometer, das auch unter Last noch eine näherungsweise lineare Abhängigkeit der Ausgangsspannung von der Schleiferstellung aufweisen soll, der Widerstand des Potenziometers bei etwa 10 % des Lastwiderstandes liegen muss. Eine solche Schaltung belastet die speisende Spannungsquelle stark und ist wegen der hohen Verluste im Potenziometer mit einem geringen Wirkungsgrad verbunden.

2.2.5.2 Mehrstufiger Spannungsteiler

Ein mehrstufiger Spannungsteiler ist eine *Kettenschaltung* aus mindestens zwei Spannungsteilern. Hier wird eine Schaltung gemäß Bild 2.46 betrachtet, die aus Ohmschen Widerständen besteht. Die $R_{\mu 1}$ werden als *Längswiderstände*, die $R_{\mu 2}$ als *Querwiderstände* bezeichnet.

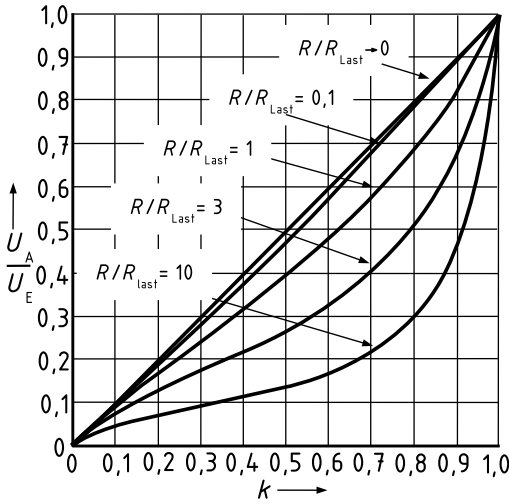


Bild 2.45: Spannungsteilungsverhältnis belasteter Ohmscher Spannungsteiler als Funktion des Widerstandsverhältnisses k für verschiedene Werte des Parameters R/R_{Last}

Die Berechnung des Spannungsteilungsverhältnisses mehrstufiger Spannungsteiler ist über die Querspannungen zwischen den einzelnen Teilerstufen einfach möglich, denn es gilt – mathematisch offensichtlich – die Gleichung

$$\frac{U_{n+1}}{U_1} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \cdot \frac{U_n}{U_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} \quad (2.125)$$

Jeder der Quotienten auf der rechten Seite von Gl. (2.125) stellt ein Spannungsteilungsverhältnis dar, das über den *Gesamt-Querwiderstand am Ausgang der zugehörigen Stufe* und den *Längswiderstand dieser Stufe* ausgedrückt werden kann. *Die Ausgangsspannung der vorhergehenden Stufe wird dabei jeweils als bekannt angenommen. Widerstände vorhergehender Stufen gehen daher nicht mit ein!* Auf diese Weise lässt sich *schrittweise vom Ausgang der Schaltung zurück zum Eingang* das Spannungsteilungsverhältnis aufstellen.

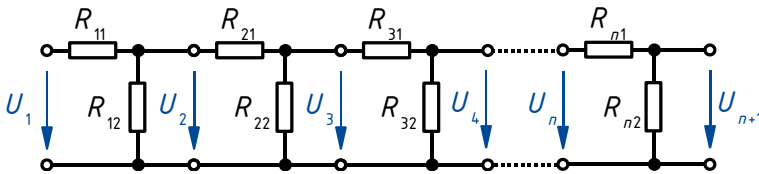


Bild 2.46: Prinzipschaltung eines n -stufigen Spannungsteilers

Die Schaltung in Bild 2.46 kann auch als *mehrstufiger Stromteiler* verwendet werden, wenn als Eingangsgröße nicht die Eingangsspannung, sondern der Eingangsstrom betrachtet wird. Dann ist auf jeden Knoten der Schaltung (vom Eingang der Schaltung zum Ausgang fortschreitend) die *Stromteilerregel* (2.106) anzuwenden. Die hierbei entstehenden Ausdrücke können bei Kettenschaltungen mit vielen Gliedern sehr umfangreich werden.

Beispiel 2.25: Zweistufiger Spannungsteiler

Die Ausgangsspannung U_A des zweistufigen Spannungsteilers gemäß Bild 2.47a ist als Funktion der Eingangsspannung U_E und der gegebenen Widerstandswerte zu berechnen. Bild 2.47b zeigt die Schaltung aus Bild 2.47a mit hervorgehobener Kettenstruktur.

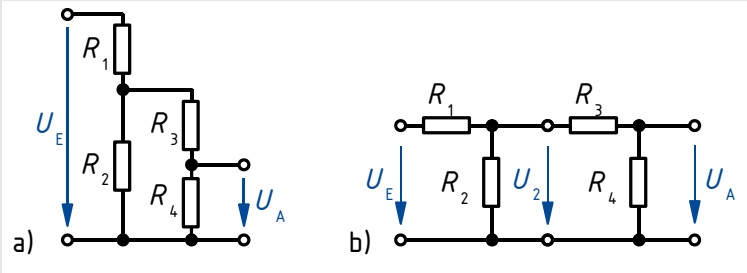


Bild 2.47: Zweistufiger Spannungsteiler in Darstellung entsprechend Bild 2.44 (a) und als Kettenschaltung (b)

Gl. (2.125) liefert den Ansatz

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{U_A}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_E}.$$

Zunächst wird die Querspannung U_2 vor der letzten Stufe als bekannt angenommen. Damit folgt aus der Spannungsteilerregel Gl. (2.116)

$$\frac{U_A}{U_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Die Widerstände vor dieser Stufe (R_1, R_2) haben keinen Einfluss auf das betrachtete Spannungsteilungsverhältnis! Nun muss die als bekannt angenommene Querspannung U_2 zurückgeführt werden auf die nächste, näher am Eingang der Schaltung gelegene Querspannung. Hier ist das schon die Eingangsspannung U_E . Nun folgt aus Gl. (2.116) in symbolischer Schreibweise

$$\frac{U_2}{U_E} = \frac{R_2 \parallel (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4)}.$$

Die Multiplikation der Teil-Spannungsteilungsverhältnisse ergibt das Gesamt-Spannungsteilungsverhältnis, aus dem die Ausgangsspannung berechenbar ist, hier also

$$U_A = U_E \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_2 \parallel (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4)}.$$

Dieses Zwischenergebnis ist unter Verwendung von Gl. (2.100) weiter auszuwerten.

2.2.6 Brückenschaltungen

Die Berechnung von Brückenschaltungen ist mit den grundlegenden Regeln zur Berechnung gemischter Schaltungen (Abschnitt 2.2.5) nicht möglich, da sie weder auf eine Reihen- noch auf eine Parallelschaltung zurückgeführt werden können. Sie sind allerdings durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze (Abschnitt 2.2.2) analysierbar.

Brückenschaltungen spielen in der Messtechnik eine große Rolle (z. B. [Ber96], [FU84], [Gie94], [HH93], [Müh08]), insbesondere als Wechselstrom-Brückenschaltungen, für welche die in diesem Abschnitt enthaltenen Aussagen und Gleichungen – in mathematisch erweiterter Form – ebenfalls gelten.

2.2.6.1 Struktur

Eine Brückenschaltung besteht stets aus *zwei parallelen Zweigen* aus jeweils mindestens zwei passiven Zweipolen und *einem Querzweig*, der häufig durch einen Spannungsmesser gebildet wird. Bild 2.48 zeigt eine Brückenschaltung aus fünf Widerständen, bei der der Querzweig durch R_5 gebildet wird.

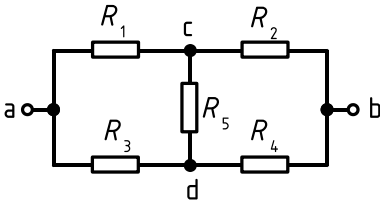


Bild 2.48: Struktur einer Brückenschaltung

2.2.6.2 Abgleichbedingung

Eine Brückenschaltung nach Bild 2.49 ist *abgeglichen*, wenn die Spannung über ihrem Querzweig null ist, die Knoten c und d also auf dem gleichen Potenzial liegen.

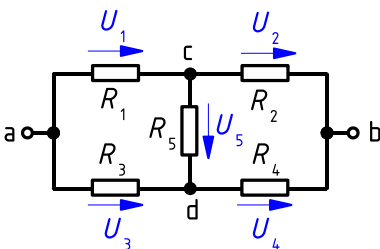


Bild 2.49: Spannungen in einer Brückenschaltung

Das ist genau dann der Fall, wenn eine zwischen den Knoten a und b angelegte Spannung durch die aus R_1 und R_2 bzw. R_3 und R_4 gebildeten Spannungsteiler im gleichen Verhältnis aufgeteilt wird, also

$$U_1 : U_2 = U_3 : U_4 \quad (2.126)$$

gilt. Wegen

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4 \quad (2.127)$$

muss dann

$$U_1 = U_3 \quad (2.128)$$

gelten, woraus

$$U_1 - U_3 = U_5 = 0 \quad (2.129)$$

folgt. Die in Gl. (2.126) mittels der *Teilspannungen* formulierte *Abgleichbedingung* wird von der in Bild 2.49 dargestellten Brückenschaltung erfüllt, wenn die mittels der *Widerstände* in den beiden parallelen Zweigen formulierte *Abgleichbedingung*

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4 \quad (2.130)$$

erfüllt ist.

2.2.7 Sternschaltungen, Dreieckschaltungen

Eine *Sternschaltung* besteht aus mindestens drei Zweipolen, die jeweils mit einer ihrer Klemmen mit einem gemeinsamen Schaltungsknoten, dem *Sternpunkt* (vgl. Bild 2.52) verbunden sind. Hier werden nur Sternschaltungen aus *genau drei passiven Zweipolen*, nämlich Ohmschen Widerständen, betrachtet.

Eine *Polygonschaltung* (auch *Ringschaltung* genannt) besteht aus mindestens drei Zweipolen mit von außen zugänglichen Anschlüssen (vgl. Bild 2.51), die in Reihe geschaltet sind und genau eine Masche bilden. Eine *Dreieckschaltung* ist der einfachste Fall einer Polygonschaltung. Hier werden nur Dreieckschaltungen aus *passiven Zweipolen*, nämlich Ohmschen Widerständen, betrachtet.

Bei der Behandlung der Mehrphasensysteme (Abschnitt 8) spielen Stern- und Polygonschaltungen, die entweder nur aus aktiven oder nur aus passiven Zweipolen bestehen, eine überragende Rolle.

2.2.7.1 Struktur

Der Widerstand zwischen den Klemmen a und b der Zweipole in Bild 2.50 ist mit den Regeln für die Berechnung des resultierenden Widerstandes von Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen nicht bestimmbar.

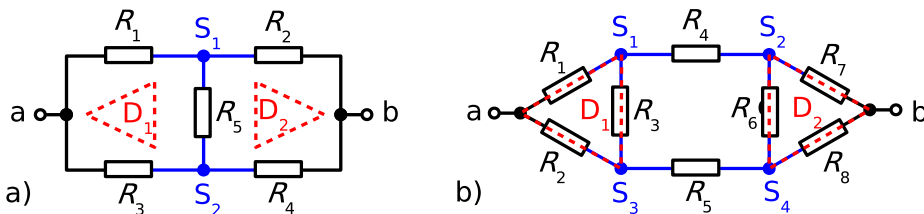


Bild 2.50: Ohmsche Zweipole, die Stern- und Dreieckschaltungen enthalten

Beide Schaltungen in Bild 2.50 enthalten *Sternschaltungen* (blau, Sternpunkte bezeichnet mit S_μ) und *Dreieckschaltungen* (rot, bezeichnet mit D_ν) Ohmscher Widerstände.

Nicht nur Dreieckschaltungen gemäß Bild 2.51, sondern auch Sternschaltungen gemäß Bild 2.52 werden hier als *Dreipole* betrachtet; der Sternpunkt der Sternschaltungen sei also von außen *nicht* zugänglich.

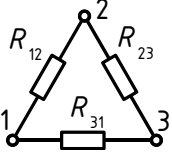


Bild 2.51: Dreieckschaltung aus Widerständen

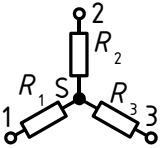


Bild 2.52: Sternschaltung aus drei Widerständen

Zu jeder dreipoligen Sternschaltung gibt es eine *bezüglich des Klemmenverhaltens äquivalente* Dreieckschaltung und umgekehrt. Das heißt: Werden an einander entsprechende Klemmenpaare der beiden äquivalenten Schaltungen gleiche Spannungen gelegt, so fließen über einander entsprechende Klemmen gleiche Ströme. Diese Aussage gilt über den hier betrachteten Fall (alle enthaltenen Zweipole sind Ohmsche Widerstände) hinaus auch, wenn die enthaltenen Zweipole beliebige lineare, passive Zweipole sind (Abschnitt 6). Eine weitere, eingeschränkte Verallgemeinerung ist möglich für lineare, passive Netzwerke, die mehr als drei Klemmen haben [FV82].

2.2.7.2 Dreieck-Stern-Transformation

Aus dem oben genannten gleichen Klemmenverhalten äquivalenter Stern- und Dreieckschaltungen folgt, dass der Widerstand zwischen einander entsprechenden Klemmenpaaren der Schaltungen in den Bildern 2.51 und 2.52 gleich sein muss. In Tabelle 2.4 sind die einander entsprechenden Widerstände zwischen zwei Klemmen zeilenweise einander gegenübergestellt.

Tabelle 2.4: Widerstände zwischen Klemmenpaaren bei Stern- und Dreieckschaltung

Klemmenpaar	Widerstand der Sternschaltung	Widerstand der Dreieckschaltung
1 – 2	$R_1 + R_2$	$R_{12} \parallel (R_{23} + R_{31})$ (2.131)
2 – 3	$R_2 + R_3$	$R_{23} \parallel (R_{12} + R_{31})$ (2.132)
3 – 1	$R_3 + R_1$	$R_{31} \parallel (R_{12} + R_{23})$ (2.133)

Die drei Zeilen von Tabelle 2.4 entsprechen somit drei Gleichungen. Addiert man zwei dieser Gleichungen und subtrahiert die dritte, so erhält man Bestimmungsgleichungen für die Widerstände der Sternschaltung:

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (2.134)$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}, \quad (2.135)$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{31} + R_{12} + R_{23}}. \quad (2.136)$$

Die Nenner der drei Gleichungen sind identisch. Durch Vergleich mit den Bildern 2.51 und 2.52 erkennt man die einprägsame Merkregel:

$$\text{Sternwiderstand} = \frac{\text{Produkt der am Knoten liegenden Dreieckswiderstände}}{\text{Summe aller Dreieckswiderstände}}$$

Durch Kehrwertbildung von Gl. (2.134) erhält man

$$G_1 = \frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12} R_{31}} = \frac{1}{R_{31}} + \frac{R_{23}}{R_{12} R_{31}} + \frac{1}{R_{12}} = G_{31} + G_{12} + \frac{G_{31} G_{12}}{G_{23}} \quad (2.137)$$

und entsprechend aus Gl. (2.135) bzw. Gl. (2.136)

$$G_2 = G_{12} + G_{23} + \frac{G_{12} G_{23}}{G_{31}}, \quad (2.138)$$

$$G_3 = G_{23} + G_{31} + \frac{G_{23} G_{31}}{G_{12}}. \quad (2.139)$$

Aufgrund der systematischen Bezeichnung der Widerstände in den Bildern 2.51 und 2.52 lassen sich die Gln. (2.134) bis (2.136) und die Gln. (2.137) bis (2.139) durch *zyklisches Vertauschen* aller Indizes ($1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 3$; $3 \rightarrow 1$) ineinander überführen.

2.2.7.3 Stern-Dreieck-Transformation

Die Umrechnung einer gegebenen Sternschaltung nach Bild 2.52 in eine äquivalente Dreieckschaltung gemäß Bild 2.51 ist ebenfalls einfach möglich. Löst man Gl. (2.134) nach R_{12} auf und setzt in die resultierende Gleichung die Quotienten aus den Gln. (2.135) und (2.136) sowie aus den Gln. (2.135) und (2.134) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (2.140)$$

und entsprechend

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \quad (2.141)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \quad (2.142)$$

Die Gln. (2.140) bis (2.142) entsprechen strukturell den Gln. (2.137) bis (2.139). Durch Bilden der Kehrwerte der Gln. (2.140) bis (2.142) erhält man die Gleichungen für die Leitwerte der Dreieckschaltung:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (2.143)$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3 + G_1}, \quad (2.144)$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_3 + G_1 + G_2}, \quad (2.145)$$

die strukturell den Gln. (2.134) bis (2.136) entsprechen. Es gilt die Merkregel:

$$\text{Dreieckleitwert} = \frac{\text{Produkt der zwischen den Knoten liegenden Sternleitwerte}}{\text{Summe aller Sternleitwerte}}$$

Haben alle Widerstände einer Sternschaltung den selben Wert, d. h.

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_\lambda, \quad (2.146)$$

so müssen alle Widerstände einer äquivalenten Dreieckschaltung ebenfalls den selben Wert haben, d. h.

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta, \quad (2.147)$$

nämlich nach Gl. (2.140) bis (2.142)

$$R_\Delta = 3R_\lambda. \quad (2.148)$$

Beispiel 2.26: Widerstand eines Zweipols aus Stern- und Dreieckschaltungen

Die Schaltung in Bild 2.53 enthält die Widerstände $R_1 = R_2 = R_3 = 90 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$, $R_6 = 60 \Omega$, $R_7 = 10 \Omega$. Der Widerstand R zwischen den Klemmen a und b soll berechnet werden.

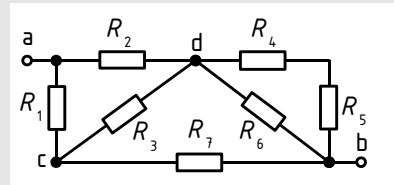


Bild 2.53: Zweipol mit Stern- und Dreieckschaltungen

Die Widerstände R_4 , R_5 und R_6 zwischen den Knoten d und b werden nach Gl. (2.111) und (2.96) zusammengefasst zu dem Ersatz-Widerstand

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4 + R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{60 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega + 40 \Omega}} = 30 \Omega.$$

Nun ist eine Brückenschaltung mit Struktur entsprechend Bild 2.50a erkennbar.

Der Zweipol enthält zwei Sternschaltungen mit den Sternpunkten c und d sowie zwei Dreieckschaltungen zwischen den Knoten a, c, d sowie c, d, b. Die Dreieckschaltung zwischen den Knoten a, c und d in Bild 2.53 wird in eine äquivalente Sternschaltung umgeformt, deren Widerstände nach Gl. (2.148)

$$R_\lambda = R_\Delta/3 = 90 \Omega/3 = 30 \Omega$$

betragen. Damit ergibt sich die Ersatzschaltung in Bild 2.54, deren Klemmenwiderstand nach den Regeln für gemischte Schaltungen berechenbar ist. (Ebenso wäre es möglich gewesen, das Dreieck zwischen den Knoten c, d und b in eine Sternschaltung umzuwandeln.)

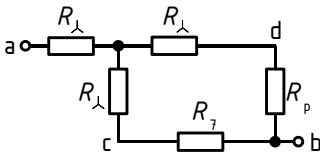


Bild 2.54: Netzwerk aus Bild 2.53 nach Dreieck-Stern-Transformation

Somit beträgt der Gesamtwiderstand zwischen den Klemmen a und b

$$R = R_\lambda + \frac{1}{\frac{1}{R_\lambda + R_p} + \frac{1}{R_\lambda + R_7}} = 30 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{30 \Omega + 30 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega + 10 \Omega}} = 54 \Omega.$$

Beispiel 2.27: Widerstand einer Brückenschaltung

Die Brückenschaltung in Bild 2.55a besteht aus den Widerständen $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$, $R_6 = 5 \Omega$ und liegt an der Quellenspannung $U_q = 6 \text{ V}$. Wie groß ist der Strom I_1 ?

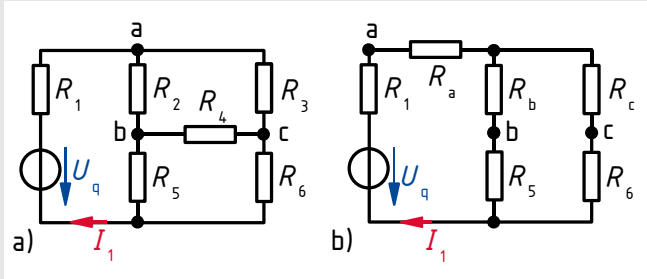


Bild 2.55: Brückenschaltung original (a) und nach Umformung (b)

Die Dreieckschaltung zwischen den Punkten a, b und c wird, wie in Bild 2.55b dargestellt, in eine äquivalente Sternschaltung umgewandelt. Mit den Gln. (2.134) bis (2.136) erhält man die Widerstände

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4 \Omega \cdot 6 \Omega}{4 \Omega + 6 \Omega + 10 \Omega} = 1,2 \Omega,$$

$$R_b = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4 \Omega \cdot 10 \Omega}{4 \Omega + 6 \Omega + 10 \Omega} = 2 \Omega,$$

$$R_c = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{6 \Omega \cdot 10 \Omega}{4 \Omega + 6 \Omega + 10 \Omega} = 3 \Omega.$$

Mit den Gln. (2.111) und (2.98) folgt der Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_a + \frac{(R_b + R_5)(R_c + R_6)}{R_b + R_5 + R_c + R_6} = 6 \Omega + 1,2 \Omega + \frac{(2 \Omega + 10 \Omega)(3 \Omega + 5 \Omega)}{2 \Omega + 10 \Omega + 3 \Omega + 5 \Omega} = 12 \Omega$$

und der Strom

$$I_1 = U_q / R_{\text{ges}} = 6 \text{ V} / (12 \Omega) = 0,5 \text{ A}.$$

2.3 Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung

In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe der Messung von Strömen, Spannungen und Leistungen behandelt. Er soll und kann eine Einführung in die elektrische Messtechnik jedoch nicht ersetzen.

Vor der Durchführung und Auswertung von Messungen sollten die grundlegenden Unterschiede zwischen *Genauigkeit* und *Auflösung*, *systematischer* und *zufälliger* Abweichung sowie *relativer* und *absoluter Abweichung* bekannt sein. Hierzu sei auf die umfangreiche Literatur zu diesem Gebiet verwiesen, z. B. [Ber96], [FU84].

2.3.1 Ideale und reale Strommesser

Ein Gerät zum Messen des Stroms, der durch einen Zweig fließt, wird als *Strommesser* oder *Amperemeter* bezeichnet.

Das direkte Messen eines Stroms erfordert immer das *Auftrennen* einer elektrischen Verbindung an der Stelle, an der das Amperemeter in den Stromkreis eingeschaltet wird, siehe Bild 2.56a.

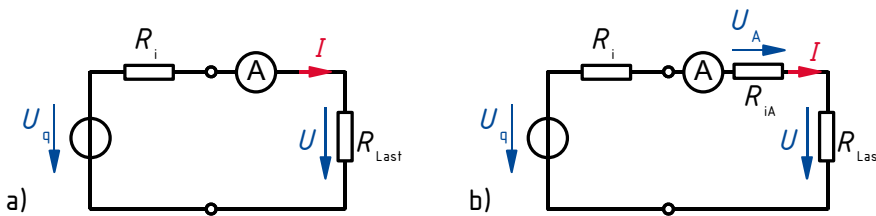


Bild 2.56: Stromkreis mit Amperemeter: Schaltung (a) und Ersatzschaltbild (b)

Das in Schaltplänen verwendete Schaltzeichen eines Amperemeters ist ein Kreis mit dem Buchstaben A, dem Zeichen der Einheit für den elektrischen Strom.

Ein Amperemeter zeigt einen positiven Messwert an, wenn der Strom innerhalb des Messgerätes von dessen positivem Anschluss (oft mit „+“ bezeichnet) zum negativen Anschluss (oft mit „-“ oder „⊥“ oder „COM“ bezeichnet) fließt.

Damit ein Amperemeter den zu messenden Strom nicht beeinflusst, muss sein *Innenwiderstand* R_{iA} vernachlässigbar klein sein. Das Modell des *idealen Amperemeters* hat den Innenwiderstand $R_{iA} = 0$. Ein solches Amperemeter ist nicht realisierbar.

Reale Amperemeter haben je nach Messbereich Widerstände, die in der Regel im Bereich von einigen $m\Omega$ bis zu einigen $k\Omega$ liegen und somit vom Verhalten eines idealen Amperemeters deutlich abweichen. Ein *reales Amperemeter* wird in einem *Ersatzschaltbild* durch die *Reihenschaltung* aus einem idealen Amperemeter und einem Widerstand R_{iA} nachgebildet, siehe Bild 2.56b. (Teilweise wird der Wert des Innenwiderstandes auch direkt an das Schaltzeichen des Amperemeters geschrieben.) Das Ersatzschaltbild zeigt, dass das reale Amperemeter zwar den Strom durch den Widerstand R_{Last} anzeigt, dieser Strom aber wegen des in Reihe geschalteten Widerstandes R_{iA} kleiner ist als der Strom, der ohne Amperemeter durch den Widerstand fließen würde. Die Messung hat also eine verfälschende *Rückwirkung* auf das Messobjekt.

2.3.2 Ideale und reale Spannungsmesser

Ein Gerät zum Messen der elektrischen Spannung zwischen zwei Punkten einer Schaltung wird als *Spannungsmesser* oder *Voltmeter* bezeichnet.

Zur Spannungsmessung werden die beiden Anschlüsse des Voltmeters mit den betreffenden Punkten verbunden. Ein Auftrennen des Stromkreises ist nicht erforderlich, siehe Bild 2.57a.

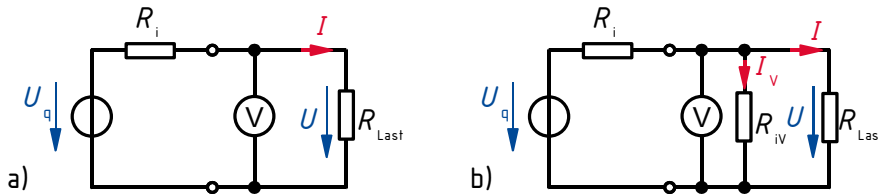


Bild 2.57: Stromkreis mit Voltmeter: Schaltung (a) und Ersatzschaltbild (b)

Das Schaltzeichen eines Voltmeters ist ein Kreis mit dem Buchstaben V.

Ein Voltmeter zeigt einen positiven Messwert an, wenn das elektrische Potenzial an seinem positiven Anschluss höher als am negativen Anschluss ist.

Damit ein Voltmeter die Schaltung, in die es eingebracht wurde, nicht beeinflusst, darf es keinen zusätzlichen Stromfluss bewirken. Sein *Innenwiderstand* R_{iV} muss also möglichst groß sein. Das Modell des *idealen Voltmeters* hat den Innenwiderstand $R_{iV} \rightarrow \infty$. Elektronische Voltmeter mit messbereichsunabhängigen Innenwiderständen von über 10 M Ω sind sehr preiswert realisierbar.

Ein *reales Voltmeter* wird in einem *Ersatzschaltbild* durch die *Parallelschaltung* aus einem idealen Voltmeter und einem Widerstand R_{iV} nachgebildet, siehe Bild 2.57b. (Teilweise wird der Wert des Innenwiderstandes auch direkt an das Schaltzeichen des Voltmeters geschrieben.) Das Ersatzschaltbild zeigt, dass das reale Voltmeter die tatsächlich über dem Widerstand R_{Last} abfallende Spannung anzeigt. Diese Spannung ist jedoch kleiner als die Spannung, die ohne Voltmeter an R_{Last} liegt, da der Strom durch den Innenwiderstand des Voltmeters einen zusätzlichen Spannungsabfall über dem Innenwiderstand der Quelle verursacht. Also ist eine solche Spannungsmessung prinzipiell nicht rückwirkungsfrei.

Bei *Zeigerinstrumenten* ohne eingebaute elektronische Verstärker unterscheiden sich die Innenwiderstände der einzelnen Strom- und Spannungsmessbereiche deutlich voneinander. Daher ändert sich beim Umschalten des Messbereiches auch die Rückwirkung des Messgerätes auf das Messobjekt. Dies macht sich evtl. durch Sprünge in aufgenommenen Messwertreihen bemerkbar.

2.3.3 Indirekte Strommessung

Da insbesondere hochwertige elektronische Voltmeter hinsichtlich ihres Innenwiderstandes ein nahezu ideales Verhalten aufweisen, empfiehlt sich zur Messung des Stroms durch einen in der Schaltung ohnehin vorhandenen Ohmschen Widerstand die indirekte Strommessung. Dabei wird der Spannungsabfall gemessen, den der unbekannte Strom über dem bekannten Widerstand hervorruft und aus dem Ohmschen Gesetz der fließende Strom berechnet. Dieses Verfahren hat neben einer geringen Rückwirkung auch den Vorteil, dass der Stromkreis zur Messung nicht aufgetrennt zu werden braucht.

2.3.4 Stromrichtiges und spannungsrichtiges Messen

Sollen die Klemmengrößen eines Zweipols *gemeinsam* gemessen werden, gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten, die beiden benötigten Messgeräte für eine solche *Kombinationsmessung* in die Schaltung einzubringen.

Bild 2.58 zeigt die Schaltung für das stromrichtige Messen der Klemmengrößen eines Widerstandes R_{Last} .

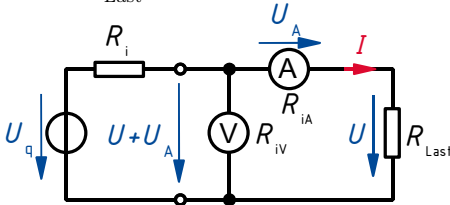


Bild 2.58: Schaltung für stromrichtiges Messen

Bei der stromrichtigen Messung zeigt das Amperemeter den tatsächlich durch den Lastwiderstand fließenden Strom an. Das Voltmeter zeigt jedoch die Spannung an, die über R_{Last} und R_{iA} zusammen abfällt, also nicht die gesuchte Spannung über dem Lastwiderstand. Eine stromrichtige Messschaltung empfiehlt sich, wenn

$$R_{iA} \ll R_{\text{Last}} \tag{2.149}$$

gilt.

Die Schaltung für spannungsrichtiges Messen ist in Bild 2.59 dargestellt. Nun zeigt das Voltmeter die Klemmenspannung am Lastwiderstand, das Amperemeter jedoch einen zu hohen Wert an, nämlich den Gesamtstrom durch die Parallelschaltung aus R_{Last} und R_{iV} , an. Diese Messschaltung sollte eingesetzt werden, wenn

$$R_{iV} \gg R_{\text{Last}} \tag{2.150}$$

gilt. Ob in einem bestimmten Fall die strom- oder die spannungsrichtige Messung einen kleineren Fehler verursacht, ist durch Vergleich der Bedingungen (2.149) und (2.150) zu überprüfen.

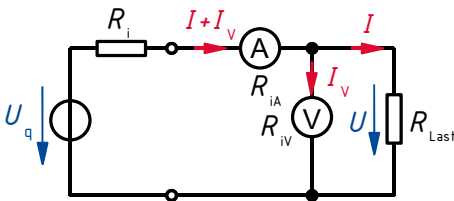


Bild 2.59: Schaltung für spannungsrichtiges Messen

In Grenzfällen sollte die spannungsrichtige Messung verwendet werden, sofern

$$\sqrt{R_{iA} R_{iV}} > R_{\text{Last}} \tag{2.151}$$

erfüllt ist, ansonsten die stromrichtige Messung.

2.3.5 Leistungsmessung

Die Messung der in einem Zweipol umgesetzten Leistung kann bei Gleichstromnetzwerken mittels getrennter Messung der Klemmengrößen und anschließender Multiplikation der Messwerte erfolgen.

Alternativ kann ein *Leistungsmesser*, auch *Wattmeter* genannt, verwendet werden. Ein Wattmeter ist ein Vierpol und besteht aus einem möglichst niederohmigen Strompfad mit zwei Anschlüssen sowie einem möglichst hochohmigen Spannungspfad mit zwei Anschlüssen. (Da der Potenzialunterschied zwischen den zum Strompfad und den zum Spannungspfad gehörenden Komponenten eines Wattmeters nicht beliebig groß werden darf, werden in der Regel eine Klemme des Strompfades und eine Klemme des Spannungspfades zusammengeschaltet.) Auf elektromagnetischem oder elektronischem Weg wird das Produkt aus Strom durch den Strompfad und Spannung über dem Spannungspfad gebildet und angezeigt. Bei Zeigerinstrumenten erfolgt durch die mechanische Trägheit des Messwerks zusätzlich eine zeitliche Mittelwertbildung.

Bezüglich der Anschaltung der beiden Klemmenpaare des Wattmeters an den betrachteten Zweipol ist entsprechend Abschnitt 2.3.4 wieder zwischen der strom- und der spannungsrichtigen Messung zu unterscheiden, siehe Bild 2.60a bzw. 2.60b.

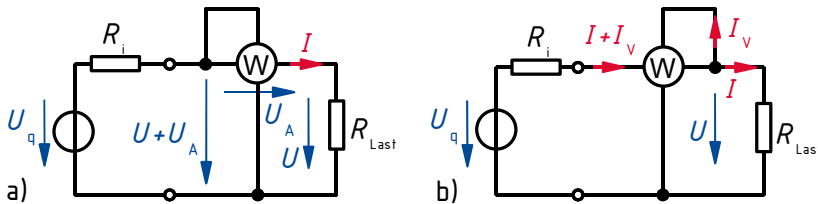


Bild 2.60: Leistungsmessung: stromrichtig (a) bzw. spannungsrichtig (b)

Bei Wattmetern führt wie bei Volt- und Amperemetern die Vertauschung der Klemmen des Spannungs- oder des Strompfades zu einer Vorzeichenumkehr der Anzeige.

Der große Vorteil der Leistungsmessung mit einem Wattmeter statt mit getrennten Volt- und Amperemetern wird erst in der Wechselstromtechnik deutlich (Abschnitt 5.11.4).

2.3.6 Kompensationsmessverfahren

Das oben behandelte Verfahren zur Spannungsmessung ist nicht anwendbar, wenn der unvermeidliche Strom durch den Innenwiderstand R_{iV} des Voltmeters zu unannehmbaren Fehlern führt. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Leerlaufspannung einer Spannungsquelle mit sehr großem Innenwiderstand R_i gemessen werden soll, also für $R_i \gg R_{iV}$.

In einem solchen Fall sollte ein *Kompensationsmessverfahren* eingesetzt werden. Hierfür ist eine Schaltung erforderlich, die eine genau einstellbare Spannung erzeugt. Diese Spannung wird *gegen* die zu messende Spannung geschaltet. Sind die einstellbare bekannte und die unbekannte Spannung gleich groß, fließt in der durch die beiden Quellen gebildeten Masche kein Strom. Dies kann durch ein Amperemeter nachgewiesen werden. (Die bei *Nullverfahren* eingesetzten hochempfindlichen Nullindikatoren für den Strom werden als *Galvanometer* bezeichnet.) In

abgeglichenem Zustand fließt durch das Messobjekt kein Strom und seine Klemmenspannung ist somit gleich der gesuchten Leerlaufspannung.

Beispiel 2.28: Spannungsmessung mittels Kompensationsschaltung

Mit Hilfe der Kompensationsschaltung in Bild 2.61 soll die Quellenspannung U_q der im unteren Zweig befindlichen Quelle bestimmt werden. Die Versorgungsspannung U_1 sei bekannt.

Durch Verschieben des Abgriffs wird das Potenziometer so eingestellt, dass das Galvanometer keinen Ausschlag mehr zeigt, d. h. dass der Strom $I = 0$ wird.

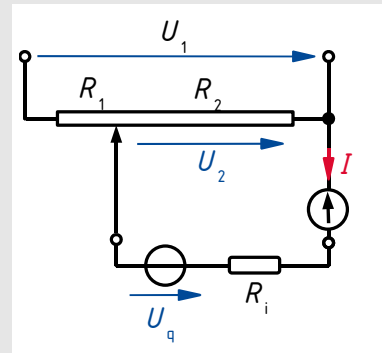


Bild 2.61: Kompensationsschaltung zur Spannungsmessung

Wegen $I = 0$ tritt in der unteren Masche weder am Galvanometer noch am Innenwiderstand R_i der auszumessenden Quelle eine Spannung auf. Die Maschengleichung (2.84) reduziert sich für diese Masche damit auf $U_2 - U_q = 0$. Andererseits ist wegen $I = 0$ der aus den beiden Teilwiderständen R_1 und R_2 des Potenziometers gebildete Spannungsteiler unbelastet. Aus der Spannungsteilerregel folgt

$$U_q = U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1.$$

Man könnte also bei konstantem U_1 aus der Position des Abgriffs direkt den Wert der gesuchten Quellenspannung ablesen, vgl. Gln. (2.117) bis (2.121).

2.4 Analyse linearer Gleichstromnetzwerke

Thema dieses Abschnitts sind Verfahren zur Berechnung beliebig komplizierter linearer Gleichstromnetzwerke. Bei allen Netzwerken wird vorausgesetzt, dass sie *zusammenhängend* sind, es also mindestens eine elektrisch leitende (galvanische) Verbindung zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerks gibt. Die Abarbeitung der Verfahren kann rein schematisch erfolgen. Damit eignen sie sich sehr gut zur Umsetzung in Software. Schon mit Grundkenntnissen in der Softwareentwicklung ist es möglich, ein Programm zu schreiben, das lineare Gleichstromnetzwerke nach einem der behandelten Verfahren analysiert. Jedes der Verfahren erfordert das Lösen eines linearen Gleichungssystems (LGS), das reelle Konstanten miteinander verknüpft.

Alle behandelten Verfahren sind auch zur Analyse linearer Sinusstromnetzwerke (Kapitel 5) geeignet. Hierfür ist lediglich die mathematische Formulierung zu verallgemeinern. Die Berechnung erfordert dann das Lösen eines linearen Gleichungssystems, das komplexe Konstanten miteinander verknüpft.

2.4.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden Begriffe und Zusammenhänge erklärt, die für das Verständnis der nachfolgend vorgestellten Analyseverfahren unverzichtbar sind. Weiterhin werden Regeln zur Vereinfachung von Netzwerken angegeben, durch deren Anwendung sich der Analyseaufwand oftmals verringern lässt.

2.4.1.1 Kennzeichen linearer Gleichstromnetzwerke

Lineare Gleichstromnetzwerke bestehen ausschließlich aus *linearen Widerständen* und *linearen* oder *idealen Quellen*. Da das Klemmenverhalten jeder linearen Quelle mittels eines linearen Widerstandes und einer idealen Quelle modelliert werden kann (Abschnitt 2.1.3.4), ist jedes lineare Gleichstromnetzwerk unter ausschließlicher Verwendung dreier elementarer Zweipoltypen, nämlich

- linearer Widerstände,
- idealer Spannungsquellen und
- idealer Stromquellen

beschreibbar.

Enthält ein Netzwerk mindestens einen nichtlinearen Widerstand oder eine nichtlineare Quelle, so ist das gesamte Netzwerk nichtlinear und kann nicht in seiner Gesamtheit mit den hier behandelten Verfahren berechnet werden. Auf die Analyse nichtlinearer Netzwerke wird in Abschnitt 2.5 eingegangen.

Werden beliebig viele lineare Zweipole in beliebiger Weise *widerspruchsfrei* (Abschnitt 2.4.1.6) zu einem Netzwerk verschaltet, so wird der Zusammenhang zwischen einem beliebigen Strom oder einer beliebigen Spannung und einem beliebigen anderen Strom oder einer beliebigen anderen Spannung im Netzwerk stets durch *eine lineare Gleichung* beschrieben. Diese Aussage folgt aus der Linearität des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Gesetze, die die Klemmengrößen der linearen Zweipole des Netzwerks miteinander verknüpfen. Der Zusammenhang zwischen *allen* Strömen und Spannungen in einem linearen Gleichstromnetzwerk wird durch ein *System linearer algebraischer Gleichungen* beschrieben.

Zunächst sollen zwei fundamentale Eigenschaften *linearer Systeme* erwähnt werden, die den Zusammenhang zwischen ihren Ein- und Ausgangsgrößen charakterisieren. Dazu wird ein allgemeines lineares System gemäß Bild 2.62 betrachtet, das m Eingangsgrößen (*Ursachengrößen, Anregungsgrößen*) x_μ zu n Ausgangsgrößen (*Wirkungsgrößen, Reaktionsgrößen*) y_ν verknüpft.

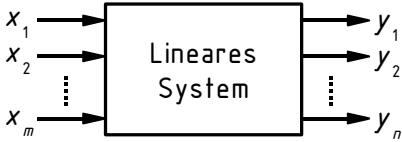


Bild 2.62: Allgemeines lineares System mit Ein- und Ausgangsgrößen

Das Verhalten jedes linearen Systems zeichnet sich aus durch:

1. Homogenität

Bewirkt eine Eingangsgröße x_μ die Ausgangsgröße $y_\nu(x_\mu)$, so bewirkt die Eingangsgröße $K \cdot x_\mu$ die Ausgangsgröße

$$y_\nu(K \cdot x_\mu) = K \cdot y_\nu(x_\mu), \quad (2.152)$$

wobei K eine beliebige Konstante ist.

2. Additivität

Bewirkt eine Eingangsgröße x_μ die Ausgangsgröße $y_\nu(x_\mu)$ und eine andere Eingangsgröße x_λ die Ausgangsgröße $y_\nu(x_\lambda)$, so bewirken die beiden Eingangsgrößen x_μ und x_λ zusammen die Ausgangsgröße

$$y_\nu(x_\mu, x_\lambda) = y_\nu(x_\mu) + y_\nu(x_\lambda). \quad (2.153)$$

Was folgt aus diesen abstrakten Eigenschaften für die hier betrachteten Netzwerke? Bild 2.63 zeigt einzelne Zweipole aus einem zusammenhängenden linearen Gleichstromnetzwerk: eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_{q3} , eine Stromquelle mit dem Quellenstrom I_{q6} und einen Widerstand R_8 , durch den der Strom I_8 fließt. Die elektrischen Verbindungen zwischen den drei Zweipolen können beliebig kompliziert sein.

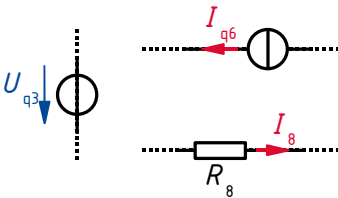


Bild 2.63: Teile eines linearen Gleichstromnetzwerks

Die Quellenspannung U_{q3} bewirkt einen *Teilstrom* $I_8(U_{q3})$ durch R_8 , der Quellenstrom I_{q6} einen *Teilstrom* $I_8(I_{q6})$ durch R_8 . Eine Verdopplung der Quellenspannung U_{q3} würde wegen der Homogenität gemäß Gl. (2.152) auch zu einer Verdopplung des durch sie bewirkten *Teilstroms* durch R_8 führen: $I_8(2 \cdot U_{q3}) = 2 \cdot I_8(U_{q3})$. Der Gesamtstrom I_8 durch R_8 ergibt sich wegen der Additivität gemäß Gl. (2.153) aus der *vorzeichenbehafteten Addition* aller Teilstrome durch R_8 , die durch die im Netzwerk vorhandenen Quellen hervorgerufen werden.

2.4.1.2 Bei der Netzwerkanalyse zu lösende mathematische Aufgabe

Jeder *Zweig* eines linearen Gleichstromnetzwerks besteht aus einem (oder kann mittels der in Abschnitt 2.4.1.6 behandelten Regeln umgeformt werden in einen) von vier Typen von (Ersatz-) Zweipolen:

I linearer (Ersatz-)Widerstand

II lineare (Ersatz-)Spannungsquelle

III ideale (Ersatz-)Spannungsquelle

IV ideale Stromquelle, ggf. in Reihe mit einem weiteren (Ersatz-)Zweipol vom Typ I bis III.

Ein lineares Gleichstromnetzwerk, bei dem

- alle Widerstandswerte R_λ
- alle Quellengrößen $U_{q\mu}$ bzw. $I_{q\nu}$

bekannt sind, *gilt als analysiert*, wenn

1. die Ströme durch alle Widerstände
2. die Ströme durch alle Spannungsquellen
3. die Spannungen über allen Stromquellen

ermittelt worden sind. (Die Spannungen über den Widerständen lassen sich bei Bedarf anschließend einfach mittels des Ohmschen Gesetzes einzeln berechnen.)

Zu ermitteln sind also im Wesentlichen *alle Zweigströme* und nur im relativ seltenen Fall IV Spannungen. (In diesem Fall ist der Zweigstrom gegeben.)

Alternativ können auch *alle Zweigspannungen* bestimmt werden, aus denen mittels des Ohmschen Gesetzes und ggf. des Maschensatzes in den Fällen I, II und IV die Zweigströme berechenbar sind. Lediglich im relativ seltenen Fall III muss zusätzlich der Knotensatz zur Berechnung des Stroms durch die ideale Spannungsquelle angewandt werden. (In diesem Fall ist die Zweigspannung gegeben.)

Schließlich können aus den ermittelten Strömen und Spannungen die in den einzelnen Zweipolen umgesetzten *Leistungen* berechnet werden.

Bei der Analyse eines *linearen Gleichstromnetzwerks mit z Zweigen* sind also z *unbekannte Größen* zu berechnen. Hierzu ist im Allgemeinen das *Lösen eines Systems aus z linearen, voneinander unabhängigen, algebraischen Gleichungen* erforderlich. Bei einem physikalisch sinnvollen (vgl. Abschnitt 2.4.1.6) Netzwerk hat das lineare Gleichungssystem immer *eine eindeutige Lösung*, d. h. alle gesuchten Größen haben einen eindeutigen Wert.

Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist mathematisch prinzipiell keine Herausforderung [BDHG06]. Es stellt aber handwerklich bzw. bei der Implementierung in Form von Software für einen Taschenrechner mit nur wenigen Speicherplätzen ein Problem dar, das wegen der quadratischen Abhängigkeit des Schreibaufwandes bzw. Speicherplatzbedarfes von z schon bei relativ kleinen Netzwerken (etwa ab $z > 5$) sehr zeit- bzw. platzaufwändig werden kann. Bei der Analyse eines großen Netzwerks mit vielen tausend Elementen liegt der Speicherplatzbedarf

für das vollständige Gleichungssystem weit oberhalb der Größe des Hauptspeichers aktueller Arbeitsplatzrechner.

Daher ist es wünschenswert, Analyseverfahren einzusetzen, bei denen die *Größe des zu lösenden linearen Gleichungssystems* kleiner als z ist. Dies ist bei den vereinfachten Analyseverfahren, die in den Abschnitten 2.4.6 und 2.4.7 behandelt werden, der Fall. Bei diesen Verfahren werden diejenigen Gleichungen, die nicht im Rahmen der Lösung des linearen Gleichungssystems ausgewertet werden, später *einzel*n ausgewertet, was insbesondere für Menschen eine erhebliche Vereinfachung darstellt. *Die Gesamtzahl der zu lösenden Gleichungen ist aber in jedem Fall (mindestens) gleich z .*

2.4.1.3 Topologie und Graph eines Netzwerks

Unter der *Topologie*⁹ eines Netzwerks versteht man seine *Struktur*. Sie wird beschrieben durch

- die Anzahl k der echten Knoten (Abschnitt 2.2.1.1)
- die Anzahl z der Zweige
- die *Anordnung der Zweige* zwischen den Knoten, also auch die Anordnung der Maschen.

Für die Topologie ist es irrelevant, aus welcher Art von Zweipolen die einzelnen Zweige bestehen.

Die Topologie eines Netzwerks wird in Form eines Graphen dargestellt. Ein *Graph* besteht aus *Kanten* (hier den Zweigen des Netzwerks) und *Knoten* (hier den *echten* Knoten des Netzwerks). Kanten werden nach Möglichkeit durch gerade Strecken oder durch Bögen dargestellt, bei Bedarf auch durch einfach geknickte Strecken. In den Bildern 2.64a bis 2.64d sind Beispiele für Graphen von Netzwerken dargestellt.

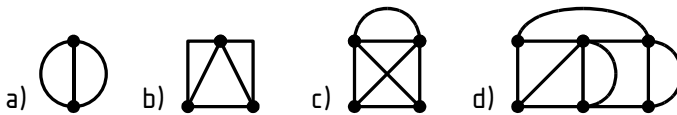


Bild 2.64: Beispiele für Graphen von Netzwerken

2.4.1.4 Vollständiger Baum eines Graphen

Ein *vollständiger Baum* eines Graphen ist eine *zusammenhängende Verbindung aller Knoten* des Graphen, die *keine Masche* enthält. In komplexen Graphen existieren meistens mehrere verschiedene vollständige Bäume.

Im Bild 2.65 sind in rot einige mögliche vollständige Bäume des Graphen in Bild 2.64c dargestellt. Um k Knoten maschenfrei miteinander zu verbinden, werden $k - 1$ Zweige benötigt. Daher enthält jeder vollständige Baum – unabhängig von der Topologie des Graphen – *genau* $k - 1$ Zweige. Zu unterscheiden ist zwischen vollständigen Bäumen mit *linienförmiger Struktur* (Bilder 2.65a und 2.65b) und solchen mit *sternförmiger Struktur* (Bild 2.65c und 2.65d).

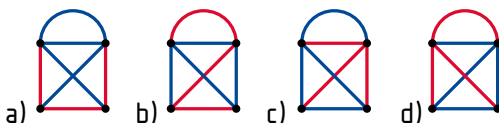


Bild 2.65: Einige vollständige Bäume (rot markiert) des Graphen in Bild 2.64c

⁹Die Topologie ist die Lehre von der Anordnung geometrischer Objekte zueinander.

2.4.1.5 Baumzweige, Verbindungszweige

Diejenigen Zweige eines Graphen, die zum ausgewählten vollständigen Baum gehören, heißen *Baumzweige*, die anderen *Verbindungszweige*. Die in Bild 2.65 rot dargestellten Zweige sind Baumzweige, die blau dargestellten Verbindungszweige.

Ein Graph mit z Zweigen und k Knoten enthält $z - (k - 1) = z - k + 1$ Verbindungszweige.

Durch einen vollständigen Baum und *einen* Verbindungszweig wird *genau eine Masche* (eine sogenannte *Elementarmasche*) definiert (vgl. Bild 2.65). Die Menge aller Verbindungszweige eines Graphen definiert somit zusammen mit dem zugehörigen vollständigen Baum $z - k + 1$ verschiedene Maschen, die jeweils aus genau einem (nur in dieser Masche enthaltenen) Verbindungszweig und einem oder mehreren Baumzweigen bestehen.

2.4.1.6 Netzwerkkumformung

Ziel einer Netzwerkkumformung im Rahmen der Netzwerkanalyse ist es stets, ein *lineares Teilnetzwerk* in ein einfacheres, bezüglich seines *Klemmenverhaltens* aber identisches lineares Ersatznetzwerk umzuwandeln.

In Verallgemeinerung der Aussagen in Abschnitt 2.2.7 zur Äquivalenz von Stern- und Dreieckschaltungen bedeutet *identisches Klemmenverhalten zweier n -Pole* (Bild 2.66):

- Liegen an einander entsprechenden Klemmen gleiche Spannungen, so fließen gleiche Ströme durch einander entsprechende Klemmen.
- Fließen in einander entsprechenden Klemmen gleiche Ströme, so treten zwischen einander entsprechenden Klemmen gleiche Spannungen auf.
- Der Widerstand zwischen beliebigen Paaren einander entsprechender elektrischer Klemmen ist gleich groß.

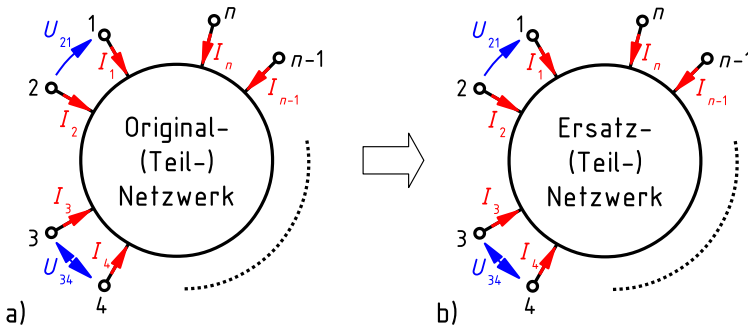


Bild 2.66: n -poliges Original- (a) sowie Ersatznetzwerk (b) mit identischem Klemmenverhalten

Vor einer Netzwerkkumformung sollte man sich klarmachen, welche Größen (Spannungen, Ströme, evtl. Widerstandswerte) im Netzwerk zu bestimmen sind. Diese gesuchten Größen sollten bei der Netzwerkkumformung möglichst erhalten bleiben. Ist dies nicht möglich oder zweckmäßig, so müssen die bei der Berechnung der vereinfachten Schaltung erzielten Ergebnisse auf die Originalschaltung übertragen und daraus in einem zweiten Schritt die gesuchten Größen berechnet werden.

Regeln für die Netzwerkkumformung

1. *In Reihe geschaltete Widerstände* können gemäß Gl. (2.111) zu einem Ersatz-Widerstand zusammengefasst werden.
2. *Parallel geschaltete Leitwerte* können gemäß Gl. (2.93) zu einem Ersatz-Leitwert zusammengefasst werden.
3. *In Reihe geschaltete ideale Spannungsquellen* können gemäß Gl. (2.84) durch eine ideale Ersatz-Spannungsquelle ersetzt werden. Z. B. gilt in Bild 2.67 $U_{\text{qers}} = U_{\text{q1}} - U_{\text{q2}} + U_{\text{q3}}$.

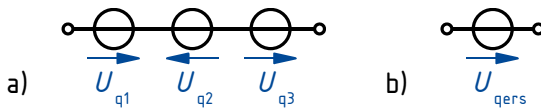


Bild 2.67: Zusammenfassung einer Reihenschaltung idealer Spannungsquellen (a) zu einer idealen Ersatz-Spannungsquelle (b)

4. *Parallel geschaltete ideale Stromquellen* können gemäß Gl. (2.79) durch eine ideale Ersatz-Stromquelle ersetzt werden. Z. B. gilt in Bild 2.68 $I_{\text{qers}} = I_{\text{q1}} - I_{\text{q2}} + I_{\text{q3}}$.

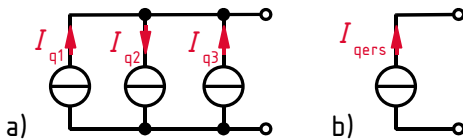


Bild 2.68: Zusammenfassung einer Parallelschaltung idealer Stromquellen (a) zu einer idealen Ersatz-Stromquelle (b)

5. *Widerstände, die parallel zu einer idealen Spannungsquelle geschaltet sind*, beeinflussen die Spannungen und Ströme in der übrigen Schaltung nicht und dürfen daher bei der Berechnung der übrigen Schaltung unberücksichtigt bleiben. (Bei der Berechnung des Stroms durch die Spannungsquelle müssen sie aber berücksichtigt werden!)
6. *Widerstände, die in Reihe zu einer idealen Stromquelle geschaltet sind*, haben keine strombegrenzende Wirkung und beeinflussen somit die Spannungen und Ströme in der übrigen Schaltung nicht. Sie dürfen daher bei der Berechnung der übrigen Schaltung unberücksichtigt bleiben. (Bei der Berechnung der Spannung über der Stromquelle müssen sie aber berücksichtigt werden!)
7. *Knoten mit gleichem elektrischen Potenzial* dürfen widerstandslos (aber auch durch einen beliebigen passiven Zweipol) miteinander verbunden werden, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen in der Schaltung etwas ändert. Durch eine solche Verbindung fließt kein Strom. Ein Kurzschluss zwischen zwei Knoten führt aber dazu, dass die zuvor im Sinne der Netzwerktheorie unterschiedlichen Knoten zu einem *Superknoten* (Abschnitt 2.2.1.1) zusammengefasst werden, was eine Änderung der Topologie des Netzwerks zur Folge hat.
8. *Zweige, durch die kein Strom fließt*, dürfen aus der Schaltung entfernt werden, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen in der Schaltung etwas ändert. Ein Zweig, durch den kein Strom fließt, trägt nämlich nicht dazu bei, die Knoten, die er verbindet, auf ein bestimmtes Potenzial zu bringen. Auch durch einen solchen Eingriff ändert sich die Topologie des Netzwerks.

9. *Lineare Spannungsquellen* dürfen durch *lineare Stromquellen* ersetzt werden und umgekehrt, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen *in der übrigen Schaltung* etwas ändert. (Der Leistungsumsatz innerhalb der Quellen wird sich hierdurch aber in der Regel ändern, Abschnitt 2.1.4.5)

Unzulässige Schaltungen

Bestimmte Zusammenschaltungen idealer Quellen führen zu einem physikalischen Widerspruch und sind daher unzulässig. Der Versuch, ein solches Netzwerk zu berechnen, führt zu einem nicht lösbaeren Gleichungssystem.

- *Parallelschaltung idealer Spannungsquellen mit unterschiedlichen Quellenspannungen.* Dies würde zu einem Widerspruch führen, da in einem Gleichstromnetzwerk die Potenzialdifferenz zwischen zwei Knoten einen eindeutigen Wert hat.
- *Reihenschaltung idealer Stromquellen mit unterschiedlichen Quellenströmen.* Dies würde zu einem Widerspruch führen, da durch alle Zweipole eines Zweiges stets der gleiche Strom fließt.

Die nachfolgenden Verschaltungen idealer Quellen sind zwar physikalisch sinnvoll, führen bei der Netzwerkanalyse aber dazu, dass es nicht eine eindeutige Lösung, sondern unendlich viele verschiedene Lösungen gibt. Damit ist eine vollständige Netzwerkanalyse im Sinne des Abschnitts 2.4.1.2 nicht möglich.

- *Parallelschaltung idealer Spannungsquellen mit identischen Quellenspannungen.* Es gibt keine Möglichkeit, die Aufteilung des Gesamtstroms auf die einzelnen Quellen zu bestimmen.
- *Reihenschaltung idealer Stromquellen mit identischen Quellenströmen.* Es gibt keine Möglichkeit, die Aufteilung der Gesamtspannung auf die einzelnen Quellen zu bestimmen.

In der Praxis stellen die vier oben genannten Fälle keine Probleme dar, da es keine idealen Quellen gibt. Der erste Fall kann aber bei Quellen mit sehr kleinen Innenwiderständen schon bei geringen Unterschieden zwischen den Quellenspannungen zu großen Ausgleichsströmen führen, die eine thermische Zerstörung der Quellen bewirken können. Daher sollten selbst Batterien mit gleicher Nennspannung nicht direkt parallelgeschaltet werden.

Beispiel 2.29: Schrittweise Vereinfachung einer Schaltung

Betrachtet wird das Netzwerk in Bild 2.69a, in dem alle Widerstände sowie die Quellenspannung U_{q1} und der Quellenstrom I_{q2} bekannt sind.

Da das Netzwerk $z = 6$ Zweige enthält, ist gemäß Abschnitt 2.4.1.2 prinzipiell ein System aus 6 Gleichungen zu lösen, um die 5 unbekanntenen Zweigströme sowie die Spannung über der Stromquelle zu berechnen.

Durch schrittweises Vereinfachen mittels der oben angegebenen Regeln kann das Netzwerk in ein Ersatznetzwerk umgewandelt werden, das nur das Lösen eines wesentlich kleineren Gleichungssystems erfordert. Aus den dann bekannten Größen des Ersatznetzwerks können durch schrittweises Rückgängigmachen der Vereinfachungen die gesuchten Größen des Originalnetzwerks berechnet werden.

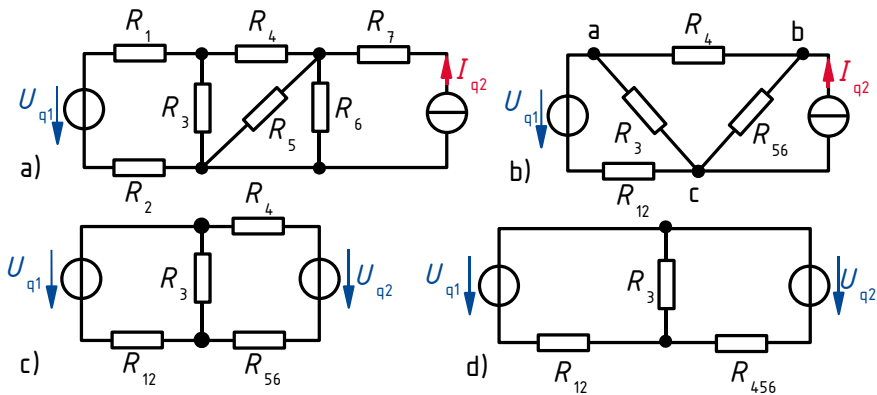


Bild 2.69: Netzwerk (a) mit zusammengefassten Widerständen (b), nach Umwandlung der linearen Stromquelle in eine lineare Spannungsquelle (c) und vereinfachte Schaltung (d)

Die beiden unteren Knoten in Bild 2.69a können zu einem echten Knoten c zusammengefasst werden. Die parallelen Widerstände R_5 und R_6 dürfen durch den Widerstand R_{56} ersetzt und die beiden in Reihe liegenden Widerstände R_1 und R_2 zum Widerstand R_{12} zusammengefasst werden. Der Widerstand R_7 liegt in Reihe mit einer idealen Stromquelle und hat somit keinen Einfluss auf den Zweigstrom I_{q2} . Er darf zur Berechnung der Schaltungsteile links des Zweiges mit der Stromquelle weggelassen werden. Damit erhält man die Ersatzschaltung in Bild 2.69b.

Die ideale Stromquelle I_{q2} und den parallelen Widerstand R_{56} kann man als lineare Stromquelle auffassen, die zur Berechnung der übrigen Schaltung in eine lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_{q2} = I_{q2}R_{56}$ umgewandelt werden darf. So erhält man die Ersatzschaltung in Bild 2.69c. Das Zusammenfassen der Widerstände R_4 und R_{56} zu R_{456} ergibt schließlich die Schaltung in Bild 2.69d, die noch drei unbekannte Zweigströme enthält. Damit ist nur noch ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen zu lösen. Nachdem die drei Ströme berechnet sind, sind durch Anwenden der Strom- und Spannteilerregel sowie des Ohmschen Gesetzes die übrigen Ströme und Spannungen des Originalnetzwerks einfach zu ermitteln.

Die in Beispiel 2.29 demonstrierte Vorgehensweise zur Analyse kleiner Netzwerke fördert das elektrotechnische Verständnis und den Umgang mit den grundlegenden Gesetzen der Gleichstromtechnik, wird in der Praxis aber kaum angewandt.

Beispiel 2.30: Zusammenfassen von Quellen

Der Strom I_1 im Netzwerk in Bild 2.70a soll berechnet werden. Bekannt sind $U_{q1} = 16\text{ V}$; $I_{q2} = 4,8\text{ A}$; $U_{q3} = 10\text{ V}$; $I_{q4} = 7,5\text{ A}$; $R_1 = 2,1\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 0,4\ \Omega$.

Die Schaltung in Bild 2.70a enthält drei Elementarmaschen. Wenn es gelingt, die beiden linken und die beiden rechten Zweige jeweils zu einem Ersatzzweig zusammenzufassen, entsteht ein Ersatznetzwerk, das nur noch eine Masche enthält. Der Strom in dieser Masche ist der gesuchte Strom, der trivial zu berechnen ist.

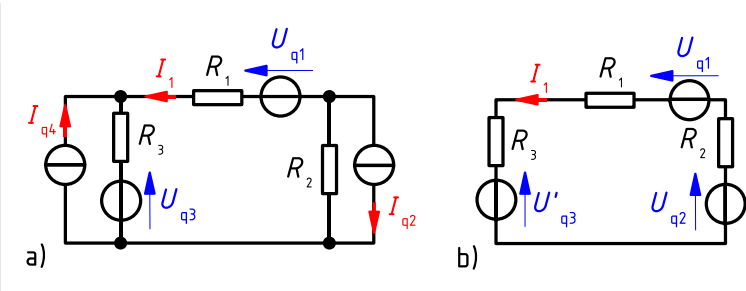


Bild 2.70: Netzwerk zu Beispiel 2.30 (a) und Ersatznetzwerk (b)

Zunächst wird die lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_{q3} und dem Innenwiderstand R_3 in eine lineare Stromquelle mit dem Quellenstrom

$$I_{q3} = U_{q3}/R_3 = 10 \text{ V}/(0,4 \Omega) = 25 \text{ A}$$

(Zählpfeil in Gegenrichtung zu dem von U_{q3}) und dem parallelen Innenwiderstand R_3 umgewandelt. Nun können die beiden parallelen Stromquellen zu einer Stromquelle mit

$$I'_{q3} = I_{q3} - I_{q4} = 25 \text{ A} - 7,5 \text{ A} = 17,5 \text{ A}$$

(Zählpfeil wie der von I_{q3}) zusammengefasst werden. Die durch I'_{q3} und R_3 gebildete lineare Stromquelle wird nun durch eine lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung

$$U'_{q3} = R_3 I'_{q3} = 0,4 \Omega \cdot 17,5 \text{ A} = 7 \text{ V}$$

(Zählpfeil siehe Bild 2.70b) und dem Innenwiderstand R_3 ersetzt. Die durch I_{q2} und R_2 gebildete lineare Stromquelle wird ersetzt durch eine lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung

$$U_{q2} = R_2 I_{q2} = 5 \Omega \cdot 4,8 \text{ A} = 24 \text{ V}$$

(Zählpfeil in Gegenrichtung zu dem von I_{q2}) und dem Innenwiderstand R_2 . Damit ergibt sich die in Bild 2.70b dargestellte Ersatzschaltung. Aus ihr folgt durch Anwendung des Maschensatzes

$$I_1 = \frac{U'_{q3} - U_{q1} - U_{q2}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{7 \text{ V} - 16 \text{ V} - 24 \text{ V}}{2,1 \Omega + 5 \Omega + 0,4 \Omega} = -4,4 \text{ A}.$$

2.4.2 Rekursive Berechnung

In *linearen* Netzwerken, die nur *eine Quelle* enthalten, kann man sich in manchen Fällen durch eine *rekursive Berechnung* sehr viel Rechenarbeit ersparen. Bei diesem Ansatz werden nicht, wie sonst üblich, ausgehend von der gegebenen Quellengröße an den Klemmen der ansonsten passiven Schaltung die gesuchten Ströme und/oder Spannungen berechnet, sondern es wird umgekehrt eine Spannung oder ein Strom in einem Teil des Netzwerks, der weit von der Quelle entfernt ist, mit einem beliebigen (glatten) Wert angenommen. Dann werden schrittweise unter Verwendung der Kirchhoffschen Sätze und des Ohmschen Gesetzes weitere Ströme und

Spannungen „rückwärts“ (zur Quelle hin, daher der Name des Verfahrens) berechnet. Schließlich erhält man einen Wert der Quellengröße, der sich in der Regel vom vorgegebenen Wert unterscheiden wird. Da es sich um ein lineares Netzwerk mit nur einer Quelle handelt, erhält man durch Multiplikation aller berechneten Spannungen und Ströme mit dem selben Korrekturfaktor die richtigen Werte (vgl. Aussagen über lineare Netzwerke in Abschnitt 2.4.1.1). Der Korrekturfaktor ist der Quotient aus gegebener und berechneter Quellengröße.

Die rekursive Berechnung ist insbesondere bei *Schaltungen mit kettenartiger Struktur*, zu denen die *mehrstufigen Spannungsteiler* (Abschnitt 2.2.5.2) gehören, anwendbar. Dieser Schaltungstyp wird auch als *Abzweigschaltung* bezeichnet.

Beispiel 2.31: Rekursive Berechnung einer Abzweigschaltung

Die Abzweigschaltung in Bild 2.71 liegt an der Spannung $U = 100\text{ V}$. Die Widerstände haben die Werte $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$, $R_6 = 60\ \Omega$. Die Spannung U_6 ist zu berechnen.

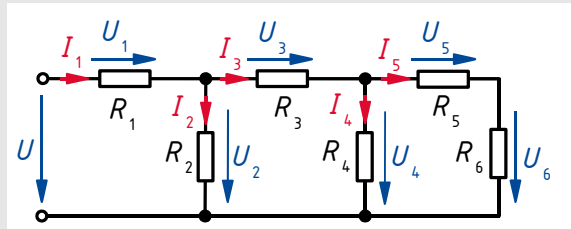


Bild 2.71: Abzweigschaltung

Für die gesuchte Spannung wird ein willkürlich gewählter Wert $U'_6 = 60\text{ V}$ angesetzt. Hieraus ergibt sich über mehrere Zwischenwerte schließlich ein Wert U' für die Eingangsspannung:

$$I'_5 = U'_6 / R_6 = 60\text{ V} / (60\ \Omega) = 1\text{ A}$$

$$U'_5 = R_5 I'_5 = 40\ \Omega \cdot 1\text{ A} = 40\text{ V}$$

$$U'_4 = U'_5 + U'_6 = 40\text{ V} + 60\text{ V} = 100\text{ V}$$

$$I'_4 = U'_4 / R_4 = 100\text{ V} / (40\ \Omega) = 2,5\text{ A}$$

$$I'_3 = I'_4 + I'_5 = 2,5\text{ A} + 1\text{ A} = 3,5\text{ A}$$

$$U'_3 = R_3 I'_3 = 25\ \Omega \cdot 3,5\text{ A} = 87,5\text{ V}$$

$$U'_2 = U'_3 + U'_4 = 87,5\text{ V} + 100\text{ V} = 187,5\text{ V}$$

$$I'_2 = U'_2 / R_2 = 187,5\text{ V} / (12\ \Omega) = 15,625\text{ A}$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 15,625\text{ A} + 3,5\text{ A} = 19,125\text{ A}$$

$$U'_1 = R_1 I'_1 = 10\ \Omega \cdot 19,125\text{ A} = 191,25\text{ V}$$

$$U' = U'_1 + U'_2 = 191,25\text{ V} + 187,5\text{ V} = 378,75\text{ V}$$

Der Korrekturfaktor für *alle* Ströme und Spannungen ist also

$$K = \frac{U}{U'} = \frac{100 \text{ V}}{378,75 \text{ V}} \approx 0,264.$$

Daraus folgt speziell der Wert der gesuchten Spannung

$$U_6 = K U'_6 = 0,264 \cdot 60 \text{ V} = 15,8 \text{ V}.$$

2.4.3 Knoten- und Maschenanalyse

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur Netzwerkanalyse unter alleiniger Verwendung der Kirchhoffschen Sätze und des Ohmschen Gesetzes vorgestellt. Das Verfahren ist in seiner Grundform sehr einfach verständlich und sehr einfach anwendbar. Das zu lösende lineare Gleichungssystem ist aber stets größer als bei den in den Abschnitten 2.4.6 und 2.4.7 behandelten vereinfachten Analyseverfahren. Daher sollte es nur zur Berechnung einfacher Netzwerke verwendet werden.

2.4.3.1 Prinzip des Verfahrens

Zu analysieren ist ein lineares Gleichstromnetzwerk mit k Knoten und z Zweigen. Die Anwendung des Kirchhoffschen Knotensatzes auf $k - 1$ beliebig ausgewählte Knoten des Netzwerks führt zu $k - 1$ linear unabhängigen Gleichungen für die Zweigströme. Die Gleichung für den k -ten Knoten liefert keine zusätzliche Information, da alle Ströme in der Knotengleichung für diesen Knoten bereits in den anderen Knotengleichungen enthalten sind.

Die fehlenden $z - k + 1$ Gleichungen zur Berechnung der z unbekanntenen Größen erhält man durch Anwendung des Kirchhoffschen Maschensatzes auf eine geeignete Auswahl an Maschen. Die Maschen sind so zu wählen, dass die aus ihnen gewonnenen Maschengleichungen voneinander *linear unabhängig* sind, also keine der Gleichungen aus den anderen Gleichungen abgeleitet werden kann. Zur Identifikation eines solchen Satzes linear unabhängiger Maschengleichungen verwendet man einen prinzipiell beliebig auswählbaren vollständigen Baum des Graphen des Netzwerks. Wie bereits in Abschnitt 2.4.1.5 erwähnt, wird durch jeden der

$$m = z - k + 1 \tag{2.154}$$

Verbindungs Zweige und eine Teilmenge der Baumzweige genau eine Elementarmasche des Netzwerks bestimmt. Die m Maschengleichungen für diese Maschen sind stets linear unabhängig voneinander, da in jeder der Gleichungen eine neue Größe enthalten ist, nämlich die Spannung über dem zugehörigen Verbindungs Zweig. Empfehlenswert ist die Wahl eines vollständigen Baumes mit *sternförmiger Struktur* (Bild 2.65), da hierbei Maschen entstehen, die weniger Baumzweige enthalten als bei Wahl eines vollständigen Baumes mit *linienförmiger Struktur*. Dies führt wiederum zu einfacheren Maschengleichungen, was den Aufwand zum Lösen des linearen Gleichungssystems vermindert.

Enthält das Netzwerk keine Stromquellen, lassen sich mittels der so gewonnenen z linear unabhängigen Gleichungen ohne Schwierigkeiten die gesuchten Zweigströme berechnen.

2.4.3.2 Vorgehensweise

Vor der Netzwerkanalyse sind, sofern nicht vorgegeben, *Zählpfeile* für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen. Anschließend kann nach folgendem Schema vorgegangen werden:

1. Ggf. Anwenden der Regeln zur *Netzwerkumformung* (Abschnitt 2.4.1.6), insbesondere Zusammenfassen von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.
2. Aufstellen der $k - 1$ voneinander unabhängigen *Knotengleichungen* $\Sigma I = 0$. Es empfiehlt sich, Ströme mit *zum* betrachteten Knoten weisendem Zählpfeil *positiv* zu zählen.
3. Zeichnen des Graphen des Netzwerks und Auswahl eines vollständigen Baumes.
4. Aufstellen der $m = z - k + 1$ voneinander unabhängigen *Maschengleichungen* mittels des vollständigen Baumes. Der *Umlaufsinn* ist für jede Masche beliebig wählbar. Spannungsabfälle $U = RI$ über Widerständen und Quellenspannungen U_q werden positiv gezählt, wenn die Zählpfeile (von U bzw. I bzw. U_q) mit dem Umlaufsinn der Masche übereinstimmen, sonst negativ. Die bekannten Quellenspannungen U_q werden auf die rechten Seiten der Gleichungen gebracht.
5. Lösen des linearen Gleichungssystems für die z unbekanntem Zweigströme.
6. Ggf. Rückgängigmachen der unter 1. durchgeführten Netzwerkumformungen.

2.4.3.3 Matrixschreibweise des Gleichungssystems

Das bei der Knoten- und Maschenanalyse zu lösende Gleichungssystem lässt sich darstellen als *Matrixgleichung* [BDHG06] in der *Form*

$$\underline{R} \vec{I} = \vec{U} \quad (2.155)$$

mit der quadratischen $z \times z$ -*Koeffizientenmatrix*

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1z} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{z1} & R_{z2} & \dots & R_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.156)$$

Die Koeffizientenmatrix wird durch die Topologie des Netzwerks und die Parameter der enthaltenen Widerstände bestimmt. Die Dimension der Elemente von \underline{R} ist zeilenweise entweder “1“, wenn die betreffende Zeile des Gleichungssystems eine Knotengleichung ist, oder “Widerstand“, wenn die Zeile eine Maschengleichung ist. Bei großen, schwach vermaschten Netzwerken sind viele Elemente von \underline{R} gleich null.

Der Spaltenvektor der gesuchten *Wirkungsgrößen*, hier der unbekanntem Zweigströme

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_z \end{pmatrix}, \quad (2.157)$$

ist der *Lösungsvektor* des Gleichungssystems. Der Spaltenvektor der *Anregungsgrößen*, hier der bekannten Quellenspannungen

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_z \end{pmatrix}, \quad (2.158)$$

wird oft als „rechte Seite“ des Gleichungssystems bezeichnet. Die Elemente der rechten Seite sind bei allen Knotengleichungen null. Bei Maschengleichungen können die Elemente eine oder mehrere vorzeichenbehaftete Quellenspannungen enthalten.

Beispiel 2.32: Anwendung der Knoten- und Maschenanalyse auf ein Netzwerk mit linearen Spannungsquellen

Zur Berechnung der 8 unbekanntem Ströme des Netzwerks in Bild 2.72a soll mit Hilfe der Knoten- und Maschenanalyse ein Gleichungssystem aufgestellt und als Matrixgleichung dargestellt werden.

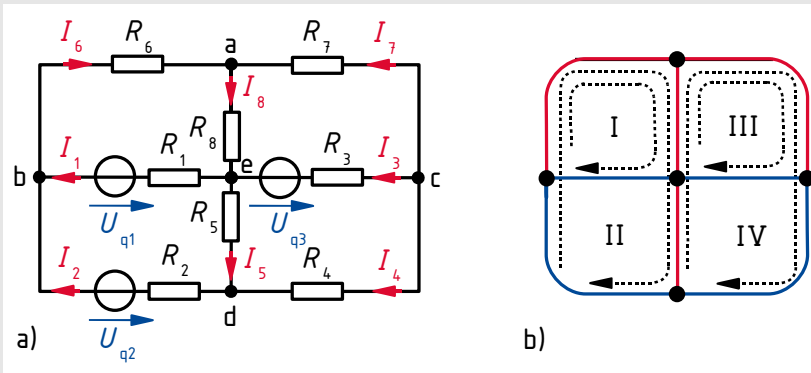


Bild 2.72: Netzwerk mit 8 unbekanntem Zweigströmen (a) und Graph des Netzwerks mit vollständigem Baum und Elementarmaschen (b)

Das Netzwerk enthält $z = 8$ Zweige und $k = 5$ Knoten. Daher werden $k - 1 = 4$ Knotengleichungen und $z - k + 1 = 4$ Maschengleichungen benötigt. Die Stromzählpfeile sind in Bild 2.72a eingetragen.

Die Knotengleichungen werden für die Knoten a, b, c und d aufgestellt. Für den Knoten c soll die Zählpfeilrichtung vom Knoten weg als positiv gelten; bei den Knoten a, b und d wird die Zählpfeilrichtung zum Knoten hin als positiv festgelegt. Man erhält dann die Knotengleichungen

$$K_a : I_6 + I_7 - I_8 = 0 ,$$

$$K_b : I_1 + I_2 - I_6 = 0 ,$$

$$K_c : I_3 + I_4 + I_7 = 0 ,$$

$$K_d : -I_2 + I_4 + I_5 = 0 .$$

Bei Wahl eines vollständigen Baumes gemäß Bild 2.72b ergeben sich die ebenfalls in Bild 2.72b eingetragenen Elementarmaschen I, II, III und IV. Wählt man für alle Maschen als

Umlaufsinn den Uhrzeigersinn, erhält man die Maschengleichungen

$$\begin{aligned} M_I &: R_6 I_6 + R_8 I_8 + R_1 I_1 - U_{q1} = 0, \\ M_{II} &: R_6 I_6 + R_8 I_8 + R_5 I_5 + R_2 I_2 - U_{q2} = 0, \\ M_{III} &: -R_8 I_8 - R_7 I_7 + R_3 I_3 - U_{q3} = 0, \\ M_{IV} &: -R_5 I_5 - R_8 I_8 - R_7 I_7 + R_4 I_4 = 0. \end{aligned}$$

Das aus vier Knoten- und vier Maschengleichungen bestehende Gleichungssystem wird nun nach Strömen geordnet und die Quellenspannungen werden auf die rechten Seiten der Gleichungen gebracht. Damit folgt die Darstellung des Gleichungssystems in Form einer Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & R_8 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & -R_7 & -R_8 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 & -R_7 & -R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ U_{q2} \\ U_{q3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um das Hantieren mit Einheiten zu vermeiden, sollten für die Zahlenwertrechnung alle Spannungen, Ströme und Widerstände durch geeignete *Normierung* (d. h. Division durch geeignete Bezugsgrößen) in einheitenlose Größen überführt werden. Dabei ist zu beachten, dass $[U] = [I][R]$ gelten muss, also z. B. die Zahlenwerte aller Spannungen in V, aller Ströme in mA und aller Widerstände in $k\Omega$ einzusetzen sind.

Beispiel 2.33: Berechnung des Laststroms als Funktion des Lastwiderstandes

Ein Generator mit der Quellenspannung $U_{q1} = 300 \text{ V}$ und dem Innenwiderstand $R_{i1} = 0,25 \Omega$ sowie ein Akkumulator mit der Quellenspannung $U_{q2} = 270 \text{ V}$ und dem Innenwiderstand $R_{i2} = 0,12 \Omega$ sind nach Bild 2.73 parallel auf einen Verbraucher R_{Last} geschaltet.

Wie teilt sich der Laststrom I_{Last} auf die beiden Quellen auf, wenn der Verbraucherwiderstand im Bereich $0 < R_{\text{Last}} < 10 \Omega$ verändert wird? Die einzelnen Ströme sind abhängig vom Verbraucherwiderstand grafisch darzustellen.

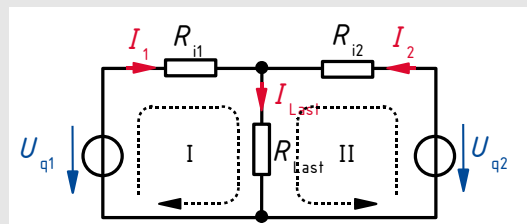


Bild 2.73: Generator und Akkumulator an gemeinsamem Lastwiderstand

Das Netzwerk enthält $k = 2$ Knoten und $z = 3$ Zweige. Die Zählpfeile für die gesuchten 3 Ströme sind in Bild 2.73 eingetragen. Es ist nur $k - 1 = 1$ Knotengleichung aufzustellen:

$$K: I_1 + I_2 - I_{\text{Last}} = 0.$$

Die $z - k + 1 = 2$ Maschen und ihr Umlaufsinn werden so gewählt, wie in Bild 2.73 eingezeichnet. (Der vollständige Baum besteht hier nur aus dem Zweig mit dem Widerstand R_{Last} .) Die Maschengleichungen lauten dann

$$M_{\text{I}} : R_{i1} I_1 + R_{\text{Last}} I_{\text{Last}} - U_{q1} = 0 ,$$

$$M_{\text{II}} : R_{i2} I_2 + R_{\text{Last}} I_{\text{Last}} - U_{q2} = 0$$

oder, nach den Teilströmen I_1 und I_2 aufgelöst,

$$I_1 = \frac{U_{q1} - R_{\text{Last}} I_{\text{Last}}}{R_{i1}} , \quad I_2 = \frac{U_{q2} - R_{\text{Last}} I_{\text{Last}}}{R_{i2}} .$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in die Knotengleichung erhält man

$$I_{\text{Last}} = I_1 + I_2 = \frac{U_{q1} - R_{\text{Last}} I_{\text{Last}}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2} - R_{\text{Last}} I_{\text{Last}}}{R_{i2}} = \frac{U_{q1}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2}}{R_{i2}} - \left(\frac{R_{\text{Last}}}{R_{i1}} + \frac{R_{\text{Last}}}{R_{i2}} \right) I_{\text{Last}} .$$

Damit ergibt sich für den Strom durch den Verbraucher

$$I_{\text{Last}} = \frac{\frac{U_{q1}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2}}{R_{i2}}}{1 + \frac{R_{\text{Last}}}{R_{i1}} + \frac{R_{\text{Last}}}{R_{i2}}} = \frac{R_{i2} U_{q1} + R_{i1} U_{q2}}{R_{i1} R_{i2} + R_{i2} R_{\text{Last}} + R_{i1} R_{\text{Last}}} .$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die Ausdrücke für die Teilströme folgt nach Kürzen durch R_{Last}

$$I_1 = \frac{U_{q1}}{R_{i1}} - \frac{\frac{R_{i2}}{R_{i1}} U_{q1} + U_{q2}}{\frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{\text{Last}}} + R_{i2} + R_{i1}} , \quad I_2 = \frac{U_{q2}}{R_{i2}} - \frac{U_{q1} + \frac{R_{i1}}{R_{i2}} U_{q2}}{\frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{\text{Last}}} + R_{i2} + R_{i1}} .$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man hieraus die zugeschnittenen Größengleichungen

$$\frac{I_1}{\text{A}} = 1200 - \frac{13\,800}{\frac{1}{R_{\text{Last}}/\Omega} + 12,333} , \quad \frac{I_2}{\text{A}} = 2250 - \frac{28\,750}{\frac{1}{R_{\text{Last}}/\Omega} + 12,333}$$

und mit der Knotengleichung K

$$\frac{I_{\text{Last}}}{\text{A}} = 3450 - \frac{42\,550}{\frac{1}{R_a/\Omega} + 12,333} .$$

Die Ströme als Funktion des Lastwiderstandes R_{Last} sind in Bild 2.74 dargestellt.

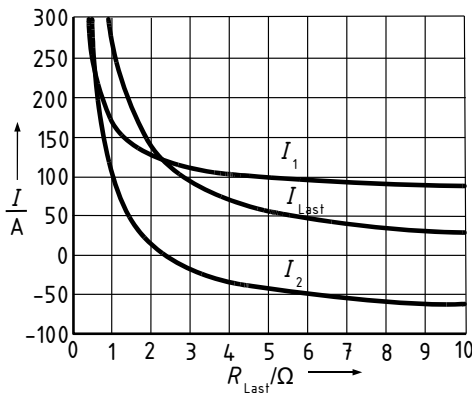


Bild 2.74: Teilströme I_1 und I_2 sowie Verbraucherstrom I_{Last} für Beispiel 2.33 in Abhängigkeit vom Verbraucherwiderstand R_{Last}

Der Akkumulator ist bei $R_{\text{Last}} = 2,25 \Omega$ mit $I_2 = 0$ stromlos, da in diesem Fall die Klemmenspannung des Verbrauchers $U_{\text{Last}} = R_{\text{Last}} I_{\text{Last}}$ mit 270 V gerade gleich der Quellen­spannung U_{q2} des Akkumulators ist. Der Laststrom wird in diesem Fall also vollständig vom Generator geliefert: $I_{\text{Last}} = I_1 = 120 \text{ A}$. Bei $R_{\text{Last}} > 2,25 \Omega$ wird der Akkumulator geladen und bei $R_{\text{Last}} < 2,25 \Omega$ entladen.

Dieser Übergang vom Lade- in den Entladezustand eines Akkumulators tritt z. B. in den elektrischen Anlagen von Kraftfahrzeugen auf. Während der Fahrt wird der Akku durch die Lichtmaschine geladen; gleichzeitig werden die Verbraucher gespeist. Die Verteilung der Ströme richtet sich nach dem Verbraucherwiderstand R_{Last} sowie der Lichtmaschinen- und der Akkumulator-Quellenspannung, die wiederum von der Motordrehzahl bzw. dem Ladezustand abhängen.

2.4.3.4 Modifiziertes Verfahren zur Behandlung von Stromquellen

Enthält ein zu analysierendes Netzwerk einen oder mehrere Zweige mit einer *idealen Stromquelle*, sind bei Anwendung des in Abschnitt 2.4.3.2 beschriebenen Verfahrens die zugehörigen Zweigströme im Vektor \vec{I} bekannt; dafür treten im Vektor \vec{U} nun auch unbekannte Spannungsabfälle über den Stromquellen auf. Dies erfordert ein Umordnen der betroffenen Gleichungen, bevor das lineare Gleichungssystem gelöst werden kann.

Alternativ kann das oben beschriebene Verfahren an einigen Stellen durch eine Sonderbehandlung für diese Stromquellen modifiziert werden. Bei Anwendung der nachfolgend vorgeschlagenen Ergänzungen zu dem Verfahren aus Abschnitt 2.4.3.2 lässt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem pro Zweig mit einer idealen Stromquelle um eine Gleichung reduzieren. Dies kann bei der Netzwerkanalyse mit einem Taschenrechner den Rechenaufwand erheblich verringern.

- Zu 1.: Alle Parallelschaltungen aus einer idealen Stromquelle und einem linearen Widerstand werden als *lineare Stromquellen* aufgefasst und in lineare Spannungsquellen umgewandelt. Hierdurch verringert sich die Zahl der Zweige im Netzwerk und damit die Anzahl der Gleichungen im Gleichungssystem jeweils um eins.
- Zu 3.: Der vollständige Baum wird so gewählt, dass Zweige mit *idealen Stromquellen* in Verbindungszweigen liegen. Dadurch wird erreicht, dass die unbekannt­en Spannungen über diesen Stromquellen jeweils nur in einer Maschengleichung auftreten.

- Zu 4.: Die Maschengleichungen für Verbindungszweige, die eine *ideale Stromquelle* enthalten, werden zwar aufgestellt, jedoch nicht dem Gleichungssystem hinzugefügt.
- Zu 5.: Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems ist um die Anzahl der Stromquellen kleiner als die Anzahl z der Zweige.
- Zu 6.: Die Spannungsabfälle über *idealen Stromquellen* werden mittels je einer der Maschengleichungen, die unter 4. aufgestellt, aber bisher nicht verwendet wurden, *einzeln* berechnet. Anschließend wird für *lineare Stromquellen*, die unter 1. in lineare Spannungsquellen umgewandelt wurden, aus dem unter 5. berechneten Zweigstrom der Strom durch den Parallelwiderstand der Stromquelle und daraus die Spannung über der Stromquelle berechnet.

Beispiel 2.34: Anwendung der Knoten- und Maschenanalyse auf ein Netzwerk mit Stromquelle

Für die Schaltung in Bild 2.75a sind die unbekanntes Zweigströme sowie die Spannung über der Stromquelle zu berechnen. Die Werte der Widerstände R_1 , R_2 , R_3 sowie die Quellenparameter I_{q4} und U_{q5} seien bekannt.

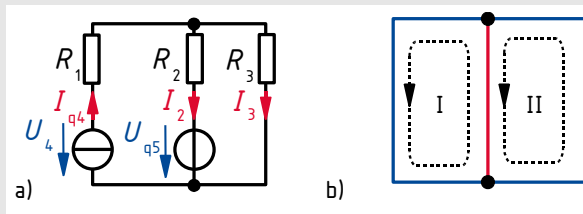


Bild 2.75: Einfaches Gleichstromnetzwerk mit Stromquelle (a) und vollständiger Baum mit Bezeichnung der Maschen (b)

Die Schaltung enthält $z = 3$ Zweige und $k = 2$ Knoten. Es sind also $k - 1 = 1$ Knotengleichung und $m = z - k + 1 = 2$ Maschengleichungen aufzustellen. Somit ist prinzipiell ein lineares Gleichungssystem mit $z = 3$ Gleichungen zu lösen. Mit der oben beschriebenen Sonderfallbehandlung von Stromquellen lässt sich das zu lösende Gleichungssystem um eine Gleichung reduzieren. Hierzu wird ein vollständiger Baum gewählt, bei dem die Stromquelle in einem Verbindungszweig liegt, z. B. entsprechend Bild 2.75b. Die Knotengleichung wird für den unteren Knoten aufgestellt:

$$K: \quad -I_{q4} + I_2 + I_3 = 0$$

Die Maschenumläufe werden entsprechend Bild 2.75b in den „Augen“ der Schaltung im mathematisch positiven Sinn durchgeführt und ergeben

$$M_I: \quad -U_{q5} - I_2 R_2 - I_{q4} R_1 + U_4 = 0,$$

$$M_{II}: \quad -I_3 R_3 + I_2 R_2 + U_{q5} = 0.$$

Die unbekannte Spannung über der Stromquelle erscheint nur in der ersten Maschengleichung, die zunächst zurückgestellt wird. Die Knotengleichung und die zweite Maschengleichung bilden ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntes Zweigströme

I_2 und I_3 , aus dem nach wenigen Schritten das Ergebnis

$$I_2 = I_{q4} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}, \quad I_3 = I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}$$

folgt. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die zurückgestellte erste Maschengleichung erhält man die Spannung über der Stromquelle

$$U_4 = I_{q4} \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) + U_{q5} \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \right).$$

Die Zweigströme und die Spannung über der Stromquelle setzen sich deutlich erkennbar entsprechend Gl. (2.153) aus je zwei Anteilen zusammen, die durch die beiden im Netzwerk enthaltenen Quellen verursacht werden.

2.4.4 Anwendung des Überlagerungssatzes

Der Überlagerungssatz eröffnet eine Möglichkeit zur *Analyse linearer Netzwerke mit mehreren Quellen*. Er nutzt die in Abschnitt 2.4.1.1 erläuterte Eigenschaft der *Additivität* bei *linearen Systemen*.

Die Anwendung des Überlagerungssatzes ist bei beliebigen linearen Systemen möglich, also nicht auf elektrische Netzwerke beschränkt und wird auch als *Superpositionsverfahren* bezeichnet.

Die Verwendung des Überlagerungssatzes zur Berechnung elektrischer Netzwerke geht auf den deutschen Physiker von Helmholtz zurück.

Das Superpositionsverfahren ist *kein eigenständiges Analyseverfahren*, sondern wird in Verbindung mit anderen Verfahren (s. insbesondere Abschnitte 2.4.3 und 2.4.5) oder einfach mit den Kirchhoffschen Gesetzen verwendet.

2.4.4.1 Prinzip des Verfahrens

Der Überlagerungssatz kann allgemeingültig folgendermaßen formuliert werden:

Bei einem linearen System mit mehreren voneinander unabhängigen Ursachengrößen lässt sich eine (resultierende) Wirkungsgröße durch Überlagerung (d. h. bei skalaren Größen vorzeichenrichtige Addition) der Teilwirkungen der einzelnen Ursachen berechnen.

Im Rahmen der Netzwerkanalyse ist der Überlagerungssatz nur anwendbar bei linearen Netzwerken, die mehrere unabhängige¹⁰ Quellen enthalten. Empfehlenswert ist die Anwendung des Überlagerungssatzes, wenn in einem Netzwerk mit mehreren Quellen nur wenige Größen (meist Zweigströme) gesucht sind. Eine Anwendung des Überlagerungssatzes im Rahmen einer vollständigen Netzwerkanalyse ist meist nicht ratsam.

Sollen in einem Netzwerk Leistungen berechnet werden, ist unbedingt zu beachten, dass zunächst die hierfür erforderlichen *resultierenden* Werte der Ströme und Spannungen ermittelt werden müssen und erst danach die Leistungen berechnet werden dürfen. Eine Berechnung von Teilleistungen aus den Teilströmen bzw. Teilspannungen mit anschließender Überlagerung zur Gesamtleistung führt zu falschen Ergebnissen, da der Zusammenhang zwischen Strömen bzw. Spannungen und Leistungen *nichtlinear* ist, vgl. Gl. (2.58) und Gl. (2.59).

¹⁰Also Quellen, deren Quellengröße nicht von anderen elektrischen Größen im Netzwerk abhängt.

2.4.4.2 Vorgehensweise

Zunächst sind, sofern nicht gegeben, *Zählpfeile* für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen. Die Anwendung des Überlagerungssatzes erfolgt danach in 4 Schritten:

1. Ggf. *Vereinfachen* von Schaltungsteilen, die keine Quelle enthalten und deren elektrische Größen nicht gesucht sind (Abschnitt 2.4.1.6).
2. *Deaktivieren* aller *Quellen* im Netzwerk bis auf die gerade betrachtete (Abschnitt 2.1.3.4). Bei Spannungsquellen wird also die Quellenspannung auf null gesetzt, bei Stromquellen der Quellenstrom. Ideale Spannungsquellen wirken¹¹ dann wie ein Kurzschluss, ideale Stromquellen wie eine Unterbrechung.
3. *Berechnen* der gesuchten Teilströme bzw. Teilspannungen mit einem beliebigen Verfahren.
4. Nachdem die Schritte 2. und 3. für alle Quellen im Netzwerk durchgeführt worden sind, *Überlagern* der durch die einzelnen Quellen bewirkten Teilströme bzw. Teilspannungen zu den resultierenden Größen. Dabei sind die Richtungen der Zählpfeile der Teilgrößen und der Gesamtgröße zu beachten, da diese nicht unbedingt übereinstimmen müssen.

Zur Berechnung der durch eine bestimmte Quelle hervorgerufenen Teilströme ist es häufig sinnvoll, auf den durch die Quelle fließenden Gesamtstrom (ggf. mehrfach) die *Stromteilerregel* anzuwenden. Bei idealen Stromquellen ist dieser Gesamtstrom bereits gegeben. Bei idealen Spannungsquellen kann er aus der Quellenspannung und dem *resultierenden Lastwiderstand* der Quelle oft einfach berechnet werden.

Beispiel 2.35: Anwendung des Überlagerungssatzes auf ein einfaches Netzwerk

Das in Bild 2.76a dargestellte lineare Netzwerk wurde bereits in Beispiel 2.34 mittels der Knoten- und Maschenanalyse untersucht. Nun sollen mittels des Überlagerungssatzes die unbekanntenen Zweigströme sowie die Spannung über der Stromquelle berechnet werden.

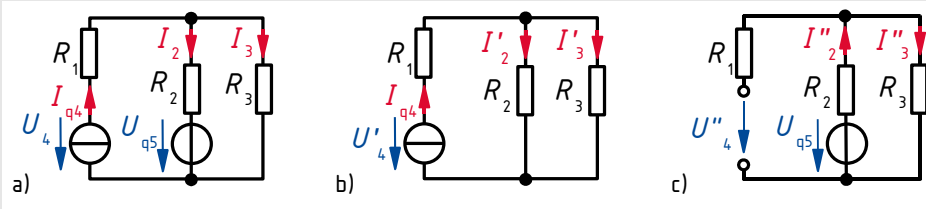


Bild 2.76: Lineares Gleichstromnetzwerk mit zwei Quellen (a), Teilnetzwerk mit deaktivierter Spannungsquelle (b), Teilnetzwerk mit deaktivierter Stromquelle (c)

Zunächst wird die Wirkung des Quellenstroms I_{q4} untersucht. Dazu wird die Spannungsquelle deaktiviert, d. h. $U_{q5} = 0$ gesetzt. Der Strom I_{q4} teilt sich im oberen Knoten in zwei Teilströme I'_2 und I'_3 auf (Zählpfeile in Bild 2.76b), die mittels der Stromteilerregel in der

¹¹Die Formulierung „Spannungsquellen werden kurzgeschlossen“ ist irreführend und sollte vermieden werden.

Form von Gl. (2.106) berechnet werden:

$$I_2' = I_{q4} \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3' = I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Die Spannung über der Stromquelle folgt aus der Anwendung des Maschensatzes auf die linke oder die äußere Masche:

$$U_4' = I_{q4} R_1 + I_2' R_2 = I_{q4} R_1 + I_3' R_3 = I_{q4} \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

Nun wird die Wirkung der Spannungsquelle untersucht, wofür die Stromquelle durch eine Unterbrechung ersetzt wird (Bild 2.76c). Die Spannungsquelle kann nur einen Strom durch die rechte Masche treiben. Mit den Zählpfeilen in Bild 2.76c folgt

$$I_2'' = I_3'' = \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}.$$

Ein Maschenumlauf um die äußere Masche liefert die Spannung über der Stromquelle:

$$U_4'' = I_3'' R_3 = U_{q5} \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Da durch den Widerstand R_1 kein Strom fließt, taucht er in der Gleichung für U_4'' nicht auf.

Nun müssen die Teilströme und Teilspannungen unter Berücksichtigung ihrer Zählpfeilrichtungen überlagert werden:

$$I_2 = I_2' - I_2'' = I_{q4} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}$$

$$U_4 = U_4' + U_4'' = I_{q4} \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) + U_{q5} \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

Die Berechnung der Teilnetzwerke erforderte lediglich die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze. Das Ergebnis der Berechnung stimmt natürlich mit dem des Beispiels 2.34 überein.

Beispiel 2.36: Reihenschaltung linearer Quellen an einem Lastwiderstand

Der Strom I in der Schaltung in Bild 2.77a soll mit dem Überlagerungssatz ermittelt werden.

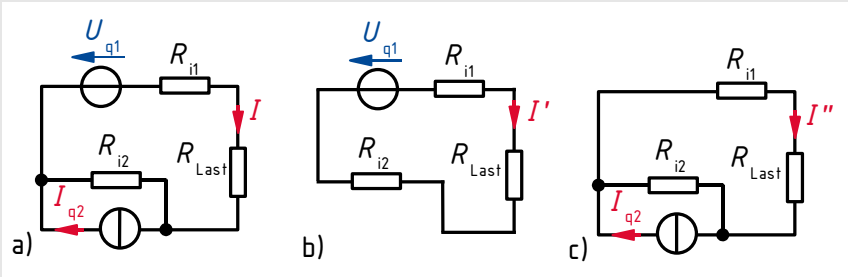


Bild 2.77: Schaltung mit einer Strom- und einer Spannungsquelle (a) und Teilschaltungen mit jeweils nur einer wirksamen Quelle (b), (c)

Zunächst wird die ideale Stromquelle I_{q2} deaktiviert, also gemäß Bild 2.77b durch eine Unterbrechung ersetzt. Von der linearen Stromquelle bleibt somit nur der Innenwiderstand R_{i2} wirksam. Man erhält dann für den durch die Spannungsquelle bewirkten Teilstrom

$$I' = \frac{U_{q1}}{R_{i1} + R_{i2} + R_{\text{Last}}}.$$

Dann wird die ideale Spannungsquelle U_{q1} gemäß Bild 2.77c durch einen Kurzschluss ersetzt. Jetzt erhält man mit der Stromteilerregel in der Form von Gl. (2.106) den durch die Stromquelle bewirkten Teilstrom

$$I'' = I_{q2} \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_{i1} + R_{\text{Last}}}.$$

Insgesamt fließt durch den Verbraucher R_{Last} der Strom

$$I = I' + I'' = \frac{U_{q1} + R_{i2} I_{q2}}{R_{i1} + R_{i2} + R_{\text{Last}}}.$$

Beispiel 2.37: Parallelschaltung linearer Quellen an einem Lastwiderstand

Die bereits in Beispiel 2.33 behandelte Schaltung, die in Bild 2.78a in leicht abgewandelter Form wiedergegeben ist, soll mit Hilfe des Überlagerungssatzes berechnet werden. Gesucht ist der Strom I_2 durch den Akkumulator, wenn der Lastwiderstand den Wert $R_{\text{Last}} = 6 \Omega$ hat.

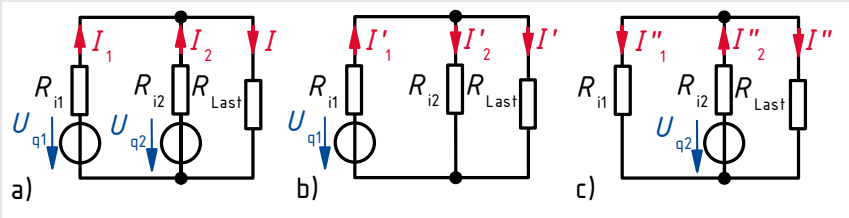


Bild 2.78: Schaltung mit zwei Spannungsquellen (a) und Teilschaltungen mit jeweils nur einer wirksamen Spannungsquelle (b), (c)

Zunächst wird gemäß Bild 2.78b die Spannungsquelle U_{q2} deaktiviert. Mit dem die aktive Quelle belastenden Gesamtwiderstand, der mit den Gln. (2.111) und (2.96) zu

$$R' = R_{i1} + \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{Last}}} + \frac{1}{R_{i2}}} = 0,25 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{6 \Omega} + \frac{1}{0,12 \Omega}} = 0,3676 \Omega$$

berechnet wird, erhält man den Strom durch die Quelle

$$I'_1 = \frac{U_{q1}}{R'} = \frac{300 \text{ V}}{0,3676 \Omega} = 816 \text{ A}$$

und mit der Stromteilerregel Gl. (2.106) den gesuchten Teilstrom

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_{\text{Last}}}{R_{\text{Last}} + R_{i2}} = 816 \text{ A} \frac{6 \Omega}{6 \Omega + 0,12 \Omega} = 800 \text{ A}.$$

Nun wird gemäß Bild 2.78c die Spannungsquelle U_{q1} deaktiviert. Aus dem die Quelle U_{q2} belastenden Gesamtwiderstand

$$R'' = R_{i2} + \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{Last}}} + \frac{1}{R_{i1}}} = 0,12 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{6 \Omega} + \frac{1}{0,25 \Omega}} = 0,36 \Omega$$

folgt direkt der zweite Teilstrom durch den Akkumulator

$$I''_2 = \frac{U_{q2}}{R''} = \frac{270 \text{ V}}{0,36 \Omega} = 750 \text{ A}.$$

Schließlich werden die Teilströme I'_2 und I''_2 unter Berücksichtigung der Zählpfeilrichtungen zum Gesamtstrom

$$I_2 = -I'_2 + I''_2 = -800 \text{ A} + 750 \text{ A} = -50 \text{ A}$$

überlagert. Da die Zählpfeile für die Klemmengrößen des Akkumulators im Erzeuger-Zählpfeilsystem angetragen sind und U_{q2} positiv ist, ergibt sich nach Gl. (2.55) für die in der Quelle umgesetzte Leistung ein negativer Wert. Das bedeutet nach Abschnitt 2.1.4.3, dass die Quelle Leistung aufnimmt, also als Verbraucher wirkt. Der Akkumulator wird somit im hier betrachteten Lastfall geladen.

2.4.5 Netzwerkanalyse mit Ersatz-Quellen

Die nachfolgend beschriebene Netzwerkanalyse mit Ersatz-Quellen ist empfehlenswert, wenn in einem *linearen Netzwerk* nur die *Klemmengrößen eines passiven Zweipols* von Interesse sind. In der Gleichstromtechnik kann dieser passive Zweipol nur ein Ohmscher Widerstand sein. Besonders hilfreich ist das Verfahren, wenn das Netzwerk für unterschiedliche Werte des passiven Zweipols betrachtet wird. Dies ist z. B. der Fall, wenn dieser Zweipol so dimensioniert werden soll, dass die in ihm umgesetzte Leistung maximal wird (Leistungsanpassung, Abschnitt 2.1.4.5).

2.4.5.1 Prinzip des Verfahrens

Betrachtet wird ein aus beliebig vielen aktiven und passiven Zweipolen bestehendes lineares Netzwerk.

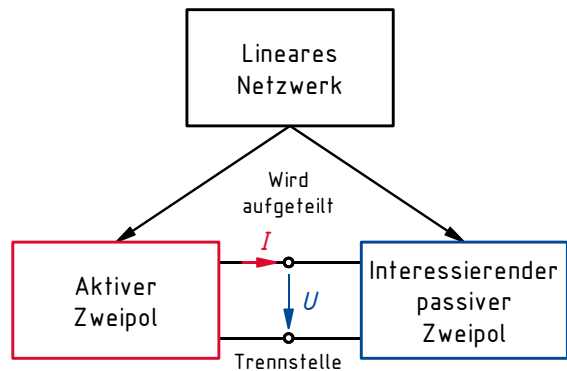


Bild 2.79: Aufteilung eines Netzwerks in zwei verbundene Zweipole

Dieses Netzwerk wird gedanklich *in zwei Teile aufgeteilt*, die über ein gemeinsames Klemmenpaar gemäß Bild 2.79 miteinander verbunden sind:

- Einen *passiven Zweipol*, dessen elektrische Klemmengrößen gesucht sind.
- Das restliche *lineare aktive Teilnetzwerk*, das das Originalnetzwerk ohne den Zweig mit dem passiven Zweipol umfasst. Die Klemmen können als die *Ausgangsklemmen* dieses aktiven Zweipols aufgefasst werden.

Da vom linearen aktiven Zweipol nur das *Klemmenverhalten* interessiert (nicht aber irgendwelche Ströme, Spannungen oder umgesetzten Leistungen im Inneren), kann er durch einen einfacheren, *bezüglich des Klemmenverhaltens äquivalenten Ersatz-Zweipol* modelliert werden.

Das Klemmenverhalten *jedes* linearen aktiven Zweipols lässt sich mittels des Modells der *linearen Quelle* (Abschnitt 2.1.3.3) beschreiben. Daher wird das Modell des aktiven Zweipols hier als „*Ersatz-Quelle*“ bezeichnet.

Die Zählpfeile für die Klemmengrößen werden üblicherweise so gewählt, dass sie für den aktiven Zweipol ein Erzeuger-Zählpfeilsystem und damit für den passiven Zweipol ein Verbraucher-Zählpfeilsystem bilden (Bild 2.79).

2.4.5.2 Ersatz-Spannungsquelle

Nach dem *Satz von Helmholtz* (in der englischsprachigen Literatur als *Thévenin's Theorem* bezeichnet) kann das Klemmenverhalten jedes linearen aktiven Zweipols (Bild 2.80a) durch eine *Ersatz-Spannungsquelle* gemäß Bild 2.80b modelliert werden.

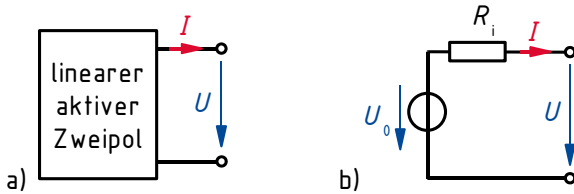


Bild 2.80: Linearer aktiver Zweipol (a) und Ersatz-Spannungsquelle (b)

In Verbindung mit den Zählpfeilen für die Klemmengrößen wird das Klemmenverhalten einer Ersatz-Spannungsquelle vollständig durch die beiden Parameter *Quellenspannung* U_0 und *Innenwiderstand* R_i beschrieben. Die Quellenspannung bildet die Wirkung aller idealen Quellen, der Innenwiderstand die Wirkung aller passiven Elemente innerhalb des aktiven Zweipols bezüglich des betrachteten Klemmenpaares nach. U_0 ist die *Leerlaufspannung* an den Klemmen des aktiven Zweipols, d. h. die Klemmenspannung U ohne Belastung durch den passiven Zweipol. R_i ist der Widerstand zwischen den Klemmen des aktiven Zweipols, wenn alle idealen Quellen in ihm deaktiviert, ihre Quellengrößen also gleich null gesetzt werden (Abschnitt 2.1.3.4).

Beispiel 2.38: Veranschaulichung des Satzes von Helmholtz

Dieses Beispiel soll den *Denkansatz* zur Bestimmung der Parameter einer Ersatz-Spannungsquelle veranschaulichen, nicht den Rechenweg. Dazu wird der aktive Zweipol mit den Klemmen a und b in Bild 2.81a betrachtet. Er besteht aus einer linearen Spannungsquelle mit den Parametern U_{q1} und R_1 , einer linearen Stromquelle mit den Parametern I_{q2} und R_2 sowie den linearen Widerständen R_3 und R_4 .

Wenn die Klemmen a und b des Zweipols leerlaufen, tritt zwischen ihnen eine (noch unbekannte) Leerlaufspannung U_0 auf. Dieser Sachverhalt lässt sich dadurch nachbilden, dass man alle *idealen* Quellen deaktiviert und statt ihrer eine neue ideale Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_0 einführt, die gemäß Bild 2.81b in Reihe mit einer der Klemmen liegt. Diese Quelle kann keinen Strom durch irgendeinen der Widerstände und damit auch keinen Spannungsabfall über einem der Widerstände bewirken. Von den linearen Quellen bleiben nur die Innenwiderstände R_1 und R_2 übrig. Auf diese Weise kann die Wirkung der Quellenspannung U_{q1} und des Quellenstroms I_{q2} durch die Ersatz-Quellenspannung U_0 nachgebildet werden. Die Berechnung des Wertes von U_0 ist z. B. mittels des Überlagerungssatzes möglich.

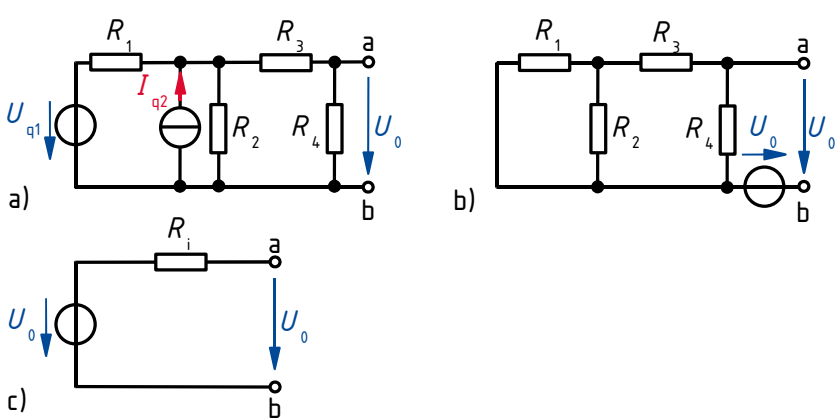


Bild 2.81: Leerlaufender aktiver Zweipol (a) mit den Ausgangsklemmen a und b nach dem Ersetzen der idealen Quellen durch eine Ersatz-Quellenspannung U_0 (b) und Ersatz-Spannungsquelle (c) mit Innenwiderstand R_i

Die Wirkung der Widerstände R_1 , R_2 , R_3 und R_4 in Bild 2.81b kann durch einen einzigen Widerstand nachgebildet werden, der als Innenwiderstand R_i einer linearen Spannungsquelle gemäß Bild 2.81c aufgefasst werden kann. Die Berechnung des Wertes von R_i ist immer durch Anwendung der Gleichungen in den Abschnitten 2.2.3.1, 2.2.4.1 und ggf. 2.2.7 möglich.

2.4.5.3 Ersatz-Stromquelle

Nach dem *Satz von Mayer* (in der englischsprachigen Literatur als *Norton's Theorem* bezeichnet) kann das Klemmenverhalten jedes linearen aktiven Zweipols (Bild 2.82a) durch eine *Ersatz-Stromquelle* gemäß Bild 2.82b modelliert werden.

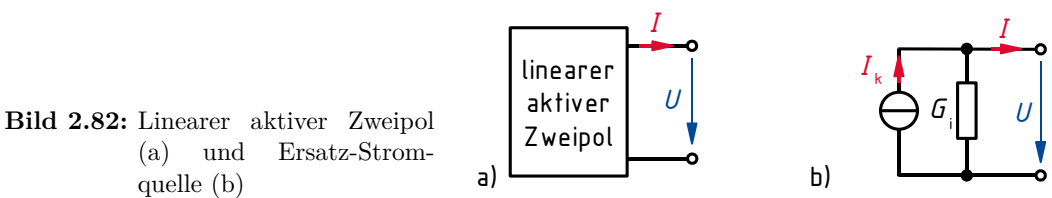


Bild 2.82: Linearer aktiver Zweipol (a) und Ersatz-Stromquelle (b)

In Verbindung mit den Zählpfeilen für die Klemmengrößen wird das Klemmenverhalten einer Ersatz-Stromquelle vollständig durch die beiden Parameter *Quellenstrom* I_k und *Innenleitwert* G_i beschrieben.

Der Quellenstrom bildet die Wirkung aller idealen Quellen, der Innenleitwert die Wirkung aller passiven Elemente innerhalb des aktiven Zweipols bezüglich des betrachteten Klemmenpaares nach.

I_k ist der *Kurzschlussstrom* über die Klemmen des aktiven Zweipols, d. h. der Strom I , der bei externem Kurzschluss der Klemmen des Zweipols fließt.

G_i ist gleich dem Leitwert zwischen den Klemmen des aktiven Zweipols, wenn alle idealen Quellen in ihm deaktiviert, ihre Quellengrößen also gleich null gesetzt werden (Abschnitt 2.4.3).

2.4.5.4 Vorgehensweise

Das Klemmenverhalten eines linearen aktiven Zweipols kann fast immer¹² sowohl durch eine Ersatz-Spannungsquelle gemäß Abschnitt 2.4.5.2 als auch durch eine Ersatz-Stromquelle gemäß Abschnitt 2.4.5.3 nachgebildet werden. Wählt man

$$U_0 = R_i I_k \quad (2.159)$$

und

$$G_i = 1/R_i, \quad (2.160)$$

so zeigen beide Typen von Ersatz-Quellen identisches Klemmenverhalten.

Daraus folgt, dass man zur Ermittlung der Parameter eines der beiden Ersatz-Quellenmodelle nicht darauf angewiesen ist, *entweder* Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i der Ersatz-Spannungsquelle *oder* Quellenstrom I_k und Innenleitwert G_i der Ersatz-Stromquelle zu bestimmen, sondern dass auch die Bestimmung von U_0 und I_k ausreicht, da R_i mittels Gl. (2.159) und ggf. G_i mittels (2.160) aus diesen Parametern berechenbar ist. Die Zulässigkeit dieses Ansatzes ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Gerade, die das Klemmenverhalten einer beliebigen linearen Quelle darstellt, wird durch zwei *beliebige*, unterschiedliche Arbeitspunkte (Bild 2.23) *vollständig* beschrieben. Zur Bestimmung der Parameter U_0 und I_k betrachtet man zwei mathematisch besonders einfach zu handhabende Arbeitspunkte, nämlich den Leerlauf- und den Kurzschlussfall beim aktiven Zweipol und seiner Ersatz-Quelle.

Zur Berechnung von U_0 und I_k werden oft der *Überlagerungssatz* (Abschnitt 2.4.4) sowie die *Stromteilerregel* (Abschnitt 2.2.3.2) angewandt.

Bei Netzwerken mit wenigen Zweipolen kann die Berücksichtigung der folgenden Hinweise eventuell helfen, den Rechenaufwand zu minimieren:

Liegen gemäß Bild 2.83a innerhalb des aktiven Zweipols Widerstände *direkt in Reihe zu dem betrachteten Klemmenpaar*, so sollte zunächst die Leerlaufspannung U_0 ermittelt werden, da über den stromlosen Widerständen keine Spannung abfällt und sie daher keinen Einfluss auf diesen Parameter haben.

Liegen gemäß Bild 2.83b innerhalb des aktiven Zweipols Widerstände *direkt parallel zu dem betrachteten Klemmenpaar*, sollte zunächst der Kurzschlussstrom I_k ermittelt werden, da durch die spannungslosen Widerstände kein Strom fließt und sie daher keinen Einfluss auf diesen Parameter haben.

Nach der Bestimmung der Parameter der Ersatz-Quelle wird die Gesamtschaltung, nun modelliert durch die Ersatz-Quelle und den passiven Zweipol, betrachtet. Besteht der passive Zweipol

¹²Die einzige Ausnahme ist der Spezialfall, dass der lineare aktive Zweipol eine ideale Quelle ist. Dann kann der aktive Zweipol nur durch eine Ersatz-Quelle des entsprechenden Typs nachgebildet werden. Dieser triviale Fall wird hier nicht weiter berücksichtigt.

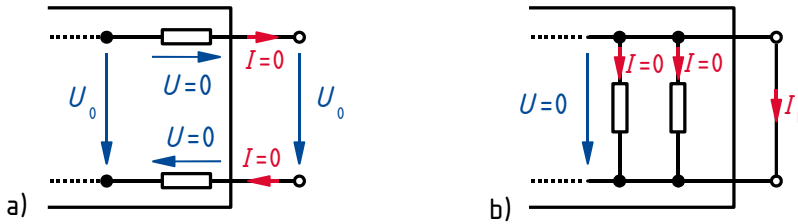


Bild 2.83: Vereinfachung der Berechnung der Ersatzquellen-Parameter bei Widerständen am Ausgang des aktiven Zweipols in Reihe zum Ausgang bei Leerlauf (a) bzw. parallel zum Ausgang bei Kurzschluss (b)

aus einem Widerstand R_a , so sind die gesuchten Klemmengrößen am passiven Zweipol (Zählpfeile gemäß Bild 2.80 bzw. 2.82) sehr einfach zu berechnen. Im Fall der Ersatz-Spannungsquelle gilt

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a}, \quad (2.161)$$

$$U = I R_a = U_0 \frac{R_a}{R_i + R_a}, \quad (2.162)$$

im Fall der Ersatz-Stromquelle folgt aus der Stromteilerregel (2.106)

$$I = I_k \frac{R_i}{R_i + R_a}, \quad (2.163)$$

$$U = I R_a = I_k \frac{R_i R_a}{R_i + R_a}. \quad (2.164)$$

Beispiel 2.39: Bestimmung der Parameter einer Ersatz-Spannungsquelle

Die Schaltung in Bild 2.84a enthält eine lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_{q1} = 18 \text{ V}$ und dem Innenwiderstand $R_{i1} = 5 \Omega$, die über einen Widerstand $R = 7 \Omega$ zu einer linearen Stromquelle mit dem Quellenstrom $I_{q2} = 2 \text{ A}$ und dem Innenwiderstand $R_{i2} = 8 \Omega$ parallel geschaltet ist. Für diese Schaltung sollen die Parameter U_0 und R_i der Ersatz-Spannungsquelle nach Bild 2.84b bestimmt werden.

Zur Ermittlung des Innenwiderstandes R_i wird in Bild 2.84a die ideale Spannungsquelle durch einen Kurzschluss und die ideale Stromquelle durch eine Leitungsunterbrechung ersetzt. Zwischen den Klemmen a und b liegt dann der Innenleitwert

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{i1} + R} + \frac{1}{R_{i2}} = \frac{1}{5 \Omega + 7 \Omega} + \frac{1}{8 \Omega} = \frac{1}{4,8 \Omega}.$$

Die Berechnung des Kurzschlussstroms ist mit geringerem Rechenaufwand verbunden als die Ermittlung der Leerlaufspannung, da der Widerstand R_{i2} und bei Deaktivierung der Spannungsquelle auch die Reihenschaltung von R_{i1} und R parallel zu den Klemmen liegen.

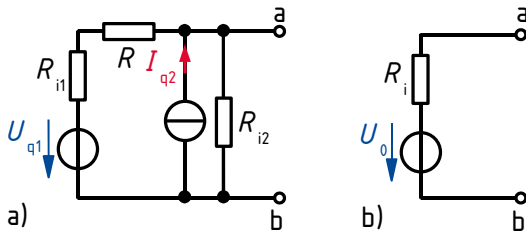


Bild 2.84: Modellierung des Klemmenverhaltens eines aktiven Zweipols (a) durch eine Ersatz-Spannungsquelle (b)

Unter Verwendung des Überlagerungssatzes (Abschnitt 2.4.4) erhält man den durch den externen Kurzschluss von der Klemme a zur Klemme b fließenden Kurzschlussstrom

$$I_k = \frac{U_{q1}}{R_{i1} + R} + I_{q2} = \frac{18 \text{ V}}{5 \Omega + 7 \Omega} + 2 \text{ A} = 3,5 \text{ A}.$$

Die Leerlaufspannung der Ersatz-Spannungsquelle liefert Gl. (2.159):

$$U_0 = R_i I_k = 4,8 \Omega \cdot 3,5 \text{ A} = 16,8 \text{ V}$$

Die Ersatz-Spannungsquelle in Bild 2.84b hat also die Leerlaufspannung $U_0 = 16,8 \text{ V}$ und den Innenwiderstand $R_i = 4,8 \Omega$.

Beispiel 2.40: Bestimmung der Parameter einer Ersatz-Stromquelle

Für die Schaltung in Bild 2.85a, die aus einer idealen Spannungsquelle mit $U_q = 20 \text{ V}$ und den Widerständen $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 7 \Omega$ und $R_3 = 17,9 \Omega$ besteht, sollen die Parameter der Ersatz-Stromquelle nach Bild 2.85b bestimmt werden.

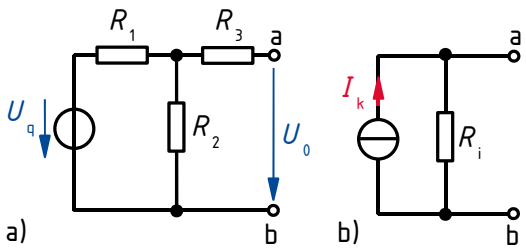


Bild 2.85: Modellierung des Klemmenverhaltens eines aktiven Zweipols (a) durch eine Ersatz-Stromquelle (b)

Nachdem die ideale Spannungsquelle in Bild 2.85a durch einen Kurzschluss ersetzt wurde, liegt zwischen den Klemmen a und b der Innenwiderstand

$$R_i = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 17,9 \Omega + \frac{3 \Omega \cdot 7 \Omega}{3 \Omega + 7 \Omega} = 20 \Omega.$$

Die Berechnung der Leerlaufspannung ist mit geringerem Rechenaufwand verbunden als die Ermittlung des Kurzschlussstroms, da der Widerstand R_3 in Reihe zu den Klemmen liegt und somit die Leerlaufspannung nicht beeinflusst. Über die Spannungsteilerregel Gl. (2.116) erhält man mit dem Zählpfeil für U_0 in Bild 2.85a unmittelbar

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_q = \frac{7 \Omega}{3 \Omega + 7 \Omega} 20 \text{ V} = 14 \text{ V}.$$

Aus Gl. (2.159) ergibt sich der Kurzschlussstrom

$$I_k = \frac{U_0}{R_i} = \frac{14 \text{ V}}{20 \Omega} = 700 \text{ mA}.$$

Dieses Beispiel zeigt ebenso wie Beispiel 2.39, dass es nicht unbedingt am einfachsten ist, zunächst den Parameter der idealen Quelle zu bestimmen, der zu dem gesuchten Ersatz-Quellentyp gehört.

Beispiel 2.41: Anwendung einer Ersatz-Spannungsquelle zur Netzwerkanalyse

Das Netzwerk in Bild 2.86a enthält die Widerstände $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_4 = 25 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$ sowie die Quellenspannungen $U_{q1} = 16,2 \text{ V}$ und $U_{q2} = 11,4 \text{ V}$. Der Strom I_3 soll in Abhängigkeit vom Wert des Widerstandes R_3 berechnet werden. Weiterhin ist der Wert von R_3 gesucht, bei dem die von R_3 aufgenommene Leistung maximal wird.

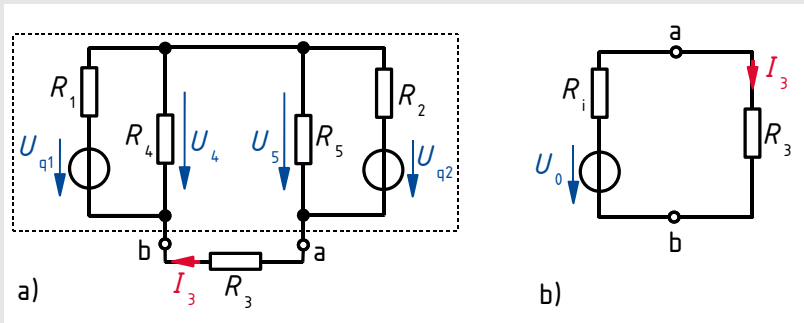


Bild 2.86: Netzwerk (a) mit unbekanntem Strom I_3 und Ersatz-Spannungsquelle (b) zur Bestimmung dieses Stroms

Zur Lösung solcher Aufgabenstellungen ist das Verfahren der Ersatz-Quellen hervorragend geeignet.

Zunächst wird der Widerstand R_3 an den Klemmen a und b vom restlichen Netzwerk abgetrennt. Für die nachfolgenden Rechenschritte sind die Klemmen a und b also offen. Man erhält den Innenwiderstand R_i des gestrichelt eingerahmten aktiven Zweipols in Bild 2.86a, indem man die beiden idealen Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt, wodurch eine Reihenschaltung zweier Parallelschaltungen von Widerständen mit dem Gesamtwiderstand

$$R_i = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{1 \Omega \cdot 25 \Omega}{1 \Omega + 25 \Omega} + \frac{2 \Omega \cdot 40 \Omega}{2 \Omega + 40 \Omega} = 2,87 \Omega$$

entsteht. Der Maschensatz liefert den Ansatz zur Berechnung der Leerlaufspannung zwischen den Klemmen a und b:

$$U_0 = U_4 - U_5$$

Die Spannungen U_4 und U_5 über den Widerständen R_4 und R_5 folgen aus der Anwendung der Spannungsteilerregel auf die beiden verbliebenen Maschen, in denen die Spannungsquellen liegen:

$$U_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_4} U_{q1} = \frac{25 \Omega}{1 \Omega + 25 \Omega} 16,2 \text{ V} = 15,6 \text{ V}$$

$$U_5 = \frac{R_5}{R_2 + R_5} U_{q2} = \frac{40 \Omega}{2 \Omega + 40 \Omega} 11,4 \text{ V} = 10,9 \text{ V}$$

Daraus folgt für die Leerlaufspannung

$$U_0 = U_4 - U_5 = 15,6 \text{ V} - 10,9 \text{ V} = 4,7 \text{ V}.$$

Die Parameter der Ersatz-Spannungsquelle in Bild 2.86b sind damit bekannt.

Nun wird der Widerstand R_3 nach Bild 2.86b an die Ersatz-Quelle geschaltet. Der gesuchte Strom durch den Widerstand R_3 folgt aus Gl. (2.161) zu

$$I_3 = \frac{U_0}{R_i + R_3} = \frac{4,7 \text{ V}}{2,87 \Omega + R_3}.$$

Die Funktion $I_3 = f(R_3)$ ist in Bild 2.87 grafisch dargestellt.

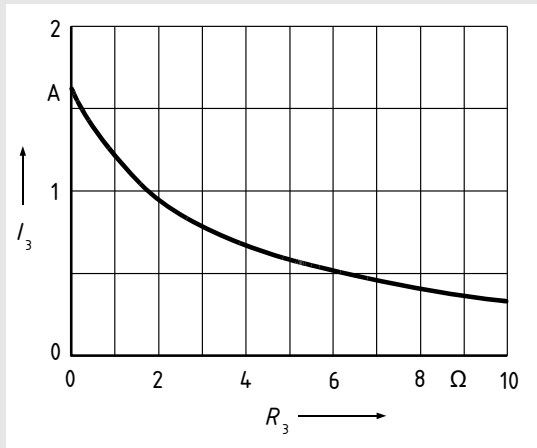


Bild 2.87: Funktion $I_3(R_3)$ für Beispiel 2.41

Nach Gl. (2.72) nimmt ein linearer Widerstand an einer linearen Quelle dann maximale Leistung auf, wenn sein Wert gleich dem des Innenwiderstandes der Quelle ist (Anpassungsfall). Daraus folgt unmittelbar die Bedingung $R_3 = R_i = 2,87 \Omega$ für maximale Leistungsaufnahme. Da das den Widerstand speisende *Original*-Netzwerk eine kompliziertere Struktur als eine lineare Spannungs- oder Stromquelle hat, ist der Wirkungsgrad der Gesamtschaltung in diesem Betriebsfall aber schlechter als 50%.

2.4.6 Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren (auch Maschenstromanalyse, Maschenanalyse oder Umlaufanalyse genannt) ist ein vereinfachtes Analyseverfahren für lineare Netzwerke. Das bei diesem Verfahren zu lösende Gleichungssystem ist stets kleiner als das bei der Knoten- und Maschenanalyse (Abschnitt 2.4.3) zu lösende.

2.4.6.1 Prinzip des Verfahrens

Jeder einzelne der m Verbindungszweige eines Netzwerks schließt über einen oder mehrere Baumzweige genau eine Masche des Netzwerks (Abschnitt 2.4.1.5). In jeder dieser unabhängigen Elementarmaschen nimmt man einen – zunächst unbekannt – Maschenstrom an. In jedem Verbindungszweig fließt also genau ein Maschenstrom. In jedem Baumzweig überlagern sich mindestens zwei Maschenströme zum Zweigstrom.

Beispiel 2.42: Zusammenhang zwischen Maschenströmen und Zweigströmen

Die Bilder 2.88a und 2.88b zeigen die Graphen zweier einfacher Netzwerke. Die Baumzweige sind rot, die Verbindungszweige blau dargestellt. Weiterhin sind in die Graphen die Zählpfeile für die Zweigströme eingetragen. Der Zusammenhang zwischen den zu wählenden Maschenströmen und den Zweigströmen ist aufzuzeigen.

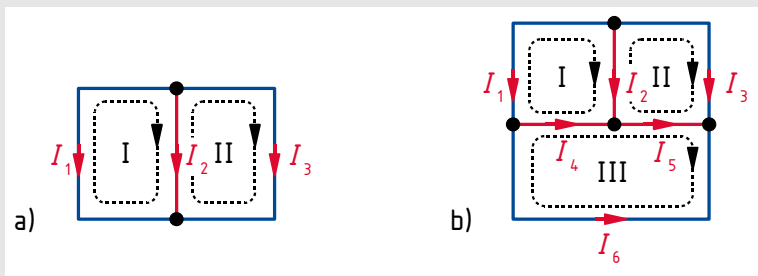


Bild 2.88: Beispiele für Maschenströme in unterschiedlichen Graphen

Jeder Verbindungszweig bildet mit einem (Bild 2.88a) bzw. zwei (Bild 2.88b) Baumzweigen genau eine Masche. In jeder Masche wird ein Umlauf eingetragen und mit I und II (Bild 2.88a) bzw. I bis III (Bild 2.88b) bezeichnet. Der Umlaufsinn ist willkürlich in allen Maschen im Uhrzeigersinn gewählt worden. Nun wird in jeder eingetragenen Masche ein Maschenstrom angenommen, dessen Zählpfeilrichtung mit der Richtung des Maschenumlaufs übereinstimmt und der als Index die Bezeichnung der Masche erhält. Damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen Maschen- und Zweigströmen für Bild 2.88a

$$I_1 = -I_I, \quad I_3 = I_{II}$$

und durch Anwendung des Knotensatzes auf einen der beiden Knoten

$$I_2 = -I_I - I_3 = I_I - I_{II}.$$

Man erkennt, dass der Zusammenhang zwischen dem Strom I_2 im Baumzweig und den Maschenströmen auch ohne explizites Aufstellen der Knotengleichung möglich ist:

Man braucht nur die durch den Baumzweig fließenden Maschenströme I_I und I_{II} unter Berücksichtigung der Zählfeilrichtungen der beteiligten Ströme zu überlagern.

Für Bild 2.88b ergibt sich entsprechend für die Ströme in den Verbindungszweigen

$$I_1 = -I_I, \quad I_3 = I_{II}, \quad I_6 = -I_{III}$$

und für die Ströme in den Baumzweigen

$$I_2 = I_I - I_{II}, \quad I_4 = -I_I + I_{III}, \quad I_5 = -I_{II} + I_{III}.$$

Beim Maschenstromverfahren werden m unabhängige *Maschengleichungen* aufgestellt, in denen *nicht die Zweigströme*, sondern die unbekannt *Maschenströme* auftreten. Die Lösung dieses *Gleichungssystems aus m Gleichungen* liefert zunächst die Werte der Maschenströme. Mit den Maschenströmen sind aber auch – bis auf ihre Vorzeichen – die Ströme in den *Verbindungszweigen* bekannt. Wählt man als Maschenströme die Ströme in den zugehörigen Verbindungszweigen, so entfällt die Umrechnung der Maschenströme in die Verbindungszweigsströme. Anschließend werden die $k - 1$ Ströme in den *Baumzweigen* durch Anwendung des Knotensatzes *einzeln* berechnet.

Um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten, ist es empfehlenswert, einen vollständigen Baum mit *sternförmiger Struktur* zu wählen. Dies führt zu einfacheren Maschengleichungen, da die Maschenströme nur durch wenige Baumzweige fließen. Weiterhin brauchen jeweils nur wenige Maschenströme überlagert zu werden, um die Baumzweigsströme zu berechnen.

Beispiel 2.43: Auswirkung der Baumstruktur auf die Komplexität der Maschengleichungen

Für den Graphen des Netzwerks in Bild 2.89a sind der vollständige Baum mit sternförmiger (Bild 2.89b) und ein vollständiger Baum mit linienförmiger (Bild 2.89c) Struktur hinsichtlich der Komplexität der zugehörigen Maschengleichungen zu vergleichen.

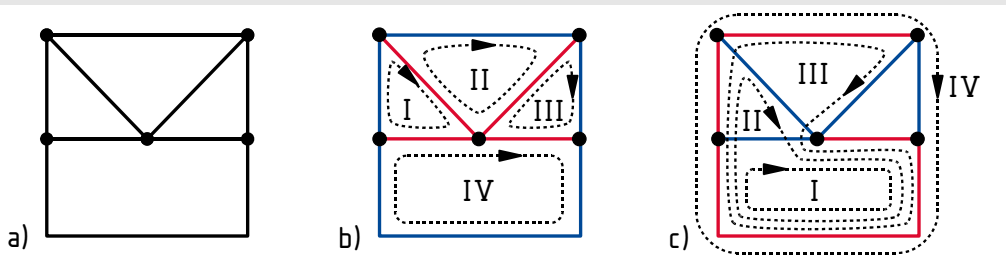


Bild 2.89: Graph eines Netzwerks (a) und vollständiger Baum mit sternförmiger (b) bzw. linienförmiger (c) Struktur mit zugehörigen Maschen

Der Graph enthält $k = 5$ Knoten und $z = 8$ Zweige. Jeder vollständige Baum des Graphen enthält also $k - 1 = 4$ Baumzweige; die restlichen $z - k + 1 = 4$ Zweige sind Verbindungszweige. Die zu den Verbindungszweigen gehörenden Maschen I, II, III und IV sind in den Bildern 2.89b und 2.89c gestrichelt eingezeichnet. Die Maschen in Bild 2.89b bestehen jeweils aus 3 Zweigen, die in Bild 2.89c aus 3, 4, 5 und 4 Zweigen. Je mehr Zweige eine Masche enthält, desto komplizierter wird die zugehörige Maschengleichung. Pro Baumzweig müssen in

Bild 2.89b jeweils 2 Maschenströme überlagert werden. In Bild 2.89c sind es 3, 4, 3 und 2 Maschenströme. Verallgemeinernd lässt sich feststellen, dass die Wahl eines vollständigen Baumes mit sternförmiger Struktur in zweifacher Hinsicht zu geringerem mathematischem Aufwand führt als die Wahl eines Baumes mit linienförmiger Struktur.

Die Anzahl

$$m = z - k + 1 \quad (2.165)$$

der unabhängigen Maschen ist bei jedem Netzwerk mit mehr als einer Masche kleiner als die Anzahl z der Zweige. Daher ist das Gleichungssystem, das beim Maschenstromverfahren zu lösen ist, immer kleiner als bei der Knoten- und Maschenanalyse. Die Anzahl der *insgesamt* auszuwertenden Gleichungen ist in beiden Fällen $m + (k - 1)$ und damit gleich der Anzahl z der Zweige!

Die Anwendung des Maschenstromverfahrens empfiehlt sich insbesondere, wenn $m \ll z$ ist oder wenn nur einzelne Zweigströme innerhalb eines Netzwerks gesucht sind und ein vollständiger Baum so gewählt werden kann, dass die gesuchten Ströme weitgehend in Verbindungszweigen des Baumes fließen.

Beispiel 2.44: Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein Netzwerk ohne Stromquellen

Das Netzwerk in Bild 2.90a enthält die Widerstände $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 25\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$ sowie die Quellenspannungen $U_{q1} = 16,2\ \text{V}$ und $U_{q2} = 11,4\ \text{V}$. Alle Zweigströme sollen bestimmt werden.

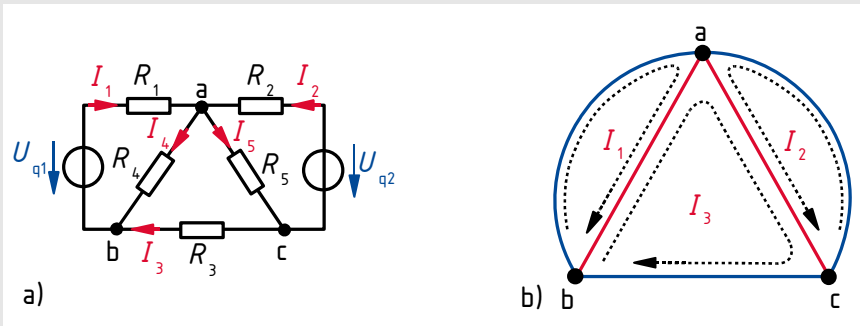


Bild 2.90: Netzwerk mit Zählpfeilen für die gesuchten Zweigströme (a) und Graph mit vollständigem Baum und den Zählpfeilen der Maschenströme (b)

In Bild 2.90b ist der Graph des Netzwerks, in dem bereits ein vollständiger Baum ausgewählt wurde (rot markiert), dargestellt. Als Maschenströme werden die Zweigströme in den Verbindungszweigen, also I_1 , I_2 und I_3 gewählt. Die Maschengleichungen werden aufgestellt, indem die Maschen in Richtung der Zählpfeile der Maschenströme durchlaufen werden:

$$\begin{aligned} M_1 : & R_1 I_1 + R_4 (I_1 - I_3) - U_{q1} = 0 \\ M_2 : & R_2 I_2 + R_5 (I_2 + I_3) - U_{q2} = 0 \\ M_3 : & R_3 I_3 + R_4 (-I_1 + I_3) + R_5 (I_2 + I_3) = 0 \end{aligned}$$

Nun wird das Gleichungssystem nach Strömen geordnet und die Spannungen werden auf die rechte Seite gebracht. Damit erhält man die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_4 \\ 0 & (R_2 + R_5) & R_5 \\ -R_4 & R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel enthält der Spaltenvektor der Ströme nur die zu berechnenden Maschenströme, der Spaltenvektor der Spannungen nur bekannte Quellenspannungen. Das Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\begin{bmatrix} 26 \Omega & 0 & -25 \Omega \\ 0 & 42 \Omega & 40 \Omega \\ -25 \Omega & 40 \Omega & 70 \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,2 \text{ V} \\ 11,4 \text{ V} \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus mit dem Taschenrechner oder z. B. einem Programm zur numerischen Mathematik die Werte der Maschenströme

$$I_1 = 1,2 \text{ A}, \quad I_2 = -0,3 \text{ A}, \quad I_3 = 0,6 \text{ A}$$

folgen. Eine Umrechnung der Maschen- in Verbindungszweigströme ist nicht erforderlich. Durch Überlagerung der Maschenströme lassen sich nun die noch fehlenden Ströme in den Baumzweigen ermitteln:

$$I_4 = I_1 - I_3 = 1,2 \text{ A} - 0,6 \text{ A} = 0,6 \text{ A}, \quad I_5 = I_2 + I_3 = -0,3 \text{ A} + 0,6 \text{ A} = 0,3 \text{ A}.$$

2.4.6.2 Behandlung von Stromquellen

Enthält ein Netzwerk einen oder mehrere Zweige mit idealen Stromquellen, so sind die Zweigströme dieser Zweige bekannt; stattdessen sind nun die Spannungen über den Stromquellen unbekannt.

Ein vollständiger Baum ist so zu wählen, dass Stromquellen in Verbindungszweigen liegen, da Ströme in Baumzweigen stets durch die Überlagerung mehrerer Maschenströme gebildet werden.

Stromquellen in Netzwerken führen dazu, dass nach dem Sortieren der Maschengleichungen nach Spannungen und Strömen – im Gegensatz zu Beispiel 2.44 – der Vektor der Ströme auch bekannte Quellenströme und der Vektor der Spannungen auch unbekannte Spannungen über Stromquellen enthält. Daher sind die Maschengleichungen vor dem Anwenden eines Lösungsalgorithmus so zu sortieren, dass alle bekannten Quellengrößen auf ihren rechten Seiten stehen.

Beispiel 2.45: Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein einfaches Netzwerk mit Stromquelle

In Bild 2.91a ist das bereits in Beispiel 2.35 betrachtete Netzwerk mit einer idealen Stromquelle nochmals dargestellt. Bild 2.91b enthält den Graphen des Netzwerks mit einem vollständigen Baum, der aus dem Zweig mit der Spannungsquelle besteht. Das Gleichungssystem, das sich bei Verwendung dieses vollständigen Baumes ergibt, ist aufzustellen und zu diskutieren.

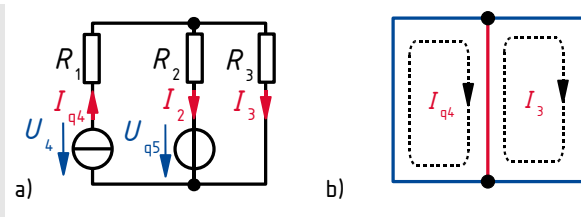


Bild 2.91: Netzwerk mit Stromquelle (a) und Graph mit vollständigem Baum und den Zählpfeilen der Maschenströme (b)

Die beiden Maschenumläufe ergeben

$$\begin{aligned} M_3 : \quad & R_3 I_3 - U_{q5} + R_2(I_3 - I_{q4}) = 0 , \\ M_4 : \quad & R_1 I_{q4} + R_2(-I_3 + I_{q4}) + U_{q5} - U_4 = 0 , \end{aligned}$$

was bei einer Sortierung nach Strömen und Spannungen entsprechend Beispiel 2.44 zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} I_3(R_2 + R_3) + I_{q4}(-R_2) &= U_{q5} , \\ I_3(-R_2) + I_{q4}(R_1 + R_2) &= U_4 - U_{q5} \end{aligned}$$

führt, die als Matrixengleichung

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_2 \\ -R_2 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 \\ I_{q4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q5} \\ U_4 - U_{q5} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können. Das Gleichungssystem kann in dieser Form nicht gelöst werden, sondern ist so umzuordnen, dass die rechte Seite nur bekannte Größen enthält, also zu

$$\begin{aligned} I_3(R_2 + R_3) &= U_{q5} + I_{q4} R_2 , \\ I_3(-R_2) - U_4 &= -I_{q4}(R_1 + R_2) - U_{q5} , \end{aligned}$$

was als Matrixengleichung

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & 0 \\ -R_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q5} + R_2 I_{q4} \\ -(R_1 + R_2)I_{q4} - U_{q5} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann.

Der Vektor auf der rechten Seite enthält nur noch bekannte Größen, der Vektor auf der linken Seite nur gesuchte Größen.

Die ehemalige Widerstandsmatrix enthält nun in der zu U_4 gehörigen Spalte auch dimensionslose Größen.

Die erste Gleichung reicht zur Bestimmung von I_3 aus:

$$I_3 = \frac{U_{q5} + R_2 I_{q4}}{R_2 + R_3} = I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}$$

Der Baumzweigstrom ergibt sich aus der Überlagerung der Maschenströme:

$$I_2 = I_{q4} - I_3 = I_{q4} - \left(I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3} \right) = I_{q4} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3}$$

Aus der zweiten Gleichung des Gleichungssystems lässt sich schließlich U_4 berechnen:

$$\begin{aligned} U_4 &= -I_3 R_2 + I_{q4}(R_1 + R_2) + U_{q5} \\ &= - \left(I_{q4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_{q5}}{R_2 + R_3} \right) R_2 + I_{q4}(R_1 + R_2) + U_{q5} \\ &= I_{q4} \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) + U_{q5} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{aligned}$$

An diesem einfachen Beispiel ist deutlich erkennbar, dass die Anwendung des Maschenstromverfahrens in seiner Grundform bei Netzwerken mit Stromquellen umständlich ist.

Die in Beispiel 2.45 exemplarisch aufgezeigten Schwierigkeiten lassen sich durch die folgenden beiden Modifikationen des elementaren Maschenstromverfahrens vermeiden und führen sogar zu einer Verkleinerung des zu lösenden Gleichungssystems:

- *Lineare Stromquellen* (ideale Stromquellen parallel zu mindestens einem Widerstand) können in *lineare Spannungsquellen* umgewandelt werden. Dadurch reduziert sich die Zahl der Zweige und damit auch die Zahl der zu berechnenden Maschenströme.
- Der Strom in Zweigen, die eine *ideale Stromquelle* enthalten, ist bekannt. Wählt man solche Zweige als Verbindungs Zweige, so treten die unbekanntes Spannungen über den Stromquellen *nur in jeweils einer einzigen Gleichung* auf. Diese Gleichungen können nach dem Lösen des restlichen Gleichungssystems *einzel*n ausgewertet werden.

2.4.6.3 Vorgehensweise

Unter Berücksichtigung der obigen Empfehlungen zur Behandlung von **Stromquellen** (im folgenden Text **rot** hervorgehoben) ergibt sich das *modifizierte Maschenstromverfahren*:

Vor der Netzwerkanalyse sind, sofern nicht gegeben, *Zählpfeile* für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen.

1. Ggf. *Netzwerkumformung*, insbesondere:
 - Zusammenfassen von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.
 - **Umwandeln linearer Stromquellen in lineare Spannungsquellen.**
2. Auswählen eines *vollständigen Baumes* des Netzwerks. Dabei ist zu beachten:
 - **Ideale Stromquellen müssen in Verbindungs Zweigen liegen.**
 - Sind nur einzelne Ströme gesucht, so sollten sie in Verbindungs Zweigen fließen.
 - *Ideale Spannungsquellen* sollten in Baumzweigen liegen¹³.
 - Möglichst einen Baum mit sternförmiger Struktur wählen.

¹³Hierdurch ergibt sich ein einfacheres Koeffizientenschema, da weniger Koppelwiderstände auftreten (Abschnitt 2.4.6.4).

3. *Eintragen der Zählpfeile für die Maschenströme* in den unabhängigen Maschen des gewählten Baumes. Der Strom im Verbindungszweig einer Masche sollte als Maschenstrom gewählt werden.
4. *Aufstellen der Maschengleichungen* für die ausgewählten Maschen. Als Umlaufsinn in einer Masche wird die Zählpfeilrichtung des zugehörigen Maschenstroms gewählt. Widerstände in Baumzweigen werden stets von mehreren Maschenströmen durchflossen. Der Spannungsabfall über einem solchen Widerstand ergibt sich aus der vorzeichenrichtigen Überlagerung der Teilspannungen $R(\pm I_\mu)$, die durch die Maschenströme I_μ , die durch ihn fließen (nicht die Zweigströme!), hervorgerufen werden: Stimmt die Richtung des Zählpfeils eines Maschenstroms I_μ mit dem Umlaufsinn in der gerade betrachteten Masche überein, so gilt $U_\mu = R(+I_\mu)$, sonst $U_\mu = R(-I_\mu)$.
5. *Umformen des Gleichungssystems:*
 - Alle Spannungen über Quellen werden auf die „rechte Seite“ gebracht.
 - Sortieren der Spannungsabfälle nach Maschenströmen.
 - **Alle Terme, die durch Stromquellen erzeugte Spannungsabfälle über Widerständen beschreiben, werden auf die rechte Seite gebracht, da diese Ausdrücke bekannt sind.**
 - **Alle Gleichungen, die einen Spannungsabfall über einer idealen Stromquelle enthalten, werden zunächst aus dem Gleichungssystem entfernt.**
6. *Lösen des Gleichungssystems* für die unbekanntes Maschenströme, womit auch die Ströme in den Verbindungszweigen bekannt sind.
7. *Berechnen der gesuchten Baumzweigströme* durch vorzeichenrichtige Überlagerung der Maschenströme.
8. Berechnen der *Spannungsabfälle über idealen Stromquellen* mittels der unter 5. aus dem Gleichungssystem entfernten *einzelnen* Gleichungen.
9. Ggf. Rückgängigmachen der unter 1. durchgeführten Netzwerkkumformungen. **Hierbei ggf. Berechnung der Spannungen über Stromquellen, die in lineare Spannungsquellen umgewandelt wurden.**

Das Rechenschema zum Lösen des linearen Gleichungssystems kann z. B. in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 M_1 : \\
 M_2 : \\
 \dots \\
 M_n :
 \end{array}
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccc}
 I_1 & I_2 & \dots & I_n
 \end{array} & \begin{array}{c}
 r. S. \\
 U_{\text{ges}1} \\
 U_{\text{ges}2} \\
 \dots \\
 U_{\text{ges}n}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.166)$$

Das Gleichungssystem hat in Matrixschreibweise prinzipiell die Form

$$\underline{R} \vec{I} = \vec{U} \quad (2.167)$$

mit der quadratischen *Widerstandsmatrix* \underline{R} , dem Spaltenvektor \vec{I} der Maschenströme sowie dem Spaltenvektor \vec{U} der Spannungen über Quellen.

2.4.6.4 Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung

Das beim Maschenstromverfahren zu lösende Gleichungssystem hat eine bestimmte Struktur, die es ermöglicht, die Matrixgleichung ohne vorheriges explizites Aufschreiben der einzelnen Maschengleichungen direkt zu erstellen (vgl. Beispiel 2.32).

Für die folgenden Betrachtungen müssen die aus den Maschen M_1, M_2, \dots, M_n resultierenden Gleichungen in (2.166) innerhalb der n Zeilen die selbe Reihenfolge haben wie die zugehörigen Maschenströme (I_1, I_2, \dots, I_n) innerhalb der n Spalten. Daher ist es empfehlenswert, die Maschenumläufe M_μ mit den Indizes μ der zugehörigen Maschenströme I_μ zu bezeichnen.

Zunächst sind zwei Begriffe zu definieren:

- Der *Summenwiderstand* (auch *Maschenwiderstand* genannt) einer Masche ist die Summe der Widerstände in allen Zweigen, aus denen die Masche besteht.
- Der *Koppelwiderstand* zwischen zwei Maschen ist die *vorzeichenbehaftete* Summe der Widerstände in denjenigen Baumzweigen, durch die die Maschenströme beider Maschen fließen. Haben die Zählpfeile der beiden betrachteten Maschenströme an einem Widerstand gleiche Richtung, so wird sein Wert mit positivem Vorzeichen berücksichtigt, sonst mit negativem Vorzeichen.

Man kann dann die folgenden Gesetzmäßigkeiten nutzen, um das Aufstellen des Gleichungssystems in der Form von Gl. (2.166) bzw. in Form von Gl. (2.167) zu vereinfachen.

1. Die quadratische Widerstandsmatrix \underline{R} ist stets symmetrisch zu ihrer Hauptdiagonalen, es gilt also $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. (Diese Tatsache ermöglicht einen Plausibilitätstest der Elemente von \underline{R} .)
2. Auf der Hauptdiagonalen von \underline{R} stehen die *Summenwiderstände* $R_{\mu\mu}$ der zugehörigen Maschen μ . Ideale Quellen in den Zweigen einer Masche liefern keinen Beitrag zum Summenwiderstand (wohl aber in Reihe mit idealen Quellen liegende Widerstände).
3. Die Widerstände $R_{\mu\nu}$ außerhalb der Hauptdiagonalen von \underline{R} sind die vorzeichenbehafteten *Koppelwiderstände* zwischen den Maschen μ und ν . Ideale Spannungsquellen¹⁴ liefern keinen Beitrag zu den Koppelwiderständen.
4. Eine Spannung $U_{\text{ges}\mu}$ enthält die *negative* Summe¹⁵ der Spannungen über allen Quellen in der zugehörigen Masche μ .

¹⁴Ideale Stromquellen spielen hier keine Rolle, da Baumzweige keine idealen Stromquellen enthalten dürfen.

¹⁵Spannungen, deren Zählpfeil in Richtung des Maschenumlaufs weisen, sind also auf der rechten Seite mit negativem Vorzeichen anzusetzen und umgekehrt.

Beispiel 2.46: Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung bei einem Netzwerk ohne Stromquellen

Für die Schaltung aus Beispiel 2.44, die in Bild 2.92a noch einmal dargestellt ist, soll die Matrixgleichung zur Berechnung der Maschenströme direkt aufgestellt werden. Der vollständige Baum soll nun aus den Zweigen mit den Spannungsquellen bestehen.

Der vollständige Baum und die Zählpfeile der Maschenströme sind Bild 2.92b zu entnehmen.

Zunächst werden die Summenwiderstände in die Widerstandsmatrix eingetragen: Der Maschenstrom I_3 fließt durch R_1 , R_2 und R_3 ; I_4 durch R_1 und R_4 ; I_5 durch R_2 und R_5 .

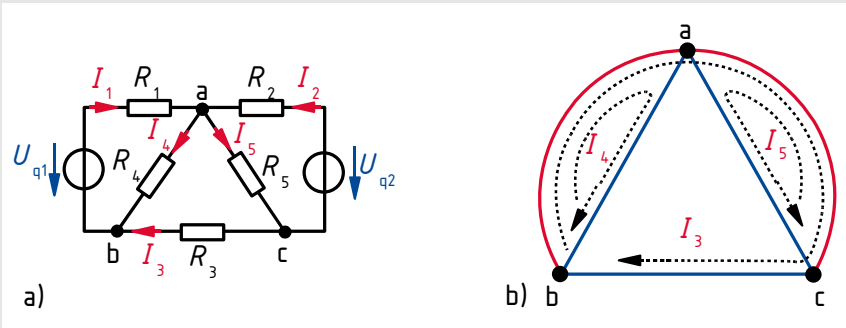


Bild 2.92: Netzwerk mit Zählpfeilen für die gesuchten Zweigströme (a) und Graph mit vollständigem Baum und den Zählpfeilen der Maschenströme (b)

Danach folgen die Koppelwiderstände: Die Zählpfeile der Maschenströme I_3 und I_4 haben an R_1 gleiche Richtung, die Zählpfeile von I_3 und I_5 an R_2 entgegengesetzte Richtung. Für I_4 und I_5 gibt es keinen Koppelwiderstand, daher wird der Wert null eingetragen.

Schließlich werden auf der rechten Seite die in den Maschen vorhandenen Quellenspannungen eingetragen, wobei auf die oben genannte Vorzeichenregelung zu achten ist: Der Zählpfeil von I_3 weist gegen die Richtung des Zählpfeils von U_{q1} und in Richtung des Zählpfeils von U_{q2} ; der Zählpfeil von I_4 weist gegen die Richtung des Zählpfeils von U_{q1} ; der Zählpfeil von I_5 gegen die Richtung des Zählpfeils von U_{q2} .

Damit erhält man die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & R_1 & -R_2 \\ R_1 & (R_1 + R_4) & 0 \\ -R_2 & 0 & (R_2 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} - U_{q2} \\ U_{q1} \\ U_{q2} \end{pmatrix}$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerte aus Beispiel 2.44

$$\begin{bmatrix} 8 \Omega & 1 \Omega & -2 \Omega \\ 1 \Omega & 26 \Omega & 0 \\ -2 \Omega & 0 & 42 \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \text{ V} \\ 16,2 \text{ V} \\ 11,4 \text{ V} \end{pmatrix}$$

die Ergebnisse

$$I_3 = 0,6 \text{ A}, \quad I_4 = 0,6 \text{ A}, \quad I_5 = 0,3 \text{ A}$$

und durch Überlagerung die Ströme in den Baumzweigen

$$I_1 = I_3 + I_4 = 1,2 \text{ A}, \quad I_2 = -I_3 + I_5 = -0,3 \text{ A},$$

was natürlich mit den Ergebnissen des Beispiels 2.44 übereinstimmt.

Beispiel 2.47: Anwendung des Maschenstromverfahrens auf ein Netzwerk mit allen Quellenarten

Das in Bild 2.93a dargestellte Netzwerk soll mit dem Maschenstromverfahren analysiert werden. Die Werte aller Widerstände und Quellengrößen seien bekannt.

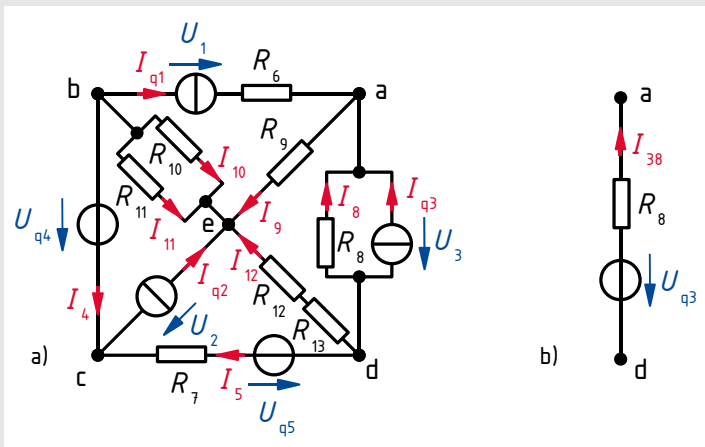


Bild 2.93: Netzwerk mit verschiedenen Quellenarten (a) mit Ersatz-Zweipol für die Zweige zwischen den Knoten a und d (b)

Das in Bild 2.93a dargestellte Original-Netzwerk enthält die $k = 5$ Knoten a bis e und $z = 10$ Zweige. Es sind also $m = z - k + 1 = 6$ Maschengleichungen aufzustellen und zu lösen. Die beiden parallelen Zweige zwischen den Knoten b und e können vorübergehend zu einem Zweig zusammengefasst werden. Das Netzwerk enthält in den beiden Zweigen a-b und c-e ideale Stromquellen. Die beiden parallelen Zweige zwischen den Knoten a und d können als lineare Stromquelle aufgefasst werden. Daher ist zu erwarten, dass bei Anwendung der modifizierten Maschenstromanalyse nur noch ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen zu lösen ist.

Das in Abschnitt 2.4.6.3 beschriebene Verfahren wird nun unter Berücksichtigung der Hinweise in Abschnitt 2.4.6.4 Punkt für Punkt angewandt:

Zählpfeile für alle benötigten Größen sind bereits in Bild 2.93a vorgegeben.

1. Die Reihenschaltung der Widerstände R_{12} und R_{13} wird zum Widerstand

$$R_{1213} = R_{12} + R_{13}$$

zusammengefasst, die parallelen Zweige mit den Widerständen R_{10} und R_{11} zu einem Zweig mit dem Widerstand

$$R_{1011} = \frac{R_{10} R_{11}}{R_{10} + R_{11}}$$

und dem Zweigstrom

$$I_{1011} = I_{10} + I_{11},$$

dessen Zählpfeil vom Knoten b zum Knoten e weist. Die lineare Stromquelle zwischen den Knoten a und d wird durch eine lineare Spannungsquelle gemäß Bild 2.93b ersetzt mit

$$U_{q3} = R_8 I_{q3},$$

wobei die umgekehrte Richtung des Zählpfeils von U_{q3} gegenüber dem von I_{q3} zu beachten ist. Der Strom durch den neuen Zweig wird

$$I_{38} = I_{q3} + I_8$$

genannt. Das umgeformte Netzwerk hat noch 8 Zweige.

- Die Zweige a-b und c-e müssen wegen der enthaltenen Stromquellen Verbindungszweige sein. Der Zweig b-c mit der idealen Spannungsquelle sollte Baumzweig sein. Der Baum soll eine möglichst sternförmige Struktur haben. Daher wird der in Bild 2.94 rot dargestellte vollständige Baum ausgewählt.

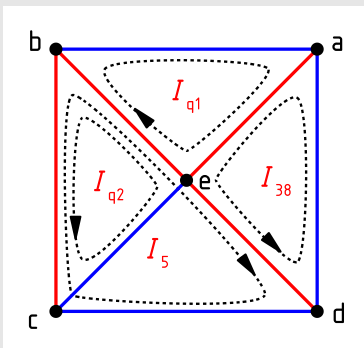


Bild 2.94: Graph der Schaltung aus Bild 2.93a nach Netzwerkumformung mit vollständigem Baum und Zählpfeilen für die Maschenströme

- Als Maschenströme werden die 4 Ströme I_{q1} , I_{q2} , I_5 und I_{38} in den Verbindungszweigen gewählt; ihre Zählpfeile sind in Bild 2.94 eingezeichnet.
- Das Lösungsschema nach (2.166) kann aus Bild 2.93a mit Bild 2.94 direkt aufgestellt werden:

	I_{q1}	I_{q2}	I_5	I_{38}	r. S.
M_1 :	$R_6 + R_9 + R_{1011}$	R_{1011}	$-R_{1011}$	R_9	$-U_1$
M_2 :	R_{1011}	R_{1011}	$-R_{1011}$	0	$U_2 - U_{q4}$
M_5 :	$-R_{1011}$	$-R_{1011}$	$R_7 + R_{1011} + R_{1213}$	R_{1213}	$U_{q4} + U_{q5}$
M_{38} :	R_9	0	R_{1213}	$R_8 + R_9 + R_{1213}$	U_{q3}

5. Die Maschenströme I_{q1} und I_{q2} sind bekannt und damit auch die Produkte dieser Ströme mit den Widerständen in den ersten beiden Spalten der Widerstandsmatrix (im Lösungsschema **blau** hervorgehoben). Die ersten beiden Gleichungen werden aus dem Gleichungssystem entfernt und später einzeln zur Berechnung der Spannungen U_1 und U_2 über den Stromquellen (im Lösungsschema **rot** hervorgehoben) verwendet. In den beiden verbleibenden unteren Gleichungen werden die blau markierten Terme auf die rechte Seite gebracht, wodurch das zu lösende Gleichungssystem in Matrixschreibweise entsteht:

$$\begin{bmatrix} R_7 + R_{1011} + R_{1213} & R_{1213} \\ R_{1213} & R_8 + R_9 + R_{1213} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_5 \\ I_{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q4} + U_{q5} + R_{1011}(I_{q1} + I_{q2}) \\ U_{q3} - R_9 I_{q1} \end{pmatrix}$$

6. Das Lösen dieses Gleichungssystems liefert die Werte der Maschenströme I_5 und I_{38} .
7. Die Baumzweigströme ergeben sich aus der Überlagerung der Maschenströme:

$$I_4 = I_{q2} - I_5, \quad I_9 = I_{q1} + I_{38}, \quad I_{12} = -I_5 - I_{38}, \quad I_{1011} = -I_{q1} - I_{q2} + I_5$$

8. Mittels der beiden zurückgestellten Gleichungen und der nun bekannten Zweigströme lassen sich die Spannungen über den Stromquellen berechnen:

$$U_1 = -(R_6 + R_9 + R_{1011})I_{q1} + R_{1011}(-I_{q2} + I_5) - R_9 I_{38}$$

$$U_2 = U_{q4} + R_{1011}(I_{q1} + I_{q2} - I_5)$$

9. Schließlich sind die Umformungen des Originalnetzwerks rückgängig zu machen. Der eingeführte Zweigstrom I_{1011} wird mittels der Stromteilerregel aufgeteilt:

$$I_{10} = I_{1011} \frac{R_{11}}{R_{10} + R_{11}}, \quad I_{11} = I_{1011} \frac{R_{10}}{R_{10} + R_{11}} = I_{1011} - I_{10}$$

Die lineare Spannungsquelle wird in eine lineare Stromquelle rückgewandelt:

$$I_8 = I_{38} - I_{q3}, \quad U_3 = -R_8 I_8$$

Damit ist das Netzwerk vollständig analysiert. Zur Kontrolle der Ergebnisse einer Rechnung mit Zahlenwerten könnte überprüft werden, ob der Knotensatz für alle Knoten erfüllt ist. Alternativ könnte die Leistungsbilanz (Abschnitt 2.1.4.6) für die Schaltung aufgestellt werden.

2.4.7 Knotenpotenzialverfahren

Das Knotenpotenzialverfahren (auch Knotenpotenzialanalyse oder Knotenanalyse genannt) ist wie das Maschenstromverfahren ein vereinfachtes Analyseverfahren für Netzwerke. Das zu lösende Gleichungssystem ist stets kleiner als bei der Knoten- und Maschenanalyse (Abschnitt 2.4.3).

2.4.7.1 Prinzip des Verfahrens

Beim Knotenpotenzialverfahren werden zunächst unter ausschließlicher Verwendung von Knotengleichungen die *Potenziale von $k - 1$ Knoten des Netzwerks gegenüber einem frei wählbaren Bezugsknoten* im Netzwerk berechnet. Die Zweigspannungen sind die Differenzen der Potenziale der Endknoten der Zweige. Die Ströme in den Zweigen ergeben sich danach mittels des Ohmschen Gesetzes und ggf. der Kirchhoffschen Gesetze aus den Zweigspannungen. Zur Durchführung des Knotenpotenzialverfahrens wird *kein vollständiger Baum* benötigt. Damit ist dieses Verfahren noch schematischer anwendbar als die Maschenstromanalyse und eignet sich hervorragend zur Realisierung in Software. Verfahren zur numerischen Schaltungsanalyse wie z. B. SPICE (Abschnitt 2.6) verwenden Algorithmen [NP73], die auf dem Knotenpotenzialverfahren basieren.

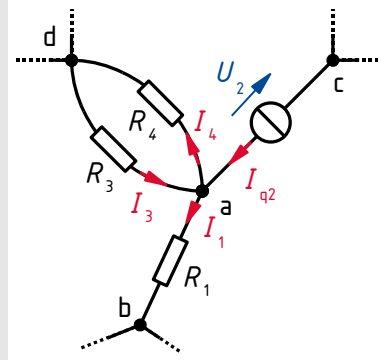
Das Knotenpotenzialverfahren erfordert prinzipiell das Lösen eines *Gleichungssystems* mit nur $k - 1$ Gleichungen zur Ermittlung der Knotenpotenziale. Aus den Knotenpotenzialen werden anschließend die z gesuchten Zweiggrößen *einzel*n berechnet. Damit ist für eine vollständige Netzwerkanalyse im Sinne des Abschnitts 2.4.1.2 die Zahl der *insgesamt* zu lösenden Gleichungen allerdings größer als z .

Der Bezugsknoten wird in der Regel mit „0“ bezeichnet. Das Potenzial des gewählten Bezugsknotens kann im Rahmen dieses Verfahrens stets zu 0 V angenommen werden, da in der Regel die absolute Größe der Knotenpotenziale irrelevant ist. Sollten ausnahmsweise die absoluten Werte der Potenziale der Knoten von Interesse sein, so wählt man als Bezugsknoten einen Knoten, dessen Potenzial φ_0 bekannt ist und berechnet zunächst das Netzwerk unter der Annahme $\varphi_0 = 0$ V. Danach addiert man den tatsächlichen Wert von φ_0 zu allen berechneten Knotenpotenzialen. Empfehlenswert ist die Wahl eines Bezugsknotens, der mit möglichst vielen Zweigen des Netzwerks inzident ist („zentraler Knoten“). Hierdurch wird das Koeffizientenschema des zu lösenden Gleichungssystems vereinfacht. In der Praxis haben viele Schaltungen bereits einen Bezugsknoten, der als „Masse“ bezeichnet wird. Es bietet sich an, diesen Knoten als Bezugsknoten zu wählen, da dann die berechneten Knotenpotenziale mit den schaltungstechnisch interessierenden Spannungen zwischen Knoten und Masse übereinstimmen.

Beispiel 2.48: Aufstellen der Knotengleichungen bei einem Netzwerk aus Widerständen und Stromquelle

Für Knoten a des in Bild 2.95 dargestellten Netzwerkausschnitts ist die Knotengleichung so aufzustellen, dass sie die Potenziale der dargestellten Knoten miteinander verknüpft.

Bild 2.95: Ausschnitt aus einem Netzwerk zur Analyse mit dem Knotenpotenzialverfahren



Mit Rücksicht auf das in Abschnitt 2.4.7.4 behandelte Verfahren zum vereinfachten Aufstellen des Gleichungssystems setzt man bei der Knotenpotenzialanalyse Ströme, deren Zählpfeil vom betrachteten Knoten *weg* weist, in einer Knotengleichung *positiv* an. Damit erhält man für Knoten a die Knotengleichung

$$I_1 - I_{q2} - I_3 + I_4 = 0.$$

Durch Anwenden des Ohmschen Gesetzes, Ausdrücken der Zweigspannungen über die Knotenpotenziale und mit den Leitwerten $G_\mu = 1/R_\mu$ folgt daraus

$$(\varphi_a - \varphi_b) G_1 - I_{q2} - (\varphi_d - \varphi_a) G_3 + (\varphi_a - \varphi_d) G_4 = 0.$$

Sortieren nach den Knotenpotenzialen ergibt

$$\varphi_a(G_1 + G_3 + G_4) + \varphi_b(-G_1) + \varphi_d(-G_3 - G_4) = I_{q2}.$$

Zu dieser Gleichung kommt man unabhängig von der Richtung der Stromzählpfeile für I_1 , I_3 und I_4 ! Somit sind für diesen Schritt noch keine Stromzählpfeile für die unbekanntenen Zweigströme erforderlich. (Dadurch, dass die Ströme, deren Zählpfeil vom betrachteten Knoten weg weist, positiv angesetzt wurden, erscheinen Quellenströme, deren Zählpfeil zum betrachteten Knoten *hin* weist, auf der *rechten* Seite der Gleichung mit *positivem* Vorzeichen. Die Leitwerte der Zweige, die mit dem betrachteten Knoten inzident sind, stehen mit *positivem* Vorzeichen als Faktor bei dem Potenzial des betrachteten Knotens.)

Sind alle Knotenpotenziale bekannt, lassen sich die Zweigströme und die Spannung über der idealen Stromquelle mittels der oben bereits verwendeten Zusammenhänge einfach ermitteln:

$$I_1 = (\varphi_a - \varphi_b) G_1, \quad I_3 = (\varphi_d - \varphi_a) G_3, \quad I_4 = (\varphi_a - \varphi_d) G_4, \quad U_2 = (\varphi_a - \varphi_c)$$

Erst zur Berechnung der Zweigströme müssen also die zugehörigen Stromzählpfeile bekannt sein.

Das Knotenpotenzialverfahren ist besonders effizient, wenn nicht Zweigströme, sondern nur Knotenpotenziale oder Zweigspannungen gesucht sind oder wenn $k - 1 \ll z$ ist. Letzteres ist bei stark vermaschten Netzwerken der Fall.

2.4.7.2 Behandlung von Spannungsquellen

Lineare Spannungsquellen können – zumindest gedanklich – in lineare Stromquellen umgewandelt werden. Hierdurch wird das Aufstellen der Knotengleichungen vereinfacht. Die bei der Umwandlung entstehenden zusätzlichen Zweige sind bei der Knotenpotenzialanalyse nicht nachteilig, da die Anzahl der Knoten nicht vergrößert wird.

Ein Zweig, der aus einer *idealen Spannungsquelle* besteht, führt dazu, dass die Differenz der Potenziale seiner Endknoten bekannt ist. Wählt man als Bezugsknoten einen Knoten, der mit einer oder mehreren idealen Spannungsquellen verbunden ist, so sind die Potenziale der auf der anderen Seite der Spannungsquellen liegenden Knoten trivial zu berechnen. In einem solchen Fall kann man diese Knotenpotenziale durch *einzelne* Gleichungen *vor* dem Lösen des Gleichungssystems berechnen, wodurch die Zahl der Gleichungen im Gleichungssystem um die Anzahl der idealen Spannungsquellen reduziert wird.

Im Fall eines Zweiges aus einer *idealen Spannungsquelle*, bei dem keiner der Endknoten der Bezugsknoten ist, braucht mit dem Gleichungssystem nur das Potenzial des einen der beiden Knoten berechnet zu werden. Das Potenzial des anderen Knotens unterscheidet sich dann nur um den (bekannten) Wert der Quellenspannung vom zu berechnenden Potenzial.

In Bild 2.96 kann φ_a durch den Ausdruck $\varphi_b + U_{qab}$ oder φ_b durch den Ausdruck $\varphi_a - U_{qab}$ ersetzt werden, so dass mit dem Gleichungssystem nur eins der beiden Potenziale berechnet zu werden braucht.

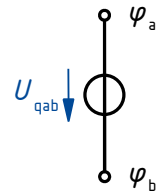


Bild 2.96: Zweig, der aus einer idealen Spannungsquelle besteht

2.4.7.3 Vorgehensweise

Unter Berücksichtigung der obigen Empfehlungen zur Behandlung von **Spannungsquellen** (im folgenden Text **blau** hervorgehoben) ergibt sich das *modifizierte Knotenpotenzialverfahren*:

Vor der Netzwerkanalyse sind, sofern nicht gegeben, *Zählpfeile* für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen.

1. Ggf. *Netzwerkumformung*:
 - Zusammenfassen von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.
 - *Umwandeln von Zweigen aus linearen Spannungsquellen in lineare Stromquellen.*
2. Auswahl eines Bezugsknotens. Dabei ist zu beachten:
 - Möglichst einen zentralen Knoten wählen.
 - *Enthält ein Netzwerk Zweige aus idealen Spannungsquellen*, so ist ein Knoten empfehlenswert, der mit möglichst vielen dieser Zweige inzident ist.

3. Eindeutige *Bezeichnung aller Knoten* des Netzwerks.
4. *Aufstellen der Knotengleichungen* für alle Knoten außer dem Bezugsknoten.
 - Ströme mit vom betrachteten Knoten *weg*weisendem Zählpfeil sollten positiv angesetzt werden (ergibt ein einfacheres Koeffizientenschema).
 - Enthält ein Zweig nur *Widerstände*, so wird der Zweigstrom durch die Potenzialdifferenz über dem Zweig und den (gesamten) *Zweigleitwert* ausgedrückt: $I = \Delta\varphi G$
 - Enthält ein Zweig nur eine *ideale Spannungsquelle*, ist der Zweigstrom gleich dem Strom durch die Quelle.
 - Enthält ein Zweig eine *ideale Stromquelle* (ggf. in Reihe mit weiteren Zweipolen), so wird der Quellenstrom der Stromquelle als Zweigstrom eingesetzt.
5. *Umformen des Gleichungssystems*:
 - Alle *Ströme durch Quellen* werden auf die „rechte Seite“ gebracht.
 - Sortieren der Terme nach Knotenpotenzialen.
 - Alle Terme, die durch *ideale Spannungsquellen* erzeugte Ströme durch Widerstände beschreiben, werden auf die rechte Seite gebracht, da diese Ausdrücke bekannt sind.
 - Alle Gleichungen, die einen Strom durch eine *ideale Spannungsquelle* enthalten, werden zunächst aus dem Gleichungssystem entfernt.
6. *Lösen des Gleichungssystems* für die unbekanntes Knotenpotenziale.
7. *Berechnen der gesuchten Zweigströme* und der *Spannungen über idealen Stromquellen* mittels des Ohmschen Gesetzes und ggf. der Kirchhoffschen Gesetze.
8. *Berechnen der Ströme durch ideale Spannungsquellen* mittels der unter 5. aus dem Gleichungssystem entfernten Gleichungen.
9. Eventuell unter 1. durchgeführte Netzwerkkumformungen rückgängig machen. *Hierbei ggf. die Ströme durch lineare Spannungsquellen berechnen, die in lineare Stromquellen umgewandelt wurden.*

Eine übliche Schreibweise für das Rechenschema zum Lösen des linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{array}{cccc|c}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n & r. S. \\
 K_1: & G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} & I_{\text{ges}1} \\
 K_2: & G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} & I_{\text{ges}2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_n: & G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} & I_{\text{ges}n}
 \end{array} \quad (2.168)$$

Das Gleichungssystem hat in Matrixschreibweise prinzipiell die Form

$$\underline{G} \vec{\varphi} = \vec{I} \quad (2.169)$$

mit der quadratischen *Leitwertmatrix* \underline{G} , dem Vektor $\vec{\varphi}$ der Knotenpotenziale sowie dem Vektor \vec{I} der Ströme durch Quellen.

Beispiel 2.49: Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens auf ein Netzwerk ohne ideale Spannungsquellen

Das Netzwerk aus Beispiel 2.44, das in Bild 2.97a nochmals dargestellt ist, soll mit dem Knotenpotenzialverfahren analysiert werden. Die Zahlenwerte aus Beispiel 2.44 sollen weiterhin gelten.

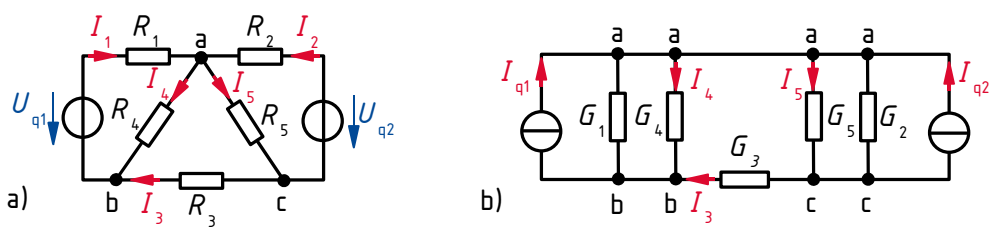


Bild 2.97: Netzwerk mit linearen Spannungsquellen (a) und nach Umwandlung der linearen Spannungsquellen in lineare Stromquellen (b)

Zunächst werden die beiden linearen Spannungsquellen in lineare Stromquellen umgewandelt und alle Widerstände in Leitwerte umgerechnet. Man erhält dann die Schaltung in Bild 2.97b. Auf die mögliche Zusammenfassung der parallelen Leitwerte G_1 und G_4 bzw. G_2 und G_5 zu Ersatz-Leitwerten wird in diesem Beispiel verzichtet. Mit den Zahlenwerten aus Beispiel 2.44 erhält man

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = 16,2 \text{ A}, \quad I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = 5,7 \text{ A}, \quad G_1 = \frac{1}{R_1} = 1 \text{ S}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,5 \text{ S},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,2 \text{ S}, \quad G_4 = \frac{1}{R_4} = 40 \text{ mS}, \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = 25 \text{ mS}.$$

Knoten a wird als Bezugsknoten mit $\varphi_a = 0 \text{ V}$ gewählt, da er mit 6 Zweigen inzident ist (gegenüber 4 Zweigen bei den Knoten b und c).

Die $k - 1 = 2$ Knotengleichungen werden für die Knoten b und c aufgestellt. Die Richtungen der nicht eingetragenen Zählpfeile der Zweigströme werden *gedanklich* vom gerade betrachteten Knoten wegweisend angenommen. Man erhält dann die Knotengleichungen

$$K_b: \quad G_1(\varphi_b - \varphi_a) + G_3(\varphi_b - \varphi_c) + G_4(\varphi_b - \varphi_a) + I_{q1} = 0,$$

$$K_c: \quad G_2(\varphi_c - \varphi_a) + G_3(\varphi_c - \varphi_b) + G_5(\varphi_c - \varphi_a) + I_{q2} = 0.$$

Durch Berücksichtigung von $\varphi_a = 0 \text{ V}$, Ordnen des Gleichungssystems nach Potenzialen und Verschieben der bekannten Quellenströme auf die rechte Seite erhält man die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q1} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

zur Berechnung der Knotenpotenziale mit einer zur Hauptdiagonalen symmetrischen Ma-

trix. Nach dem Einsetzen der Zahlenwerte

$$\begin{bmatrix} 1,24 \text{ S} & -0,2 \text{ S} \\ -0,2 \text{ S} & 0,725 \text{ S} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16,2 \text{ A} \\ -5,7 \text{ A} \end{pmatrix}$$

erhält man die Lösungen

$$\varphi_b = -15 \text{ V}, \quad \varphi_c = -12 \text{ V}.$$

Die unbekanntenen Zweigströme müssen unter Berücksichtigung ihrer Zählpfeile in Bild 2.97a berechnet werden:

$$I_3 = G_3(\varphi_c - \varphi_b) = 0,2 \text{ S} \cdot 3 \text{ V} = 0,6 \text{ A}$$

$$I_4 = G_4(\varphi_a - \varphi_b) = G_4(-\varphi_b) = 40 \text{ mS} \cdot 15 \text{ V} = 0,6 \text{ A}$$

$$I_5 = G_5(\varphi_a - \varphi_c) = G_5(-\varphi_c) = 25 \text{ mS} \cdot 12 \text{ V} = 0,3 \text{ A}$$

Die Zweigströme I_1 und I_2 ergeben sich aus den Knotenpotenzialen und dem Maschensatz (vgl. Bild 2.97a), z. B. durch den Ansatz

$$U_{ab} = -\varphi_b = -I_1 R_1 + U_{q1}, \quad U_{ac} = -\varphi_c = -I_2 R_2 + U_{q2},$$

woraus

$$I_1 = \frac{U_{q1} + \varphi_b}{R_1} = 1,2 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{q2} + \varphi_c}{R_2} = -0,3 \text{ A}$$

folgt. Alternativ können die Ströme durch Anwendung des Knotensatzes auf die Knoten b und c im Original-Netzwerk (Bild 2.97a) berechnet werden.

2.4.7.4 Vereinfachtes Aufstellen der Matrizengleichung

Das beim Knotenpotenzialverfahren zu lösende Gleichungssystem hat bei Beachtung der in Beispiel 2.48 genannten Vorschrift für das Aufstellen der Knotengleichungen eine bestimmte Struktur, die es ermöglicht, die Matrizengleichung ohne vorheriges explizites Aufschreiben der einzelnen Knotengleichungen direkt zu erstellen.

Für die folgenden Betrachtungen müssen die aus den Knoten K_a, K_b, \dots, K_n resultierenden Gleichungen in (2.168) innerhalb der n Zeilen die selbe Reihenfolge haben wie die zugehörigen Knotenpotenziale $(\varphi_a, \varphi_b, \dots, \varphi_n)$ innerhalb der n Spalten. Daher ist es empfehlenswert, die Knoten K_μ mit den Indizes μ der zugehörigen Knotenpotenziale φ_μ zu bezeichnen.

Zunächst sind zwei Begriffe zu definieren:

- Der *Knotenleitwert* eines Knotens ist die Summe der Leitwerte aller Zweige, die direkt mit dem Knoten verbunden sind.
- Der *Koppelleitwert* zwischen zwei Knoten ist die *negative* Summe der Leitwerte der Zweige zwischen diesen Knoten.

Man kann dann folgende Gesetzmäßigkeiten nutzen, um das Aufstellen der Knotengleichungen in Form von (2.168) bzw. in Form von Gl. (2.169) zu vereinfachen.

1. Die quadratische Leitwertmatrix \underline{G} ist stets symmetrisch zu ihrer Hauptdiagonalen, es gilt also $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$. (Diese Tatsache ermöglicht einen Plausibilitätstest der Elemente von \underline{G} .)
2. Auf der Hauptdiagonalen von \underline{G} stehen die *Knotenleitwerte* $G_{\mu\mu}$ der zugehörigen Knoten μ . Zweige, die nur aus einer idealen Spannungsquelle bestehen oder eine Stromquelle enthalten, liefern keinen Beitrag zum Knotenleitwert.
3. Die Leitwerte $G_{\mu\nu}$ außerhalb der Hauptdiagonalen von \underline{G} sind die *Koppelleitwerte* zwischen den Knoten μ und ν . Zweige, die nur aus einer idealen Spannungsquelle bestehen oder eine Stromquelle enthalten, liefern keinen Beitrag zum Koppelleitwert.
4. Ein Strom $I_{\text{ges}\mu}$ enthält die Summe der Ströme durch Quellen, deren Zählpfeil zum Knoten μ hin weist. Ströme, deren Zählpfeil vom Knoten weg weist, werden negativ gezählt.

Beispiel 2.50: Vereinfachtes Aufstellen der Matrixgleichung bei einem Netzwerk ohne ideale Spannungsquellen

Das in Bild 2.97a dargestellte Netzwerk aus Beispiel 2.49 soll mit Hilfe des Knotenpotenzialverfahrens analysiert werden; nun soll jedoch der Knoten b der Bezugsknoten mit $\varphi_b = 0 \text{ V}$ sein. Die Zahlenwerte aus Beispiel 2.44 sollen weiterhin gelten.

Nach Umformung des Netzwerks (Bild 2.97b) werden die Knotenleitwerte der Knoten a und c berechnet, die auf der Hauptdiagonalen der Leitwertmatrix eingetragen werden. Dazu werden alle Leitwerte addiert, die mit dem jeweiligen Knoten verbunden sind:

$$G_{aa} = G_1 + G_4 + G_5 + G_2 = 1 \text{ S} + 40 \text{ mS} + 25 \text{ mS} + 0,5 \text{ S} = 1,565 \text{ S}$$

$$G_{cc} = G_3 + G_5 + G_2 = 0,2 \text{ S} + 25 \text{ mS} + 0,5 \text{ S} = 0,725 \text{ S}$$

Anschließend werden die Leitwerte zwischen den Knoten ermittelt. Sie werden mit negativem Vorzeichen versehen als Koppelleitwerte in die Leitwertmatrix eingetragen:

$$G_{ac} = G_{ca} = -(G_5 + G_2) = -(25 \text{ mS} + 0,5 \text{ S}) = -0,525 \text{ S}$$

Die Zählpfeile der Quellenströme I_{q1} und I_{q2} sind beide zum Knoten a hin gerichtet. Diese Quellenströme werden also zu

$$I_{\text{ges}a} = I_{q1} + I_{q2} = 16,2 \text{ A} + 5,7 \text{ A} = 21,9 \text{ A}$$

zusammengefasst. Der Zählpfeil des Quellenstroms I_{q2} weist vom Knoten c weg und wird deshalb mit negativem Vorzeichen berücksichtigt als

$$I_{\text{ges}c} = -I_{q2} = -5,7 \text{ A}.$$

Die Matrixgleichung zur Bestimmung der beiden Knotenpotenziale φ_a und φ_c lautet somit

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 + G_5 & -(G_2 + G_5) \\ -(G_2 + G_5) & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} + I_{q2} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

sowie mit Zahlenwerten

$$\begin{bmatrix} 1,565 \text{ S} & -0,525 \text{ S} \\ -0,525 \text{ S} & 0,725 \text{ S} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,9 \text{ A} \\ -5,7 \text{ A} \end{pmatrix}$$

und ergibt die Lösung

$$\varphi_a = 15 \text{ V}, \quad \varphi_c = 3 \text{ V}.$$

Da die Zweigspannungen $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = 15 \text{ V}$ und $U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = 12 \text{ V}$ die gleichen Werte haben wie in Beispiel 2.49, ergeben sich auch die gleichen Werte für die Zweigströme wie dort, weshalb hier auf die weitere Berechnung verzichtet wird.

Beispiel 2.51: Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens auf ein Netzwerk mit allen Quellenarten

Das in Bild 2.98a dargestellte, in Beispiel 2.47 bereits mit dem Maschenstromverfahren analysierte Netzwerk soll nun mittels des Knotenpotenzialverfahrens berechnet werden. Die Werte aller Widerstände und Quellengrößen seien bekannt.

Das in Bild 2.98a dargestellte Original-Netzwerk enthält die $k = 5$ Knoten a bis e und $z = 10$ Zweige. Es sind also $k - 1 = 4$ Knotengleichungen aufzustellen und zu lösen. Das Netzwerk enthält im Zweig b-c eine ideale Spannungsquelle. Daher ist zu erwarten, dass bei Anwendung der modifizierten Knotenpotenzialanalyse nur noch ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen zu lösen ist.

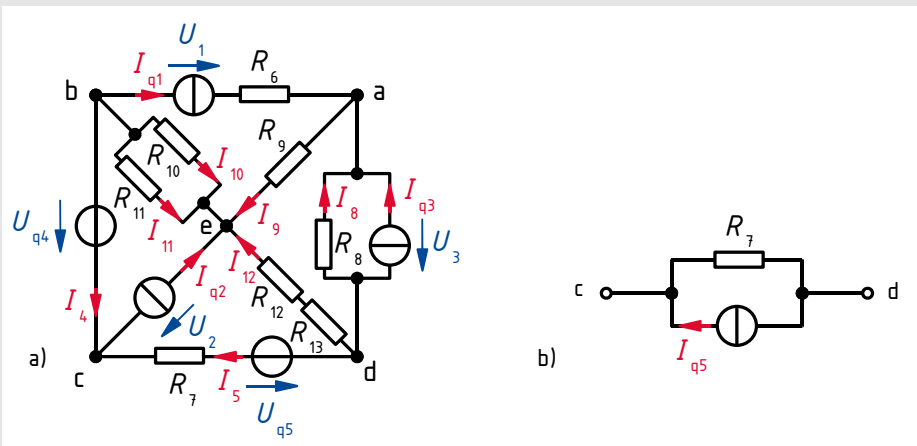


Bild 2.98: Netzwerk mit verschiedenen Quellenarten (a) mit Ersatz-Zweipol für den Zweig zwischen den Knoten c und d (b)

Das in Abschnitt 2.4.7.3 beschriebene Verfahren wird nun unter Berücksichtigung der Hinweise in Abschnitt 2.4.7.4 schrittweise angewandt:

Zählpfeile für alle benötigten Größen sind bereits in Bild 2.98a vorgegeben.

1. Zur Verringerung des Schreibaufwandes wird die Reihenschaltung von R_{12} und R_{13}

zusammengefasst zum Ersatz-Widerstand

$$R_{1213} = R_{12} + R_{13}.$$

Die lineare Spannungsquelle im Zweig zwischen den Knoten c und d wird zum einfacheren Aufstellen des Gleichungssystems umgewandelt in eine lineare Stromquelle mit dem Quellenstrom

$$I_{q5} = \frac{U_{q5}}{R_7}$$

und dem Innenwiderstand R_7 gemäß Bild 2.98b.

- In dieser Schaltung bieten sich mehrere Knoten als Bezugsknoten an: Knoten b oder c, da an ihnen eine ideale Spannungsquelle liegt und sie nach der Netzwerkimformung beide mit 4 Knoten inzident sind; Knoten d und e, da sie nach der Netzwerkimformung beide mit 5 Zweigen inzident sind. Gewählt wird hier Knoten e, um zu zeigen, wie ideale Spannungsquellen, die nicht am Bezugsknoten liegen, zu behandeln sind. Damit gilt $\varphi_e = 0 \text{ V}$.
- Alle Knoten sind bereits eindeutig bezeichnet.
- Das Gleichungssystem in Form von (2.168) wird direkt anhand der Schaltung in Bild 2.98a unter Berücksichtigung der Umformungen aus Schritt 1. aufgestellt. Dabei gilt

$$G_\mu = 1/R_\mu.$$

Zunächst werden die Knotenleitwerte, die auf der Hauptdiagonalen der Leitwertmatrix stehen, mit positiven Vorzeichen eingetragen, anschließend die Koppelleitwerte mit negativen Vorzeichen. Anschließend werden die durch Stromquellen getriebenen Quellenströme und die Ströme durch Zweige aus idealen Spannungsquellen (**rot**) auf der rechten Seite eingetragen; bei zum betrachteten Knoten hinweisendem Stromzählpfeil mit positivem Vorzeichen, anderenfalls mit negativem.

	φ_a	$\varphi_b = \varphi_c + U_{q4}$	φ_c	φ_d	r.S.
$K_a:$	$G_8 + G_9$	0	0	$-G_8$	$I_{q1} + I_{q3}$
$K_b:$	0	$G_{10} + G_{11}$	0	0	$-I_{q1} - I_4$
$K_c:$	0	0	G_7	$-G_7$	$I_4 - I_{q2} + I_{q5}$
$K_d:$	$-G_8$	0	$-G_7$	$G_7 + G_8 + G_{1213}$	$-I_{q3} - I_{q5}$

- Das Potenzial φ_b kann durch das Potenzial φ_c und U_{q4} ausgedrückt werden, was im obigen Lösungsschema bereits eingetragen ist:

$$\varphi_b = \varphi_c + U_{q4}.$$

Nun können die Inhalte der zweiten (**blau**) und der dritten Spalte zusammengefasst werden. Das Produkt aus der Quellenspannung U_{q4} und den Leitwerten $G_{10} + G_{11}$

ist bekannt und wird daher auf die rechte Seite des Gleichungssystems übertragen:

	φ_a	φ_c	φ_d	r. S.
K_a :	$G_8 + G_9$	0	$-G_8$	$I_{q1} + I_{q3}$
K_b :	0	$G_{10} + G_{11}$	0	$-I_{q1} - I_4 - U_{q4}(G_{10} + G_{11})$
K_c :	0	G_7	$-G_7$	$I_4 - I_{q2} + I_{q5}$
K_d :	$-G_8$	$-G_7$	$G_7 + G_8 + G_{1213}$	$-I_{q3} - I_{q5}$

Durch Addition der Knotengleichungen für die Knoten b und c, zwischen denen die ideale Spannungsquelle liegt, wird der unbekannte Strom I_4 durch diese Quelle aus dem Gleichungssystem eliminiert und es entsteht ein System aus 3 Gleichungen zur Bestimmung von 3 Knotenpotenzialen, das in Matrixschreibweise lautet:

$$\begin{bmatrix} G_8 + G_9 & 0 & -G_8 \\ 0 & G_7 + G_{10} + G_{11} & -G_7 \\ -G_8 & -G_7 & G_7 + G_8 + G_{1213} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \\ \varphi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} + I_{q3} \\ -I_{q1} - I_{q2} + I_{q5} - U_{q4}(G_{10} + G_{11}) \\ -I_{q3} - I_{q5} \end{pmatrix}$$

- Das Lösen dieses Gleichungssystems liefert die Werte der Knotenpotenziale φ_a , φ_c und φ_d . Damit ist auch $\varphi_b = \varphi_c + U_{q4}$ bekannt.
- Die Ströme durch die Widerstände ergeben sich aus den Zweigspannungen und den Zweigwiderständen:

$$I_8 = \frac{\varphi_d - \varphi_a}{R_8}, \quad I_9 = \frac{\varphi_a}{R_9}, \quad I_{10} = \frac{\varphi_b}{R_{10}}, \quad I_{11} = \frac{\varphi_b}{R_{11}}, \quad I_{12} = \frac{\varphi_d}{R_{1213}}$$

Die Spannungen über den Stromquellen folgen aus dem Maschensatz:

$$U_1 = \varphi_b - \varphi_a - R_6 I_{q1}, \quad U_2 = -\varphi_c$$

- Der Strom I_4 durch die ideale Spannungsquelle kann mittels der aus dem Gleichungssystem entfernten Knotengleichung für Knoten b oder Knoten c berechnet werden, z. B.:

$$I_4 = -I_{q1} - \varphi_b(G_{10} + G_{11})$$

- Der Strom I_5 durch die lineare Spannungsquelle in Zweig c-d lässt sich mit dem Maschensatz oder unter Verwendung des Ersatz-Zweipols in Bild 2.98b berechnen als

$$I_5 = \frac{U_{q5} + \varphi_d - \varphi_c}{R_7} = \frac{U_{q5}}{R_7} + \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_7},$$

alternativ auch durch Anwenden des Knotensatzes auf Knoten c oder d.

2.4.8 Vergleich der Berechnungsverfahren

Zur vollständigen Analyse umfangreicher linearer Netzwerke mit z Zweigen und k Knoten ist die Anwendung der *Knoten- und Maschenanalyse* nicht zu empfehlen, da sie prinzipiell das Lösen eines *Gleichungssystems* mit z Gleichungen erfordert. Bei dem in Abschnitt 2.4.3.4 vorgestellten modifizierten Verfahren vermindert sich die Größe des Gleichungssystems um so viele Gleichungen, wie es Zweige mit Stromquellen im Netzwerk gibt. Zur Berechnung sämtlicher unbekannter Ströme und Spannungen sind jedoch stets z Gleichungen zu lösen.

Beim *Maschenstromverfahren* ist prinzipiell ein *Gleichungssystem* mit nur $z - k + 1$ Gleichungen zu lösen. Bei dem in Abschnitt 2.4.6.3 vorgestellten modifizierten Verfahren vermindert sich die Zahl der Gleichungen im Gleichungssystem um die Anzahl der Zweige mit Stromquellen. Auch bei diesem Verfahren ist aber die Gesamtzahl der zu lösenden Gleichungen gleich z .

Das *Knotenpotenzialverfahren* liefert nach dem Lösen eines *Gleichungssystems* mit prinzipiell $k - 1$ Gleichungen zunächst die Potenziale von $k - 1$ Knoten gegenüber einem Bezugsknoten. Die Zahl der Gleichungen im Gleichungssystem kann bei dem in Abschnitt 2.4.7.3 vorgestellten modifizierten Verfahren pro Zweig, der aus einer idealen Spannungsquelle besteht, um eine Gleichung vermindert werden. Da im Regelfall nicht die Ermittlung der Knotenpotenziale das Ziel der Netzwerkanalyse ist, müssen aus den Knotenpotenzialen anschließend die Zweigströme berechnet werden. Hierfür sind z weitere einzelne Gleichungen erforderlich. Damit ist die Anzahl der insgesamt zu lösenden Gleichungen deutlich größer als z .

Vergleicht man verschiedene Analyseverfahren bezüglich ihrer *Komplexität*, so wird die Anzahl der *einzelnen* zu lösenden Gleichungen in der Regel nicht berücksichtigt, da der Aufwand zum Lösen solcher Gleichungen nur proportional mit ihrer Anzahl steigt. Der Aufwand zum Lösen eines linearen *Gleichungssystems* steigt aber prinzipiell quadratisch mit der Anzahl der enthaltenen Gleichungen. Daher wird bei der Abschätzung des Rechenaufwandes ausschließlich die Anzahl der Gleichungen im Gleichungssystem betrachtet.

Bei der Analyse kleiner Netzwerke mit dem Taschenrechner ist jede Verkleinerung des zu lösenden Gleichungssystems willkommen. Daher ist die Anwendung der beschriebenen modifizierten Verfahren hilfreich. Bei der Realisierung eines Netzwerkanalyseprogramms für große Netzwerke erfordert die Programmierung der Sonderfallbehandlungen hingegen Mehraufwand, so dass die Umsetzung der grundlegenden Algorithmen einfacher ist. Die Wahl eines vollständigen Baumes zur Identifikation linear unabhängiger Maschen, die bei der *Knoten- und Maschenanalyse* und dem *Maschenstromverfahren* erforderlich ist, erübrigt sich bei der Knotenpotenzialanalyse. Damit ist das letztgenannte Verfahren die erste Wahl zur schematischen Analyse elektrischer Netzwerke.

Die Anwendung des *Überlagerungssatzes* ist immer dann zu empfehlen, wenn nur sehr wenige Ströme oder Spannungen in einem linearen Netzwerk mit einfacher Struktur, jedoch mehreren Quellen zu berechnen sind.

Die *Netzwerkanalyse mit Ersatz-Quellen* wird gern eingesetzt, wenn lediglich die Klemmengrößen eines *passiven* Zweiges, der auch nichtlinear und hinsichtlich seiner Parameter variabel sein darf, innerhalb eines ansonsten linearen Netzwerks bestimmt werden sollen.

Alle obigen Aussagen gelten auch für die Analyse von Sinusstromnetzwerken mit den genannten Verfahren (Kapitel 5).

2.5 Analyse nichtlinearer elektrischer Netzwerke

Sobald ein elektrisches Netzwerk mindestens ein nichtlineares Schaltungselement enthält, ist das gesamte Netzwerk nichtlinear. Zur Analyse nichtlinearer Netzwerke stehen die Kirchhoffschen Sätze sowie die auf ihnen basierende Knoten- und Maschenanalyse, das Maschenstromverfahren und das Knotenpotenzialverfahren zur Verfügung. Nicht anwendbar ist der Überlagerungssatz! Nur lineare Teile eines insgesamt nichtlinearen Netzwerks dürfen in eine Ersatz-Quelle umgewandelt werden.

Da es bei detaillierter Betrachtung in der Praxis keine exakt linearen Netzwerke gibt, kann die Analyse eines linearen Modells einer eigentlich nichtlinearen Schaltung nur eine Näherungslösung liefern.

2.5.1 Linearisierung im Arbeitspunkt

Ein üblicher Ansatz zur Berechnung nichtlinearer Netzwerke ist die *Linearisierung im Arbeitspunkt*. Hierbei wird das Verhalten aller nichtlinearen Elemente im Netzwerk in ihren jeweiligen Arbeitspunkten durch lineare Gleichungen angenähert. Danach können wieder alle Verfahren zur Analyse linearer Netzwerke angewandt werden.

Das Problem dieses Verfahrens besteht darin, dass diese Arbeitspunkte zunächst unbekannt sind und ihre Lage abgeschätzt werden muss. Damit können die verwendeten Linearisierungen zunächst auch nur Näherungen sein. Mittels der Ergebnisse der Analyse des linearisierten Netzwerks sind die Arbeitspunkte und daraus folgend die Linearisierungen zu korrigieren. Es ist also *iterativ* vorzugehen. Ist die Kennlinie eines Bauelements im interessierenden Bereich nur schwach gekrümmt, so kann auf Iterationen oftmals verzichtet werden.

Beispiel 2.52: Annäherung einer Diodenkennlinie durch eine Gerade

Betrachtet wird eine Diode (Abschnitt 10.5.2) mit dem in Bild 2.99a dargestellten Schaltzeichen und der in Bild 2.99c dargestellte Kennlinie. Diese Kennlinie ist im Bereich zwischen den Punkten P und Q, d. h. für $7,5 \text{ A} < I < 23 \text{ A}$, so schwach gekrümmt, dass sie mittels der in Bild 2.99c gestrichelt eingezeichneten *Näherungsgeraden* beschrieben werden kann.

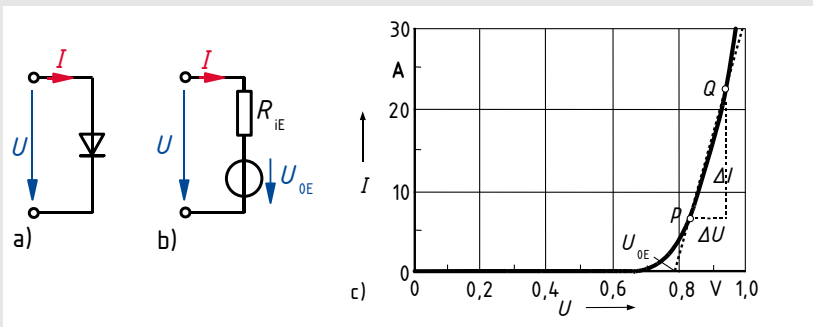


Bild 2.99: Diode (a), lineare Ersatzschaltung (b) und Kennlinie der Diode mit gestrichelt eingezeichneter Näherungsgerade (c)

Da die Näherungsgerade nicht durch den Nullpunkt geht, kann man sie als *Kennlinie*

einer linearen Quelle (Abschnitt 2.1.3.3) auffassen. Das Klemmenverhalten der Diode kann somit im betrachteten Bereich durch eine lineare *Ersatz-Spannungsquelle* gemäß Bild 2.99b nachgebildet werden. Die Näherungsgerade beschreibt eine lineare Quelle, die im Leerlauf ($I = 0$) die Klemmenspannung

$$U = U_{0E} = 0,78 \text{ V} > 0$$

liefert, wie Bild 2.99c zu entnehmen ist. Daher wurde der Zählpfeil der Ersatz-Leerlaufspannung U_{0E} in Bild 2.99b in der gleichen Richtung eingetragen wie der der Klemmenspannung U . Fließt ein Strom $I > 0$ durch den Zweipol, steigt wegen des Spannungsabfalls über dem Ersatz-Innenwiderstand der linearen Quelle die Klemmenspannung an gemäß

$$U = U_{0E} + R_{iE}I.$$

Das Ersatzschaltbild der Diode ist also eine lineare Quelle mit Verbraucher-Zählpfeilsystem, die *im betrachteten Arbeitsbereich* die Leistung $P = UI > 0$ *aufnimmt* (Abschnitt 2.1.4.3). Dies ist nicht überraschend, da eine Diode ein passiver Zweipol ist.

Die Kenngrößen U_{0E} und R_{iE} lassen sich auf die in Abschnitt 2.1.3.3 beschriebene Weise aus der Näherungsgeraden ermitteln. Die Leerlaufspannung U_{0E} ist bereits oben direkt aus Bild 2.99c abgelesen worden. Der Innenwiderstand lässt sich im vorliegenden Fall nicht mittels Gl. (2.35) berechnen, da diese Gleichung nur für Quellen mit Erzeuger-Zählpfeilsystem gilt. Beim hier vorliegenden Verbraucher-Zählpfeilsystem an der linearen Quelle gilt hingegen umgekehrtes Vorzeichen, also

$$R_{iE} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0,115 \text{ V}}{15,5 \text{ A}} = 7,4 \text{ m}\Omega.$$

Beispiel 2.53: Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode

Zur Spannungsstabilisierung wird in der in Bild 2.100a dargestellten Schaltung zu den beiden linearen Spannungsquellen mit den Quellenspannungen $U_{q1} = 6,5 \text{ V}$, $U_{q2} = 11,7 \text{ V}$ und den Innenwiderständen $R_{i1} = 52 \Omega$, $R_{i2} = 117 \Omega$ die Z-Diode ZPD6 (Abschnitt 10.5.2.3) parallelgeschaltet.

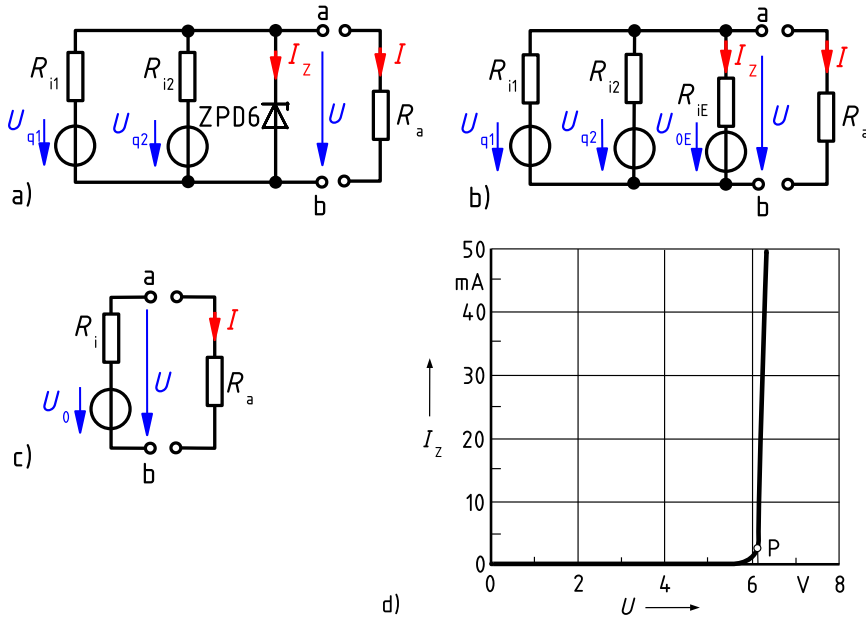


Bild 2.100: Schaltung zur Spannungsstabilisierung mit Z-Diode (a), linearisierte Schaltung (b), Ersatz-Spannungsquelle der Gesamtschaltung (c), Kennlinie der Z-Diode (d)

Die Z-Dioden-Kennlinie ist in Bild 2.100d dargestellt (Zählpfeilrichtungen der Klemmengrößen beachten). Gesucht ist die Strom-Spannungs-Kennlinie $U(I)$ der Gesamtschaltung bezüglich der Klemmen a-b.

Der Näherungsgeraden für den hier relevanten Teil der Kennlinie der Z-Diode in Bild 2.100d können die Ersatz-Leerlaufspannung

$$U_{0E} = 6,1 \text{ V}$$

und der Innenwiderstand (vgl. Beispiel 2.52)

$$R_{iE} = \Delta U / \Delta I_z = 0,2 \text{ V} / 50 \text{ mA} = 4 \Omega$$

entnommen werden. Damit folgt die Beschreibung des Klemmenverhaltens der Z-Diode im Arbeitsbereich durch das in Bild 2.100b eingezeichnete Modell mit der Gleichung

$$U = U_{0E} + R_{iE} I_z = 6,1 \text{ V} + 4 \Omega I_z .$$

Dieses Modell ist einsetzbar oberhalb des Punktes P der Kennlinie in Bild 2.100d, also für $I_z > 3 \text{ mA}$, d. h. im Bereich

$$U > 6,1 \text{ V} + 4 \Omega \cdot 3 \text{ mA} = 6,112 \text{ V} .$$

In Bild 2.100b ist die Z-Diode durch die lineare Ersatzschaltung ersetzt worden. Nach dem Verfahren der Ersatz-Spannungsquelle (Abschnitt 2.4.5.2) erhält man für die linearisierte Gesamtschaltung mit Gl. (2.96) den Innenwiderstand

$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{iE}}} = \frac{1}{\frac{1}{52\Omega} + \frac{1}{117\Omega} + \frac{1}{4\Omega}} = 3,6\Omega$$

und mit dem Überlagerungssatz (Abschnitt 2.4.4) den Kurzschlussstrom

$$I_k = \frac{U_{q1}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2}}{R_{i2}} + \frac{U_{0E}}{R_{iE}} = \frac{6,5\text{ V}}{52\Omega} + \frac{11,7\text{ V}}{117\Omega} + \frac{6,1\text{ V}}{4\Omega} = 1,75\text{ A}$$

sowie mit Gl. (2.159) die Leerlaufspannung

$$U_0 = R_i I_k = 3,6\Omega \cdot 1,75\text{ A} = 6,3\text{ V}.$$

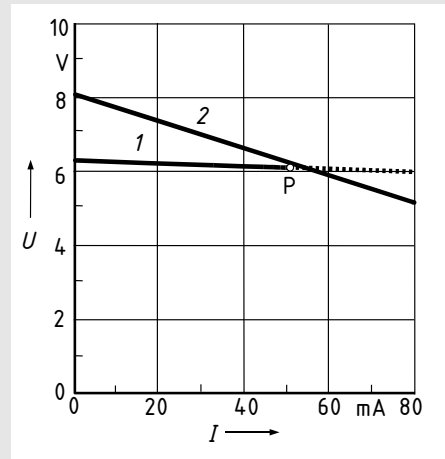
Damit sind die Elemente der Ersatz-Spannungsquelle in Bild 2.100c bekannt. Die Kennlinie $U(I)$ folgt der Gl. (2.32)

$$U = U_0 - R_i I = 6,3\text{ V} - 3,6\Omega \cdot I$$

und hat den in Bild 2.101 dargestellten nahezu waagerechten Verlauf (1). Die Kennlinie ist gültig, solange die Bedingung $U > 6,112\text{ V}$ eingehalten wird. Dies trifft zu für Lastströme

$$I < \frac{U_0 - 6,112\text{ V}}{R_i} = \frac{6,3\text{ V} - 6,122\text{ V}}{3,6\Omega} \approx 52\text{ mA}.$$

Bild 2.101: Kennlinie $U(I)$ (1) der stabilisierten Schaltung nach Bild 2.100a und Kennlinie derselben Schaltung ohne Z-Diode (2)



Wird der Laststrom $I > 52\text{ mA}$, sinkt die Spannung U an der Z-Diode auf Werte ab, bei denen nach Bild 2.100d die Näherungsgerade das Verhalten der Z-Diode nicht mehr hinreichend genau beschreibt. Bei weiter steigender Belastung wandert der Arbeitspunkt der Z-Diode in den horizontalen Teil der Kennlinie (links von Punkt P in Bild 2.100d). In

diesem Betriebszustand stellt die Z-Diode einen sehr großen Widerstand dar und ist in der Schaltung Bild 2.100a praktisch unwirksam. Deshalb geht die Kennlinie $U(I)$ in Bild 2.101 für Ströme $I > 58 \text{ mA}$ in die Kennlinie (2) über, die für die Schaltung ohne Z-Diode mit dem Innenwiderstand $R_{i1}R_{i2}/(R_{i1} + R_{i2}) = 36 \Omega$ gilt.

2.5.2 Grafische Arbeitspunktbestimmung

Enthält ein ansonsten lineares Netzwerk nur *genau einen nichtlinearen passiven Zweig*, kann das Klemmenverhalten des linearen Teilnetzwerks durch eine Ersatz-Quelle nachgebildet werden. Trägt man die lineare Kennlinie der Ersatz-Quelle und die Kennlinie des nichtlinearen Zweipols in ein Diagramm ein, sind die Schnittpunkte der beiden Kennlinien die möglichen Arbeitspunkte der Schaltung.

Beispiel 2.54: Grafische Arbeitspunktbestimmung bei einem nichtlinearen Netzwerk

Die Schaltung in Bild 2.102a enthält neben den linearen Widerständen $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 13 \text{ k}\Omega$ einen spannungsabhängigen Widerstand, dessen Kennlinie in Bild 2.103 dargestellt ist. Es gilt $U_q = 280 \text{ V}$. Gesucht sind der Strom I und die Spannung U zwischen den Klemmen a und b.

Der lineare Teil der Schaltung (links der Klemmen a-b) wird in eine Ersatz-Spannungsquelle umgewandelt. Bei Leerlauf an den Klemmen a und b liefert die Spannungsteilerregel die Leerlaufspannung

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_q = \frac{13 \text{ k}\Omega}{7 \text{ k}\Omega + 13 \text{ k}\Omega} 280 \text{ V} = 182 \text{ V}.$$

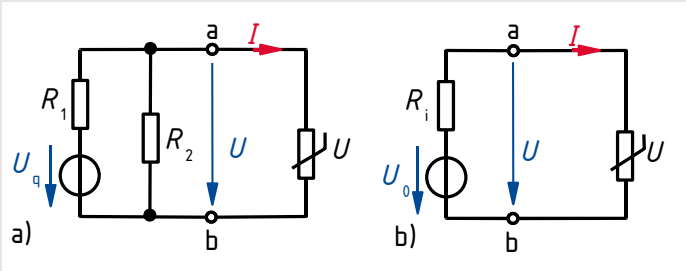


Bild 2.102: Netzwerk mit einem nichtlinearen Zweipol (a) und nach Umwandlung des linearen Teils in eine Ersatz-Spannungsquelle (b)

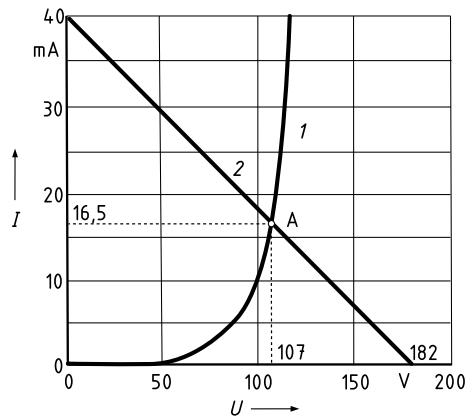


Bild 2.103: Kennlinie des nichtlinearen Zweipols (1) und Kennlinie der Ersatz-Spannungsquelle (2) für die Schaltung in Bild 2.102b

Der Innenwiderstand des linken Schaltungsteils ergibt sich mit Gl. (2.98) zu

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{7 \text{ k}\Omega \cdot 13 \text{ k}\Omega}{7 \text{ k}\Omega + 13 \text{ k}\Omega} = 4,55 \text{ k}\Omega .$$

Damit sind die Kenngrößen der Ersatz-Spannungsquelle in Bild 2.102b bekannt. Ihre Kennlinie $U(I)$ wird gemäß Gl. (2.32) beschrieben durch

$$U = U_0 - R_i I = 182 \text{ V} - 4,55 \text{ k}\Omega \cdot I$$

und als (2) in Bild 2.103 eingetragen. Der Arbeitspunkt der Schaltung ist der Schnittpunkt der Kennlinien im Punkt A bei

$$U = 107 \text{ V}, \quad I = 16,5 \text{ mA} .$$

2.5.3 Stabilität des Arbeitspunktes

Die Strom-Spannungs-Kennlinien mancher passiver Zweipole – z. B. von Gasentladungsstrecken (Abschnitt 10.2.3), Tunnelioden (Abschnitt 10.5.2.7), Thyristor-Dioden (Abschnitt 10.5.4.1) – weisen Bereiche auf, in denen die Spannung U trotz steigenden Stroms I abnimmt. Wenn ein Bauelement mit einer solchen Kennlinie an einen aktiven Zweipol angeschlossen wird, kann die grafische Arbeitspunktbestimmung nach Abschnitt 2.5.2 zu mehreren Lösungen führen. Welcher dieser Zustände sich tatsächlich einstellt, hängt davon ab, ob der jeweilige Arbeitspunkt *stabil* oder *instabil* ist. Stabilität liegt dann vor, wenn zufallsbedingte geringfügige Stromänderungen von selbst wieder zu dem vorherigen Arbeitspunkt zurück führen.

Beispiel 2.55: Untersuchung der Stabilität von Arbeitspunkten einer Gasentladungsstrecke

Die beiden Arbeitspunkte A und B in Bild 2.104b, die sich als Schnittpunkte der Kennlinien des nichtlinearen passiven (1) und des linearen aktiven Zweipols (2) ergeben, sollen hinsichtlich ihrer Stabilität untersucht werden. Von der Kennlinie $I(U)$ des nichtlinearen Zweipols, die natürlich durch den Ursprung geht, ist nur der interessierende Kennlinienast mit negativer Steigung dargestellt.

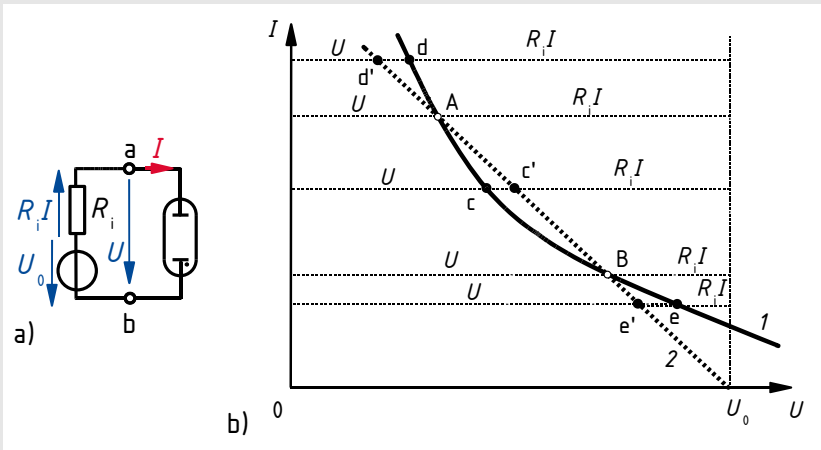


Bild 2.104: Aktiver Zweipol mit Gasentladungsstrecke (a), grafische Arbeitspunktbestimmung (b) mit dem fallenden Kennlinienabschnitt der Gasentladungsstrecke (1) und der Kennlinie des aktiven Zweipols (2)

Eine praktische Anwendung dieser Schaltung ist die Stabilisierung des Arbeitspunktes von Leuchtstofflampen. An die Stelle der Gleichspannungsquelle mit einem Ohmschen Widerstand tritt dann eine Sinusspannungsquelle mit einem Blindwiderstand, der durch eine Drosselspule realisiert wird.

Nach dem Maschensatz gilt für die Schaltung Bild 2.104a $U_0 = U + R_i I$.

In Bild 2.104b entsprechen die horizontalen Strecken zwischen der Strom-Achse und der nichtlinearen Kennlinie der Klemmenspannung U , die Strecken zwischen der Quellen-Kennlinie und der vertikalen Geraden $U = U_0$ der Spannung $R_i I$ am Innenwiderstand.

Wenn sich der Strom I ausgehend vom Punkt A verringert oder ausgehend vom Punkt B erhöht, ergibt sich eine Situation, wie sie durch die Punkte c und c' markiert ist: Die Spannung U am nichtlinearen Zweipol und die Spannung $R_i I$ am Innenwiderstand der Quelle sind zusammengenommen kleiner als die Quellenspannung U_0 . Die Tatsache, dass die Quelle eine höhere Spannung U_0 aufbaut, als an den passiven Bauelementen abfallen kann, führt zwangsläufig zu einer Erhöhung des Stroms I . Diese Überlegung zeigt, dass sowohl eine Verringerung des Stroms I im Punkt A als auch eine Erhöhung des Stroms I im Punkt B dazu führt, dass sich der Arbeitspunkt auf den Punkt A zu bewegt. Damit ist klar, dass der Punkt B nicht stabil sein kann.

Wenn sich ausgehend vom Punkt A der Strom I erhöht, ergibt sich ein Zustand, der durch die Punkte d und d' gekennzeichnet ist. Die Spannung U am nichtlinearen Zweipol und die Spannung $R_i I$ am Innenwiderstand der Quelle sind jetzt zusammengenommen größer als die Quellenspannung U_0 . Die von der Quelle aufgebaute Spannung U_0 reicht also nicht aus, um den erhöhten Strom I durch die passiven Bauelemente zu treiben, was dazu führt, dass der Strom I wieder abnimmt. Es zeigt sich also, dass im Punkt A sowohl eine zufällige Verringerung als auch eine zufällige Vergrößerung des Stroms I zu einer Rückkehr zum ursprünglichen Arbeitspunkt führt. Damit ist nachgewiesen, dass der Punkt A ein stabiler Arbeitspunkt ist.

Im Gegensatz dazu ist der Punkt B instabil. Wie schon gezeigt, führt eine geringfügige Erhöhung des Stroms I zu einem weiteren Anwachsen des Stroms, bis der Punkt A erreicht ist. Bei einer Verringerung des Stroms (Punkte e und e') liegt hingegen wieder die gleiche Situation wie bei den Punkten d und d' vor. D. h. der Strom nimmt weiter ab, bis entweder ein neuer stabiler Arbeitspunkt oder der Wert $I = 0$ erreicht wird.

Entscheidend für die Stabilität des Arbeitspunktes A ist offensichtlich die Tatsache, dass die Summe der Spannungen U und $R_i I$ bei Anwachsen des Stroms größer und bei Abnehmen des Stroms kleiner wird. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, führt jede infinitesimal kleine Stromänderung dI zu einer Änderung $d(U + R_i I)$ der Spannungssumme, die das gleiche Vorzeichen hat wie die Stromänderung dI . Dies lässt sich allgemein durch die *Stabilitätsbedingung*

$$\frac{d(U + R_i I)}{dI} > 0$$

oder auch in der Form

$$-\frac{dI}{dU} > \frac{1}{R_i}$$

formulieren. In einem stabilen Arbeitspunkt muss *die Kennlinie $I(U)$ des passiven Zweipols steiler sein als die Kennlinie des aktiven Zweipols*.

Bei der Überprüfung der Stabilität von Arbeitspunkten muss darauf geachtet werden, dass den Betrachtungen stets die *isothermen Kennlinien* (Kennlinien für konstant gehaltene Temperatur des Bauelements) zugrunde gelegt werden, da eine *kurzzeitige* geringfügige Stromänderung in der Regel keine spürbare Temperaturänderung bewirkt.

2.5.4 Numerische Berechnung

Die Analyse nichtlinearer Netzwerke erfordert erheblichen mathematischen Aufwand. Schon bei Vorhandensein weniger nichtlinearer Zweipole muss man auf eine *geschlossene Lösung*, die die Werte der gesuchten Größen als *Funktionen* der gegebenen Größen *in allgemeiner Form* beschreibt, verzichten. Stattdessen erhält man durch Anwendung *numerischer Verfahren* aus den *Zahlenwerten* der gegebenen Größen die zugehörigen *Zahlenwerte* der gesuchten Größen. Diese Rechnungen werden in der Regel nicht mit Taschenrechnern oder gar manuell ausgeführt, sondern mittels spezieller Netzwerkanalyseprogramme (Abschnitt 2.6) auf Arbeitsplatzrechnern.

2.6 Grundlagen der numerischen Netzwerkanalyse

Der Einsatz von Programmen zur Untersuchung des Verhaltens komplexer technischer Anordnungen ist seit Jahrzehnten insbesondere im Bauingenieurwesen und im Fahrzeugbau eine Selbstverständlichkeit. In der Elektrotechnik werden Programme zur *Analyse elektromagnetischer Felder* noch vergleichsweise selten eingesetzt. Das Verhalten elektrischer Netzwerke, die aus *konzentrierten Elementen* bestehen, wird jedoch schon seit über 40 Jahren mittels spezieller Simulationsprogramme nachgebildet. Ohne diese Programme wäre der Entwurf mikroelektronischer Schaltungen mit Hunderten bis Milliarden von Elementen unmöglich.

Von jedem Elektroingenieur kann heutzutage erwartet werden, dass er weiß, wie solche Simulationsprogramme prinzipiell funktionieren und dass er mit einem solchen Programm einfache Schaltungen untersuchen kann. Entwickler mikroelektronischer Schaltungen müssen darüber hinaus mit weiteren Programmen zum *rechnerunterstützten Schaltungs- und Systementwurf* (*Electronic Design Automation, EDA*) vertraut sein [Jan01], [SS07].

Auf keinen Fall darf vergessen werden, dass ein klassisches Simulationsprogramm *nicht zum Entwurf* (also der Synthese), sondern zur *Verifikation* (also der Analyse) dienen soll. Zunächst ist eine Schaltung *systematisch* zu entwerfen. Danach ist zu überprüfen, ob der Entwurf den Anforderungen gerecht wird.

Wer Simulationsprogramme einsetzt, muss wissen, dass das Ergebnis einer Simulation nur so gut sein kann wie das verwendete *Modell* der untersuchten Anordnung (engl. *garbage in – garbage out*). Wer z. B. das Verhalten eines kleinen Transformators analysieren will, darf nicht mit dem Modell des verlust- und streuungsfreien, linearen Transformators (Abschnitt 5.13.2) arbeiten. Beim Entwurf hochintegrierter Schaltungen kann die Simulation des Verhaltens nur dann verlässliche Ergebnisse liefern, wenn die *parasitären Effekte*, die unvermeidlich durch die physikalische Realisierung entstehen, abgeschätzt und im Simulationsmodell berücksichtigt werden.

Das im Rahmen der Grundlagenausbildung am weitesten verbreitete Schaltungssimulationsprogramm ist PSPICE, das inzwischen von der US-amerikanischen EDA-Firma Cadence Design Systems weiterentwickelt wird. Der Grund für diese Monopolstellung ist die Verfügbarkeit einer kostenlosen Evaluationsversion von PSPICE, deren Einschränkung hinsichtlich der Anzahl der verwendbaren Schaltungselemente im Rahmen der Ausbildung nur selten stört.

In den folgenden Abschnitten wird nicht auf den handwerklichen Umgang mit PSPICE eingegangen; hierzu sei auf die einschlägige Literatur, z. B. [Bee08], [Hei11], [Kur00] verwiesen. Vielmehr sollen die *funktionale Struktur* und der *Datenfluss* in Schaltungssimulationsprogrammen in weitgehend allgemeingültiger Form erklärt werden.

2.6.1 Das Programm SPICE

SPICE ist die Abkürzung für „*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*“. Es handelt sich also um ein Simulationsprogramm für analoge Schaltungen, das insbesondere für die Berechnung des elektrischen Verhaltens integrierter Schaltungen entwickelt wurde.

SPICE wurde um 1970 von Laurence W. Nagel im Rahmen seiner Doktorarbeit bei Prof. Donald O. Pederson an der *University of California* in Berkeley (USA) entwickelt [NP73]. SPICE ist

bezüglich seiner Genauigkeit bis heute der Referenz-Simulator. Bezüglich der Rechengeschwindigkeit und der Komplexität der verarbeitbaren Schaltungen gibt es inzwischen wesentlich leistungsfähigere Programme.

SPICE wurde ursprünglich in FORTRAN geschrieben, der Quellcode 1972 als „public domain“ veröffentlicht; SPICE ist also ein nicht-kommerzielles Produkt. Am weitesten verbreitet ist die Version 2G6 von 1983. Das Programm hat *keine grafische Benutzeroberfläche*, sondern arbeitet im *Stapelbetrieb*, liest also alle benötigten Daten aus einer oder mehreren Dateien ein und schreibt die *Simulationsergebnisse* in eine weitere *Datei*. SPICE wird in Berkeley schon lange nicht mehr gepflegt. Von einer Vielzahl von Entwicklern wurde der ursprüngliche Quellcode von SPICE so modifiziert, dass SPICE lange Zeit für fast jeden Rechner vom Homecomputer bis zum Großrechner unter fast allen Betriebssystemen verfügbar war.

Auf der Basis des Quellcodes von SPICE entwickelten ab etwa 1985 diverse Firmen kommerzielle Abkömmlinge (Derivate) von SPICE mit erweiterten Analysemöglichkeiten und komfortablerer Bedienung. Das erfolgreichste SPICE-Derivat ist PSPICE, das zunächst keine grafische Benutzeroberfläche hatte und dessen Programmcode nur etwa 0,5 MByte groß war.

2.6.2 Datenfluss in Netzwerkanalyse-Programmen

In diesem Abschnitt werden die Ein- und Ausgabedaten eines Schaltungssimulators am Beispiel von SPICE erklärt. Einen Überblick über den Datenfluss gibt Bild 2.105.

Die Beschreibung der zu simulierenden Schaltung steht in einer (prinzipiell für Menschen lesbaren) Text-Datei, der *Netzliste*. Netzlisten wurden ursprünglich manuell mittels eines *Text-Editors* erstellt. Wird die zu simulierende Schaltung mittels eines *grafischen Schaltplan-Editors* (*Schematic Editor*) in den Rechner eingegeben, so erzeugt ein Hilfsprogramm, der *Netzlistener*, die Netzliste. Das *Netzlistenformat* definiert, wie folgende Informationen, die die Schaltung vollständig beschreiben, in der Netzliste codiert werden:

- welche Schaltungselemente von welchem Typ vorhanden sind,
- welche Parameter diese Schaltungselemente haben,
- wie die Schaltungselemente miteinander verbunden sind.

Die Netzliste wird vom Simulator eingelesen und auf *formale Korrektheit* überprüft. Danach werden für jedes Schaltungselement entsprechend seinem Typ (z. B. Ohmscher Widerstand, idealer Kondensator, Bipolar-Transistor, Feldeffekt-Transistor) anhand des *Modells* für diesen Elementtyp und der Parameter des Elements Einträge im zu lösenden Gleichungssystem vorgenommen.

Ein Modell beschreibt das Verhalten eines Schaltungselement-Typs durch eine *Ersatzschaltung* aus elementaren Zwei- oder Mehrpolen, die der Simulator direkt verarbeiten kann. Im Fall von SPICE und seinen Derivaten sind Modelle für die wichtigsten Halbleiterarten bereits fest im Programmcode enthalten. Weitere Modelle können aus Dateien eingelesen werden. In der Regel werden mehrere Modelle zu einer *Modell-Bibliothek* zusammengefasst. In SPICE-Netzlisten können Modellbeschreibungen auch direkt integriert werden.

Die Verbindung mindestens zweier Schaltungselement-Anschlüsse in der Netzliste wird als *Knoten* bezeichnet, was nicht mit der Definition dieses Begriffs in der Netzwerktheorie (Abschnitt 2.2.1.1) übereinstimmt. Im SPICE-Netzlistenformat werden Knoten mit positiven Zahlen bezeichnet. Der *Bezugsknoten* „0“ muss in der Schaltung unbedingt vorhanden sein, da er bei der

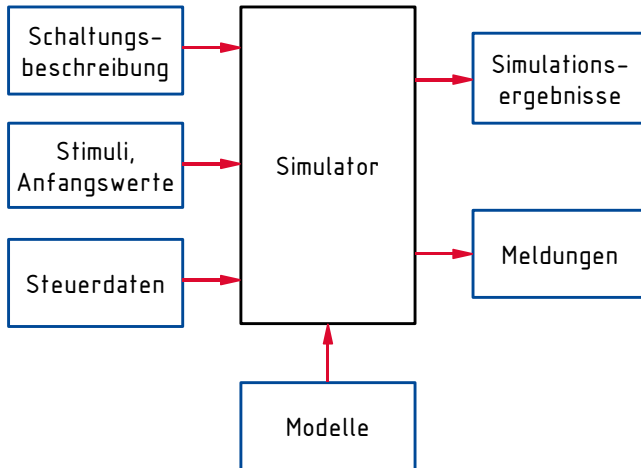


Bild 2.105: Ein- und Ausgabedaten eines Schaltungssimulators

in SPICE verwendeten Knotenpotenzialanalyse automatisch als Bezugsknoten gewählt wird. Alle anderen Knoten der Schaltung müssen eine galvanische Verbindung zu diesem Bezugsknoten haben, damit ihr elektrisches Potenzial bestimmbar ist.

Sind in einer Schaltung *Teilschaltungen* mehrfach enthalten, so empfiehlt es sich, zur Vereinfachung der Datenpflege und der Wiederverwendung von Entwurfsdaten (*Design Re-Use*) diese Schaltungsteile entsprechend einem Unterprogramm in der Softwaretechnik als Einheit zu definieren, die dann an mehreren Stellen der Schaltung instanziiert wird. In SPICE werden solche Teilschaltungen als *Subcircuit* bezeichnet.

Neben der Beschreibung der zu simulierenden Schaltung benötigt der Simulator noch Angaben über evtl. zu berücksichtigende elektrische *Anfangsbedingungen* (z. B. Vorladung von Kondensatoren) sowie die *Eingangssignale* der Schaltung (*Stimuli*). Bei SPICE werden diese Daten als *Initial Condition* bzw. als Quellen in die Netzliste integriert. In anderen Simulationsumgebungen werden sie separat definiert.

Über *Steuerdaten* werden dem Simulator weitere Informationen zugeführt, insbesondere über

- Simulationstyp, z. B. Gleichstromanalyse, Sinusstromanalyse, Transientenanalyse
- auszugebende Größen (Spannungen, Ströme)
- Simulationsablauf, z. B. Anfangs- und Endzeitpunkt der Ergebnisausgabe
- Variation von Parametern, z. B. von Widerstands- oder Kapazitätswerten
- anzunehmende Temperatur der Schaltungselemente
- Angabe des Pfades zu benötigten Dateien, z. B. mit Modellen oder Stimuli.

Nachdem auf Grund der Steuerdaten aus der Schaltungsbeschreibung und den Stimuli ein Gleichungssystem aufgestellt worden ist, wird ein in Software implementierter Lösungsalgorithmus (*Solver*) aktiviert, um das Gleichungssystem zu lösen. Im Fall von Netzwerken, die nur aus linearen, zeitinvarianten Schaltungselementen bestehen und mit ebensolchen Quellen angeregt werden, ist das Gleichungssystem direkt lösbar. Bei nichtlinearen Netzwerken sind in der Regel mehrere *Iterationen* erforderlich, um die Lösung zu erhalten. In bestimmten Fällen ist ein *Konvergieren des Lösungsalgorithmus* nur durch geschicktes Modellieren und Setzen geeigneter

Anfangsbedingungen zu erreichen. Bei Netzwerken mit zeitvarianten Parametern oder Quellen werden Lösungen für diskrete Zeitpunkte berechnet, zwischen denen bei der Auswertung interpoliert werden muss. Die Länge der Zeitintervalle kann vom Benutzer oder vom Lösungsalgorithmus gewählt werden.

Die Ergebnisse der Simulation werden immer in eine oder mehrere Dateien geschrieben.

Neben den berechneten elektrischen Größen werden in der Regel auch statistische Informationen über den Ablauf der Simulation sowie ggf. Warn- und Fehlermeldungen ausgegeben. Die Dateien mit den Simulationsergebnissen können bei der Simulation des Verhaltens umfangreicher Schaltungen über einen längeren Zeitraum durchaus viele GByte groß werden.

2.6.3 Struktur einer integrierten Schaltungssimulations-Umgebung

Eine moderne Simulationsumgebung (*Simulation Workbench*) verfügt über eine grafische Benutzeroberfläche und ermöglicht eine grafische Darstellung der Eingangs- und Ausgangssignale der Schaltung. Evtl. können aus den Simulationsergebnissen mittels eines Datenaufbereitungs-Programms (*Post Processor*) noch weitere Informationen gewonnen werden, z. B. Aussagen über die umgesetzten Leistungen.

In Bild 2.106 ist die Struktur eines Simulationssystems dargestellt, das zur *Schaltungseingabe* (*Design Entry*) einen Schaltplan-Editor verwendet. Dieser Editor ist nicht Teil des eigentlichen Simulators!

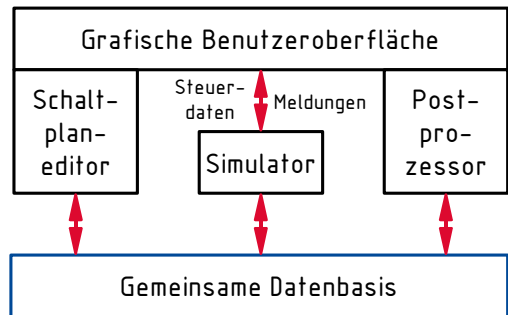


Bild 2.106: Struktur eines Simulationssystems mit Schaltplan-Editor

Alle Werkzeuge verwenden neben einer einheitlichen grafischen Benutzerschnittstelle (*Graphical User Interface*, GUI) eine gemeinsame Datenverwaltung (*Design Data Management*) und erscheinen damit aus Anwendersicht „aus einem Guss“. Solche integrierten Entwicklungsumgebungen – die in der Regel noch wesentlich mehr Funktionen anbieten – werden als *Design Framework* bezeichnet.

Die Schaltungseingabe mit einem Schaltplan-Editor ist bei komplexen digitalen Schaltungen nicht mehr handhabbar. Daher werden solche Schaltungen mittels einer *Hardwarebeschreibungssprache* (*Hardware Description Language*, HDL) [Jan01], [SS07] entworfen. Der eine Schaltung beschreibende *HDL-Code* wird in der Regel mit einem syntaxsensitiven Text-Editor erstellt, der schon bei der Eingabe den Code auf einfache Fehler überprüft.

Ergänzt wird dieser Ansatz durch eine Vielzahl grafischer Entwurfswerkzeuge, die die vom Anwender eingegebenen Informationen oftmals in HDL-Code umsetzen können.

Mit solchen Werkzeugen lassen sich für den Entwurf hochkomplexer Systeme Modelle auf hohem Abstraktionsniveau (*High Level Design*) erstellen, die anschließend auf korrektes Verhalten untersucht werden.

2.6.4 Das SPICE Netzlistenformat

Eine SPICE-Netzliste kann mit einem beliebigen Text-Editor erstellt werden. Dabei ist zu beachten:

- Eingabedateien dürfen keinerlei Formatierungs-Informationen enthalten (außer Zeilenvor-schub), müssen also ggf. durch „Nur Text speichern“ erzeugt werden.
- *Groß- und Kleinschreibung* sind erlaubt, jedoch *keine nationalen Sonderzeichen wie Umlaute*.
- Groß- und Kleinbuchstaben haben die gleiche Bedeutung.
- Die erste Zeile jeder Eingabedatei ist die *Titelzeile*. Ihr Inhalt wird als Überschrift in der Ausgabedatei verwendet, ansonsten aber ignoriert.
- *Kommentarzeilen* beginnen mit einem Stern (*).
- Die *Reihenfolge* der Elementbeschreibungen in der Schaltungsbeschreibung ist beliebig.
- Die Angaben zur Beschreibung eines Elements sind *auf einer Zeile* von maximal 79 Zeichen Länge enthalten.
- Die einzelnen Angaben auf einer Zeile sind durch ein oder mehrere *Leerzeichen* voneinander zu trennen.
- *Steueranweisungen* stehen hinter der Schaltungsbeschreibung. Sie beginnen immer mit einem Punkt.
- Die *letzte Zeile* einer SPICE-Eingabedatei muss die „END“ Steueranweisung sein.

Die Syntax zur Beschreibung der drei Grundzweipole der Gleichstromtechnik ist sehr einfach:

```
R<name>      <knoten1>      <knoten2>      <widerstandswert in Ohm>
V<name>      <knoten1>      <knoten2>      <quellenspannung in Volt>
I<name>      <knoten1>      <knoten2>      <quellenstrom in Ampere>
```

Das erste Zeichen einer Zeile bezeichnet den Typ des Elements: „R“ für einen Ohmschen Widerstand, „V“ (nicht „U“!) für eine Spannungsquelle, „I“ für eine Stromquelle.

Die nachfolgenden Zeichen <name> identifizieren ein Schaltungselement durch einen individuellen Namen. Jeder Name muss innerhalb der ersten 8 Zeichen in einer Schaltung eindeutig sein. Beispiele hierfür sind: R1, R_LAST, R_I, I3, I_EIN, V_PLUS, V_ERSATZ

Die Knotenbezeichnungen <knoten1> und <knoten2> sind positive ganze Zahlen. Der Bezugsknoten erhält die Knotennummer „0“.

Die Zählpfeile für die Quellengrößen bei Spannungs- und Stromquelle weisen implizit von <knoten1> zu <knoten2>.

Der Wert der Schaltungselement-Parameter wird in Ohm, Volt bzw. Ampere angegeben.

Zahlen können als ganze Zahlen (z. B. 47), Dezimalbrüche mit Dezimalpunkt (z. B. 13.8), im Exponentialformat (z. B. 1.3E7) oder unter Verwendung der folgenden Abkürzungen für Zehnerpotenzen angegeben werden:

$$\begin{array}{llll} T = 10^{12} & G = 10^9 & \text{MEG} = 10^6 \text{ (!)} & K = 10^3 \\ M = 10^{-3} \text{ (!)} & U = 10^{-6} & N = 10^{-9} & P = 10^{-15} \end{array}$$

Wichtig: zwischen der Zahl und der o. g. Abkürzung darf kein Leerzeichen stehen!

Unterschiedliche Schreibweisen für die Zahl 1000 sind z. B.

1000 1000.0 1K 1E3 1.0E3

Zur Berechnung einfacher linearer Gleichstromnetzwerke wird nur der einfachste Analysetyp von SPICE, die Berechnung des *Arbeitspunktes* (*Operating Point*) benötigt. Der Analysetyp wird durch eine Steueranweisung nach der Schaltungsbeschreibung festgelegt. Die Anweisung zur Arbeitspunktberechnung heißt „OP“. Sie bewirkt, dass die *Potenziale aller Knoten* gegenüber dem Bezugsknoten und die *Ströme durch alle Spannungsquellen* ausgegeben werden.

Fließt ein gesuchter Strom in einem Zweig des Netzwerks, der keine Spannungsquelle enthält, muss man in den Zweig eine Spannungsquelle mit 0 V einfügen, damit der Strom ausgegeben wird. Der Zählpfeil des Stroms weist implizit in Richtung des Zählpfeils der Quellenspannung. An Spannungsquellen wird also Verbraucher-Zählpfeilsystem verwendet!

2.6.5 Berechnung linearer Gleichstromnetzwerke mit SPICE im Stapelbetrieb

Mit den Informationen aus Abschnitt 2.6.4 lassen sich Netzlisten zur Berechnung linearer Gleichstromnetzwerke schreiben, was an einem einfachen Beispiel demonstriert werden soll.

Beispiel 2.56: Netzliste zur Analyse der Schaltung in Beispiel 2.44

Um die Schaltung in Beispiel 2.44 analysieren zu können, sind in Reihe zu den Widerständen R_3 , R_4 und R_5 Spannungsquellen mit Quellenspannungen von 0 V zu schalten, damit die Ströme ausgegeben werden. Die folgende Netzliste wird mit einem Texteditor erstellt:

```
BEISPIEL
VQ1  1 0 16.2
R1   1 2 1
R2   2 3 2
VQ2  3 4 11.4
R4   2 5 25
V4   5 0 0
R5   2 6 40
V5   6 4 0
R3   4 7 5
V3   7 0 0
.OP
```

```
.END
```

Als Analyseergebnis erhält man u. a. die gesuchten Ströme durch die Spannungsquellen:

```
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
VQ1      - 1.200E+00
VQ2       3.000E-01
V4        6.000E-01
V5        3.000E-01
V3        6.000E-01
```

Da an den Spannungsquellen implizit das Verbraucher-Zählpfeilsystem verwendet wird, ist das Vorzeichen der Ströme I_1 (durch VQ1) und I_2 (durch VQ2) gegenüber den Ergebnissen des Beispiels 2.44 umgekehrt.



3 Elektrisches Potenzialfeld

Zwischen elektrischen Ladungen treten ähnlich wie zwischen Massen Kräfte auf, die allerdings je nach Polarität anziehend oder abstoßend wirken können. Man erklärt dieses Phänomen der zwischen Körpern über den Raum hinweg wirkenden Kräfte über die *Modellvorstellung* eines *Feldes*, das bei Massen als Gravitationsfeld und bei elektrischen Ladungen als elektrisches bzw. magnetisches Feld bezeichnet wird. Mit Hilfe des in Kapitel 4 behandelten magnetischen Feldes werden die Komponenten der Kraftwirkungen zwischen elektrischen Ladungen beschrieben, die *ausschließlich* auf deren *Bewegung* zurückzuführen sind.

Hinsichtlich der *Ursache* unterscheidet man zwischen *elektrischen Wirbelfeldern*, die durch die zeitliche Änderung eines Magnetfeldes erzeugt werden (Abschnitte 4.3.1.2 und 4.3.1.3), und *elektrischen Potenzialfeldern*, die von elektrischen Ladungen ausgehen, unabhängig von deren Bewegungszustand (Abschnitt 3.3).

Hinsichtlich der *Wirkung* des elektrischen Feldes wird unterschieden, ob dieses in *leitenden Räumen* auftritt, in denen die Kraftwirkung eine Ladungsströmung zur Folge hat (Abschnitt 3.2), oder in *nichtleitenden Räumen*, in denen zwar auch die Kraftwirkung, aber keine Ladungsströmung auftreten kann (Abschnitt 3.3).

Hinsichtlich der *Zeitabhängigkeit* unterscheidet man zwischen *elektrostatischen Feldern*, die die zeitlich konstante Wechselwirkung zwischen ruhenden Ladungen beschreiben, den *stationären elektrischen Strömungsfeldern*, in denen Ladungsströmungen mit zeitlich konstanten Geschwindigkeiten (Gleichströme) auftreten, und den *zeitlich veränderlichen Feldern*, in denen die Feldgrößen als Zeitfunktionen beschrieben werden müssen.

In diesem Kapitel werden die in elektrischen Leitern und Nichtleitern auftretenden wirbelfreien elektrischen Felder (Potenzialfelder) erläutert. Das in elektrischen Leitern auftretende elektrische *Strömungsfeld* lässt sich über die Modellvorstellung strömender Ladungsträger relativ anschaulich beschreiben. Dagegen erfordert die Betrachtung des in *Nichtleitern* auftretenden *elektrischen Feldes* abstraktere Vorstellungen, die nicht mehr an Materie gebunden sind. Dies folgt schon daraus, dass solche elektrischen Felder auch im Vakuum existieren können. Daher wird zunächst das elektrische Strömungsfeld und erst danach das elektrische Feld in Nichtleitern erläutert.

3.1 Definition und Wirkung der elektrischen Ladung

In Abschnitt 1.2.1 wurde bereits verbal beschrieben, wie man elektrische Ladungen wahrnehmen kann, und in Gl. (1.4) ist ihre SI-Einheit angegeben. Weiter wird in Kapitel 10 bei der Erläuterung der elektrischen Eigenschaften der Materie die elektrische Ladung aus elektronentheoretischer Sicht betrachtet. In diesem Abschnitt erfolgt die auf die makroskopische, d. h. feldtheoretische Sicht zugeschnittene, abstraktere Erläuterung der elektrischen Ladung, ihrer räumlichen Verteilung und der davon abhängigen Wirkungen.

3.1.1 Definition der elektrischen Ladung

Die *elektrische Ladung* kann in ihrer physikalischen Natur zwar nicht erklärt, wohl aber über ihre physikalischen Wirkungen und Eigenschaften als physikalische *Zustandsgröße* beschrieben werden.

Ladung ist ein Elementarzustand, der bestimmten Elementarteilchen des Mikrokosmos eigen ist. Diese nur bestimmten Elementarteilchen eigene Ladung hat immer den gleichen Betrag (siehe Anhang A.9), der als *Elementarladung* bezeichnet wird:

$$e \approx 1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{C} \quad (3.1)$$

Man kennt nur zwei unterschiedliche Arten des Ladungszustandes, die als *positive* oder *negative* elektrische Ladung bezeichnet werden. Die elektrische Ladung Q ist somit naturgemäß eine *wertdiskrete Größe*, deren Betrag immer ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e ist.

Elektrische Ladung kann als ein an Elementarteilchen gebundener, unveränderbarer Zustand weder erzeugt noch vernichtet werden.

Gemessen an den Gegebenheiten praktisch üblicher Anordnungen sind die Abstände zwischen den Ladungsträgern im atomaren Bereich und der Betrag der Elementarladung so klein, dass man in der *makroskopischen Betrachtung* die elektrische Ladung (genau wie in der Mechanik die Masse) als eine beliebig fein unterteilbare Größe mit räumlich kontinuierlicher Verteilung auffassen kann. Daher kann auch jedes – nicht ionisierte – Atom ungeachtet der mikrokosmisch diskreten Ladungsverteilung als insgesamt *elektrisch neutral* wirkend, d. h. als *ungeladen* betrachtet werden. Hinsichtlich der äußeren elektrischen Wirkung kann also z. B. nicht unterschieden werden zwischen einem Neutron, das keine Ladungen trägt, und einem Wasserstoffatom, das mikrokosmisch gesehen zwei ungleichnamige Elementarladungen trägt, deren Wirkungen sich makroskopisch gesehen aber gegenseitig kompensieren.

Ähnliche Betrachtungen gelten auch für größere Raumgebiete: Befinden sich in einem Raumgebiet positive und negative Ladungen in gleichen Mengen und gleicher räumlicher Verteilung, d. h. ideal miteinander vermischt, ist der Raum elektrisch neutral. Maßgebend für die elektrische Wirkung ist also nicht die Anzahl der in einem Raum vorhandenen elektrischen Elementarladungen, sondern die *resultierende Ladungsmenge* als Summe dieser Elementarladungen unter Beachtung ihres Vorzeichens

$$Q = e \cdot n_+ - e \cdot n_- , \quad (3.2)$$

die kurz auch als *Ladung eines Körpers* bezeichnet wird. Darin sind n_+ die Anzahl der positiven, n_- die Anzahl der negativen Elementarladungsträger und e der Wert der Elementarladung. Entsprechend dieser Definition unterscheidet man zwischen positiv und negativ geladenen Räumen bzw. positiven und negativen Ladungen.

Elektrische Wirkungen können aber auch von Körpern ausgehen, deren positive und negative Ladungen zwar gleich groß sind, jedoch eine räumlich ungleichmäßige Verteilung aufweisen [Fro94]. Im einfachsten Fall sind in einem Körper die gleich großen positiven und negativen Ladungsmengen nicht gleichmäßig verteilt, sondern in unterschiedlichen Teilgebieten dieses Körpers konzentriert, sodass ihre *Ladungsschwerpunkte* einen endlichen Abstand l voneinander haben (Bild 3.1). Von einem solchen als *elektrischer Dipol* bezeichneten Körper gehen trotz seiner resultierenden Ladungsmenge null auch elektrische Wirkungen aus.

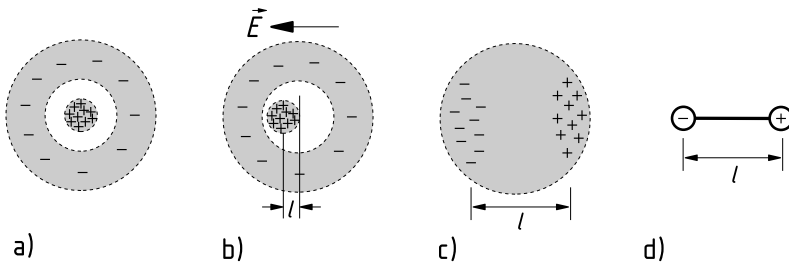


Bild 3.1: Schematisch skizzierte, räumliche Ladungsverteilungen a) und b) in einem Atom (mikrokosmisch betrachtet), c) auf einer Kugel (makroskopisch gesehen) und d) auf zwei durch einen Abstand getrennten Kugeln.

Makroskopische elektrische Wirkung:
 a) neutral,
 b) elektronische Polarisation ($\epsilon_r > 1$),
 c) und d) elektrischer Dipol

3.1.1.1 Reale Ladungsverteilungen und ihre Beschreibung

Für die Beschreibung der elektrischen Wirkung eines Raumgebiets aus makroskopischer Sicht kann der mikrokosmisch diskrete Charakter der Ladung außer acht gelassen werden. Man stellt sich also vor, die „körnig“ (punktuell, diskret) über den Raum verteilten Elementarladungen (Elektronen, Protonen) seien kontinuierlich über den Raum „verschmiert“ (über ihre Zwischenräume hinweg verteilt). Die Ladung wird also als eine *raum- und wertkontinuierliche Größe* betrachtet, die nicht an bestimmte Materiebausteine gebunden ist.

Eine solche in jedem Raumpunkt eindeutig definierte Ladung ist somit eine Größe, die man sich aus der mikrokosmischen Sicht als einen räumlichen Mittelwert der diskret verteilten Elementarladungen vorstellen muss. Befindet sich beispielsweise in einem hinreichend kleinen Raumgebiet ΔV die Anzahl Δn_+ Protonen und Δn_- Elektronen (Bild 3.2a), so hat dieses Raumgebiet entsprechend Gl. (3.2) die Ladung $\Delta Q = (\Delta n_+ - \Delta n_-) e$ und damit die mittlere Ladungsdichte

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{(\Delta n_+ - \Delta n_-) e}{\Delta V}. \quad (3.3)$$

Kann man die positiven und negativen Elementarladungen aus makroskopischer Sicht als ideal gleichmäßig ineinander verschachtelt über das Raumgebiet ΔV verteilt annehmen, so lässt sich dem gesamten Raumgebiet die gleiche mittlere Ladungsdichte $\Delta Q/\Delta V$ zuordnen. Dieser Mittelwert gilt dann für jeden Raumpunkt sowohl zwischen den Ladungsträgern (wo sich real keine Ladung befindet) als auch innerhalb derselben (wo real eine extrem große Ladungsdichte herrscht) (Bild 3.2b). Bildet man mit dieser Vorstellung den Grenzwert für ein gegen null strebendes Volumen ($\Delta V \rightarrow 0$), so bekommt man die Definition der *Raumladungsdichte*

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, \quad (3.4)$$

mit der sich beliebige Ladungsverteilungen als Raumfunktion angeben lassen, z. B. $\varrho(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten oder $\varrho(\vec{r})$, wenn \vec{r} der Ortsvektor vom Ursprung zum betrachteten Volumen ist.

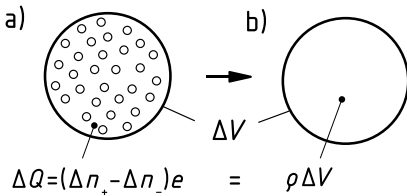


Bild 3.2: Raumgebiet ΔV mit Elementarladungsträgern (a), deren Ladung als kontinuierlich verteilt aufgefasst durch die Raumladungsdichte ρ beschrieben wird (b)

Ist die Raumladungsdichte ρ nach Gl. (3.3) für ein Raumgebiet V als Ortsfunktion $\rho(x, y, z)$ bekannt, lässt sich die in diesem Raumgebiet befindliche Ladung

$$Q = \int_V \rho \, dV = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (3.5)$$

durch Integration über das Raumgebiet berechnen. Umgekehrt lässt sich aber aus der für einen Raum gegebenen Ladung Q nicht unbedingt auch deren Verteilung, also die Ortsfunktion der Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ berechnen. Nur in Fällen einer *homogen* über das Volumen V verteilten Ladung Q ist die Raumladungsdichte

$$\rho = \frac{Q}{V}. \quad (3.6)$$

Idealisierte Ladungsverteilungen

Einheitliche Materie und damit einheitliche Ladungsstrukturen erstrecken sich nie über einen unendlich ausgedehnten Raum, sondern immer nur über mehr oder weniger scharf begrenzte Gebiete unterschiedlichster Geometrie und Ausdehnung. Beispiele sind in Luft parallel verlaufende Leitungen oder Metallplatten, die durch eine Isolierstoffschicht getrennt sind (Bild 3.26 oder 3.28). Praktisch stellt sich daher die Aufgabe, die Ladungsverteilung jeweils in begrenzten Raumgebieten zu beschreiben. Dabei lässt sich häufig der Raum so diskretisiert betrachten, dass einzelne Gebiete mit extrem unterschiedlichen Ladungsverteilungen vorliegen. Weiter ermöglicht es die Art der Raumdiskretisierung auch häufig, dass man für einzelne begrenzte Gebiete, abhängig von ihrer Ausdehnung und dem Betrachtungsabstand, *idealisierte Ladungsverteilungen* annehmen kann, die sich mit vereinfachten Definitionen relativ einfach wie folgt beschreiben lassen.

Für die Berechnung der idealisierten Ladungsverteilung gilt der Kommentar zu Gl. (3.6) sinngemäß, d. h. ist die Raumfunktion der Ladungsverteilung gegeben, so lässt sich durch deren Integration die Ladung Q berechnen. Umgekehrt lässt sich aber aus einer gegebenen Ladung Q deren Verteilung nur in Sonderfällen bestimmen, beispielsweise besonders einfach bei homogener Verteilung nach Gl. (3.8) oder (3.10).

Flächenladungsdichte

Bei Elektroden, z. B. einer Metallplatte in Bild 3.3, befindet sich die Ladung Q im allgemeinen in bzw. auf der Oberfläche A mit einer „Schichtdicke“, die vernachlässigbar klein ist, in einer beliebigen gleich- oder ungleichmäßigen Verteilung. In einem Flächenelement ΔA befindet sich dann die Teilladung ΔQ , die als homogen über ΔA verteilt aufgefasst werden kann, wenn ΔA infinitesimal klein ist ($\Delta A \rightarrow 0$). Bezieht man die mit der Fläche $\Delta A \rightarrow 0$ gegen null

strebende Ladung ($\Delta Q \rightarrow 0$) auf die Fläche ΔA , so bekommt man einen Grenzwert, der die *Flächenladungsdichte*

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA} \quad (3.7)$$

definiert. Mit der Flächenladungsdichte σ lässt sich die Verteilung der Ladung – konzentriert in einer Schichtdicke null angenommen – über eine Fläche beschreiben mit einer der Geometrie der Fläche entsprechenden Ortsfunktion $\sigma(x, y, z)$.

In den einfachen Fällen einer homogen über eine Fläche A verteilten Ladung Q lässt sich Gl. (3.7) auch in der Form

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (3.8)$$

schreiben mit σ konstant über A .

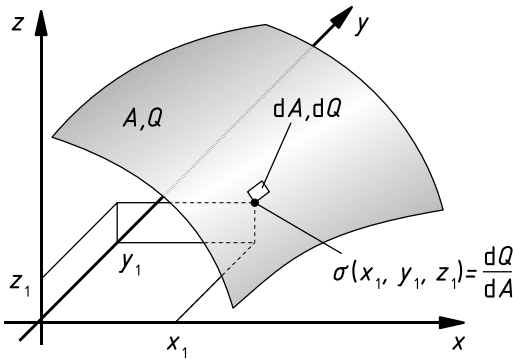


Bild 3.3: Flächenladungsdichte σ als Raumfunktion in kartesischen Koordinaten dargestellt

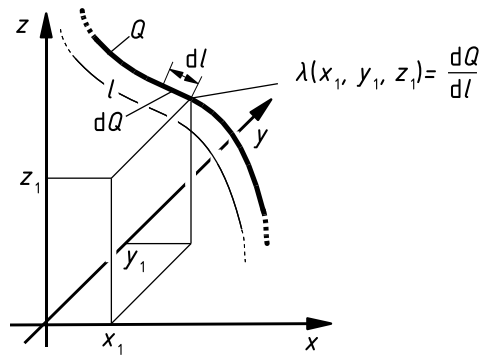


Bild 3.4: Linienladungsdichte λ als Raumfunktion in kartesischen Koordinaten dargestellt

Linienladungsdichte

Wird ein Leiter aus einer Entfernung betrachtet, die groß ist gegenüber seinen Querschnittsabmessungen, so können diese als vernachlässigbar klein und damit der Leiter als Linie angenommen werden.

Befindet sich auf einem solchen *Linienleiter* der Länge l die Ladung Q in beliebiger, also auch ungleichmäßiger Verteilung, stellt man sich den Leiter, wie in Bild 3.4 skizziert, in Leiterelemente der Länge Δl unterteilt vor. Über diese Teillängen Δl können die jeweiligen Teilladungen ΔQ als homogen verteilt aufgefasst werden, wenn Δl gegen null strebt ($\Delta l \rightarrow 0$). Man kann dann die mit der Länge ($\Delta l \rightarrow 0$) auch gegen null strebende Ladung ($\Delta Q \rightarrow 0$) auf die Länge Δl beziehen und bekommt so einen Grenzwert, der die *Linienladungsdichte*

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (3.9)$$

definiert.

Ist die Ladung Q über die ganze Linienleiterlänge l homogen verteilt, lässt sich Gl. (3.9) auch in der Form

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad (3.10)$$

schreiben mit λ konstant über l .

Punktladung

Sind die räumlichen Abmessungen eines geladenen Gebiets mit dem Volumen V (Bild 3.5) vernachlässigbar klein gegenüber dem Betrachtungsabstand r , so lässt sich seine Ladung Q als in einem Punkt konzentriert modellieren. Die so idealisiert angenommene Ladung, als *Punktladung* Q_p bezeichnet, lässt sich (einfacher, als wenn sie über ein Raumgebiet verteilt ist) mit einer einzigen Ortsangabe, z.B. in Bild 3.5 mit x_1, y_1, z_1 , beschreiben. Die Punktladung ist ein abstrakter Begriff, der die Vorstellung einer gegen unendlich strebenden Raumladungsdichte erfordert ($\rho \rightarrow \infty$).

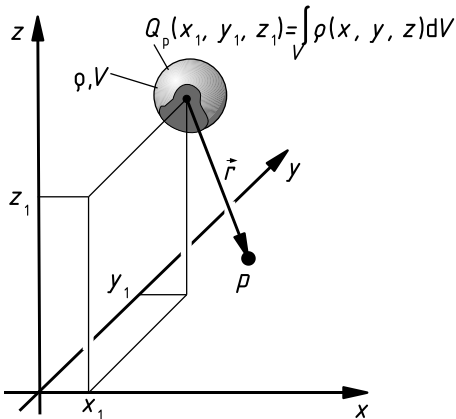


Bild 3.5: Ladungsgebiet V als Punktladung Q_p dargestellt

Beispiel 3.1: Raumladungsdichte des Elektrons

Ein Elektron wird häufig als Punktladung mit $Q_p = -e$ aufgefasst. Das erfordert aber die Vorstellung, dass für ein mit dem Volumen $V \rightarrow 0$ aufgefasstes Elektron eine Raumladungsdichte $\rho = -e/V \rightarrow -\infty$ anzunehmen ist. Da das Elektron zwar unvorstellbar klein ist, aber doch eine räumliche Ausdehnungen hat, ist auch seine Raumladungsdichte endlich. Nimmt man es beispielsweise kugelförmig mit dem Radius $r_e \approx 1,4 \cdot 10^{-12}$ mm an, berechnet man entsprechend Gl. (3.6) die Raumladungsdichte

$$\rho_e \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} / [(1,4 \cdot 10^{-12} \text{ mm})^3 4\pi/3] \approx -13,9 \cdot 10^{15} \text{ C/mm}^3$$

mit einem betragsmäßig unvorstellbar großen, aber endlichen Wert.

3.1.1.2 Ladungserhaltungssatz und Kontinuitätsgleichung

In einem Gebiet, dessen Grenzen für Materie, d. h. auch für Ladungsträger, undurchlässig sind (*abgeschlossenes System*), bleibt die Ladung Q entsprechend Gl. (3.2) konstant. Man bezeichnet diese Tatsache als *Ladungserhaltungssatz*.

Befinden sich in einem abgeschlossenen System n Ladungen Q_ν , von denen jede für sich in einem beliebigen Teilgebiet dieses Systems beliebig verteilt sein kann, z. B. auf unterschiedlichen Elektroden konzentriert, lautet die mathematische Formulierung des *Ladungserhaltungssatzes*

$$\sum_{\nu=1}^n Q_\nu = \text{const.} \quad (3.11)$$

oder mit der Raumladungsdichte nach Gl. (3.5)

$$\int_V \varrho \, dV = \text{const.} \quad (3.12)$$

V ist das Volumen des abgeschlossenen Systems

Sind idealisierte Ladungsverteilungen gegeben, kann in Gl. (3.12) das Produkt $\varrho \, dV = dQ$ durch das Produkt $\sigma \, dA$ nach Gl. (3.7) bzw. $\lambda \, dl$ nach Gl. (3.9) ersetzt werden:

$$\int_A \sigma \, dA = \text{const.}, \quad \int_l \lambda \, dl = \text{const.} \quad (3.13)$$

A ist die Fläche innerhalb des abgeschlossenen Systems

l ist die Länge innerhalb des abgeschlossenen Systems

Kann durch die ein Volumen V begrenzende *Hüllfläche* A Ladung fließen, muss sich die Ladung Q in diesem Volumen genau um den durch die Hüllfläche fließenden Ladungsanteil ändern, da Ladung nicht entstehen oder verschwinden kann. Um diesen Tatbestand mathematisch auswertbar zu formulieren, werden die durch die Hüllfläche strömenden Ladungen und die dadurch bedingte Ladungsänderung innerhalb des durch die Hüllfläche begrenzten Volumens auf die Zeit bezogen und gleich gesetzt, wie im Folgenden erläutert ist.

In Abschnitt 1.2.2 ist der elektrische Strom $i = dQ/dt$ in einem Leiter als die pro Zeit t durch seinen Querschnitt fließende Ladung Q erklärt. Weiter ist in Abschnitt 3.2.2 hergeleitet, dass der durch eine Fläche A fließende Strom nach Gl. (3.38) auch als Integral der Stromdichte \vec{J} über diese Fläche A berechnet werden kann.

Betrachtet man ein Volumen, z. B. das in Bild 3.6 skizzierte, so beschreibt das Hüllenintegral der Stromdichte \vec{J} über die das Volumen V einschließende Hüllfläche A entsprechend Gl. (3.38) den aus dem Volumen V *heraus* fließenden Strom $i = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$. Dieser ist gleich der pro Zeit durch die Hüllfläche A aus dem Volumen V ausströmenden Ladung $dQ/dt = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$ und damit gleich der zeitlichen *Ladungsverminderung* $-dQ/dt$ im von A eingeschlossenen Volumen V .

Bestimmt man über die Raumladungsdichte ϱ die Ladung des Volumens $Q = \int_V \varrho \, dV$ (Gl. (3.5)) und setzt deren zeitliche *Verminderung* $-dQ/dt$ gleich der pro Zeit durch die Hüllfläche ausströmenden Ladung, ergibt sich die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV = - \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (3.14)$$

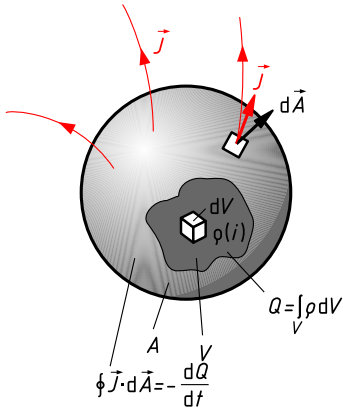


Bild 3.6: Änderung der Raumladung Q im Volumen V infolge der Stromdichte \vec{J} durch die Hüllfläche A um V

Gl. (3.14) gilt für beliebige elektrische Strömungsfelder \vec{J} . Entsprechend den Regeln der Vektoranalysis müssen die Flächenvektoren $d\vec{A}$ stets aus dem eingeschlossenen Volumen *heraus* weisend eingetragen werden.

Je nach Aufgabenstellung kann in Gl. (3.14) selbstverständlich ρdV durch σdA bzw. λdl ersetzt oder ergänzt werden. Es können auch die integralen Größen $\sum Q = \int \rho dV$ gemäß Gl. (3.5) und $\sum I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$ gemäß Gl. (3.38) eingesetzt werden:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n Q_{\nu} = - \sum_{\mu=1}^m I_{\mu} \tag{3.15}$$

Zu beachten ist auch hier, dass in Gl. (3.15) die Zählpfeile für die Ströme I_{μ} wie die Vektoren $d\vec{A}$ aus der Hülle *heraus* weisend einzutragen sind.

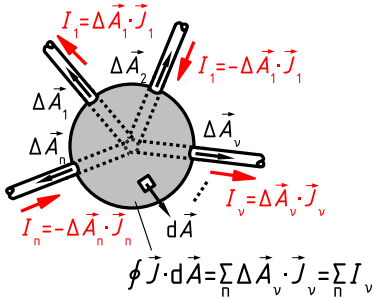


Bild 3.7: Grafische Darstellung zum Knotensatz

Aus der integralen Form der Kontinuitätsgleichung (3.15) folgt das als *Knotensatz* (1. Kirchhoffscher Satz) bezeichnete Grundgesetz der Netzwerklehre (Abschnitt 2.2.2.1): Da sich in einem idealisierten Knoten eines Netzwerks die Ladungen nicht ändern, ist die zeitliche Ableitung dQ/dt , also die linke Seite der Gl. (3.15) null. Denkt man sich den Knoten von einer Hülle eingeschlossen, durch die alle m im Knoten verbundenen Leitungen hindurchgehen, muss die Summe der m in den Leitungen und damit durch die Hülle fließenden Ströme entsprechend der

rechten Seite der Gl. (3.15) null sein (Bild 3.7):

$$\sum_{\mu=1}^m I_{\mu} = 0 \quad (3.16)$$

Zu beachten ist, dass die Ströme mit positiven oder negativen Vorzeichen einzusetzen sind, je nachdem, ob ihre Zählpfeile im Ersatzschaltbild vom Knoten wegweisend (aus der Hülle heraus) oder zum Knoten hinweisend (in die Hülle hinein) eingetragen sind (siehe Regeln zu Gl. (2.78) in Abschnitt 2.2.2.1).

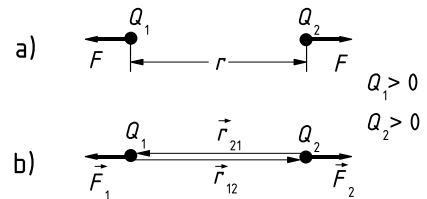
3.1.2 Wirkungen der elektrischen Ladung

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit den Wirkungen elektrischer Ladungen, die sich relativ zum Beobachter und damit auch relativ zueinander in Ruhe befinden, d. h. mit den Erscheinungen *elektrostatischer Felder*. Die Beschränkung auf ruhende Ladungen bedeutet nicht, dass alle hier behandelten Gesetze ausschließlich im Bereich der Elektrostatik Gültigkeit hätten. Die allgemeinen Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes, in denen die der Elektrostatik als einfacher Sonderfall enthalten sind, werden jedoch erst in Abschnitt 4.5 behandelt.

3.1.2.1 Coulombsches Gesetz

Die Theorie des elektrostatischen Feldes basiert auf der *experimentell nachgewiesenen* Kraftwirkung zwischen Ladungen, die durch das Coulombsche Gesetz beschrieben wird. Daher wird im Folgenden, ausgehend vom Coulombschen Gesetz, die *Modellvorstellung* des elektrischen Feldes erläutert.

Bild 3.8: Kraftwirkung zwischen elektrischen Punktladungen



Nach allen Erfahrungen und experimentellen Untersuchungen ist die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 (Bild 3.8a) proportional dem Produkt dieser Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes r .

Die Überführung dieser zunächst nur als Proportion $|\vec{F}| \sim |Q_1 Q_2|/r^2$ zu beschreibenden Naturbeobachtung in eine Gleichung $|\vec{F}| = 1/(4\pi\epsilon_0)|Q_1 Q_2|/r^2$ erfordert im SI-Einheitensystem (Vierersystem) mit den Einheiten Newton (N) für die Kraft F , Amperesekunden (As) für die Ladung Q und Meter (m) für die Länge r die Einführung eines dimensionsbehafteten Proportionalitätsfaktors $1/(4\pi\epsilon_0)$.

Die darin enthaltene, als *elektrische Feldkonstante*

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (3.17)$$

bezeichnete Größe ist über die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum definiert.

Entsprechend den zwei Ladungsarten (positive bzw. negative) können anziehende oder abstoßende Kräfte zwischen Ladungen auftreten.

Um neben dem Betrag auch Richtung und Orientierung der Kraft als Gleichung angeben zu können, wird entsprechend Bild 3.8b der Abstand zwischen den Ladungen als Vektor \vec{r} eingeführt. Der Abstandsvektor \vec{r} weist zu derjenigen Ladung Q hin, für die die auf sie wirkende Kraft berechnet werden soll. Zur Berechnung von \vec{F}_1 bzw. \vec{F}_2 ist also \vec{r}_{21} als von Q_2 nach Q_1 bzw. \vec{r}_{12} als von Q_1 nach Q_2 orientiert anzunehmen.

Damit lässt sich das *Coulombsche Gesetz*

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \left(\frac{\vec{r}_{21/12}}{r} \right) \quad (3.18)$$

als Vektorgleichung schreiben, nach der sich unter Beachtung der Vorzeichen der Ladungen Q_1 und Q_2 die Kraft mit Betrag, Richtung und Orientierung ergibt. Für quantitative Auswertungen wird die elektrische Feldkonstante entsprechend Gl. (3.17) eingesetzt. Das Coulombsche Gesetz nach Gl. (3.18) beschreibt vollständig die *Kraftwirkung zwischen ruhenden Ladungen*:

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Ist $Q_1 \cdot Q_2$ positiv, wirkt $\vec{F}_{1/2}$ jeweils in der Orientierung $\vec{r}_{21/21}$ (Abstoßung); ist $Q_1 \cdot Q_2$ negativ, wirkt $\vec{F}_{1/2}$ jeweils entgegen der Orientierung $\vec{r}_{21/21}$ (Anziehung). Es gilt das *Reaktionsprinzip*, d. h. \vec{F}_1 und \vec{F}_2 wirken mit gleichen Beträgen, aber entgegengesetzten Orientierungen in der Verbindungsgeraden zwischen Q_1 und Q_2 ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$).

Das Coulombsche Gesetz gilt streng nur für Punktladungen, näherungsweise aber auch für geladene Körper, deren Linearabmessungen klein sind gegenüber ihrem Abstand voneinander.

Beispiel 3.2: Verhältnis von Coulomb- zu Gravitationskraft

Das Coulombsche Gesetz ist formal ähnlich dem die Kraftwirkung zwischen zwei Massen m_1 und m_2 beschreibenden Gravitationsgesetz

$$F_m = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

mit der Gravitationskonstanten $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Trotz dieser formalen Ähnlichkeit besteht zwischen den beiden fundamentalen Grundgleichungen ein qualitativer wie quantitativer Unterschied. Zwischen Massen können nur anziehende, zwischen Ladungen aber anziehende oder abstoßende Kräfte auftreten.

Berechnet man für zwei Elektronen bzw. Protonen mit ihren Ruhemassen $m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ bzw. $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und Ladungen $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ das Verhältnis der Beträge von Coulomb- zu Gravitationskraft

$$\frac{F_c}{F_m} = \frac{Q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)}{m^2 G/r^2} = \left(\frac{Q}{m} \right)^2 \frac{1}{G4\pi\epsilon_0} \approx \begin{cases} 4,2 \cdot 10^{42} & \text{für Elektronen,} \\ 1,3 \cdot 10^{36} & \text{für Protonen} \end{cases} \quad (3.19)$$

so erkennt man auch den extremen quantitativen Unterschied.

3.1.2.2 Feldwirkung der elektrischen Ladung

Das Coulombsche Gesetz wird der *Fernwirkungstheorie* zugeordnet, da eine Ladung Q_1 über beliebige räumliche Entfernungen hinweg die an einer zweiten Ladung Q_2 angreifende Kraft \vec{F}_2 bewirkt und umgekehrt. Der Ursache (Ladung) wird also eine in beliebig weit entfernten Raumgebieten auftretende Wirkung (Kraft auf eine zweite Ladung) *unmittelbar* zugeschrieben. Der die Ladungen umgebende Raum hat nach dieser Auffassung keine die Kraftwirkung vermittelnde Funktion.

Die *Nahwirkungs-* oder *Feldtheorie* dagegen erklärt alle zu beobachtenden Wirkungen als *besondere physikalische Zustände des Raumes* und ordnet konsequenterweise jeder *Wirkung*, hier der Kraftwirkung, eine *im selben Raumpunkt zur selben Zeit* auftretende *Feldgröße* zu, die die durch den Raumzustand begründete Ursache beschreibt.

Elektrische Feldstärke

Im Folgenden wird die Modellvorstellung einer Feldgröße, die die *Kraftwirkung* auf Ladungen verursacht, unmittelbar aus dem Coulombschen Gesetz anhand der in Bild 3.8b skizzierten zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 entwickelt. Auf die im Raumpunkt 1 befindliche Ladung Q_1 wirkt nach Gl. (3.18) die Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_1 = Q_1 \underbrace{\left[\frac{Q_2}{4\pi \varepsilon_0 r_{21}^2} \left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \right) \right]}_{\text{als Raumzustand aufgefasst}}. \quad (3.20)$$

Nach der Feldtheorie soll diese Kraftwirkung über eine mit ihr zusammen an ein und demselben Ort auftretende Feldgröße beschrieben werden. Die Kraft \vec{F}_1 selbst darf nicht als Feldgröße im Sinne einer Zustandsgröße des Raumes aufgefasst werden, da sie auch von Betrag und Vorzeichen einer dort – zufällig – auftretenden Ladung Q_1 abhängt. Bezieht man aber die Kraft \vec{F}_1 auf die Ladung Q_1 , auf die sie wirkt, erhält man eine Größe

$$\frac{\vec{F}_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{4\pi \varepsilon_0 r_{21}^2} \left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \right) = \vec{E}_1, \quad (3.21)$$

die unabhängig von der im Raumpunkt 1 vorhandenen Ladung Q_1 ist. Diese Größe kann daher als der dem Raumpunkt eigene Zustand angesehen werden, der sozusagen das *Vermögen* des Raumes beschreibt, in diesem Punkt eine Kraft auf eine Ladung auszuüben.

Über den speziellen Fall der zwei Punktladungen hinaus ist der Quotient *Kraft pro Ladung* als eine allein dem Raum eigene Feldgröße definiert, die als *elektrische Feldstärke* mit dem Symbol \vec{E} bezeichnet wird.

Wirkt also in einem Raumpunkt auf eine Ladung Q eine Kraft \vec{F} , herrscht in diesem Raumpunkt eine elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \quad (3.22)$$

die wie die Kraft \vec{F} ein Vektor ist. Bei positiver Ladung sind die elektrische Feldstärke und die Kraft gleich orientiert ($\vec{E} \uparrow \vec{F}$), bei negativer Ladung entgegengesetzt ($\vec{E} \downarrow \vec{F}$).

Nach der Definition wird das elektrostatische Feld durch eine Kraft auf eine Ladung festgestellt. Die Ladung wirkt also als *Indikator*, man nennt sie deshalb *Probeladung*. Die dem Raumpunkt eigene elektrische Feldstärke \vec{E} ist vom Wert der Probeladung insofern unabhängig, als der Feldzustand auch dann besteht, wenn infolge des Fehlens einer Probeladung keine Kräfte beobachtet werden.

Die SI-Einheit der elektrischen Feldstärke folgt unmittelbar aus Gl. (3.22)

$$[E] = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{VAs/m}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (3.23)$$

Elektrische Flussdichte

Die nach Gl. (3.21) definierte elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_1(Q_2) = \frac{\vec{F}_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \right), \quad (3.24)$$

Elektrische Feldstärke (Wirkungsgröße)	Definition (Mess- vorschrift für die Wirkungsgröße)	Abhängigkeit von Ladung im Abstand r und Raumeigenschaft (ϵ_0) (Rechenvorschrift)
--	---	---

ist zwar unmittelbar im Raumpunkt ihrer Wirkung definiert (Nahwirkungstheorie), sie ist aber über die Rechenanweisung von Gl. (3.24) immer noch der räumlich entfernten primären Ursache Q_2 zugeordnet. Der Einfluss der *Raumeigenschaften* auf die Verknüpfungen zwischen der körperlich existenten Ladung (primäre Ursache) und der von ihr in einem beliebigen Raumpunkt verursachten Feldgröße (Wirkungsgröße des Raumes) kann also in diesem einfachen Beispiel noch nicht aufgezeigt werden, sondern erst im Zuge der in den folgenden Abschnitten erläuterten Ausweitung der Feldtheorie auf kompliziertere Gegebenheiten geklärt werden.

Insbesondere für von Materie erfüllten Raum erweist es sich als zweckmäßig, eine weitere Feldgröße, die als *elektrische Flussdichte* \vec{D} bezeichnet wird, einzuführen. Aus der Definitionsgleichung

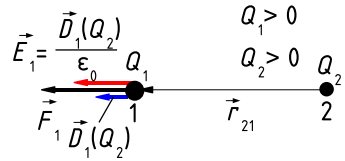
$$\vec{D}_1(Q_2) = \epsilon_0 \vec{E}_1(Q_2) = \frac{Q_2}{4\pi r^2} \left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \right), \quad (3.25)$$

elektrische Flussdichte	Definition über Raumeigenschaft	Abhängigkeit von Ladung und Raumgeometrie (Rechenvorschrift)
----------------------------	------------------------------------	--

wird deutlich, dass man die Ladung Q als die körperlich existente, primäre Ursache des elektrischen Feldes allein über die Raumgeometrie in die dem Raumpunkt zugeordnete Feldgröße elektrische Flussdichte $\vec{D}(Q)$ umrechnen kann. Dementsprechend wird die elektrische Flussdichte \vec{D} als die *Feldgröße der Ursache (Ursachenfeldgröße)* angesehen.

Mit ihrer Definition entsprechend Gl. (3.25) bzw. Gl. (3.28) sind der die Wirkung des Feldes beschreibende Feldvektor (*Wirkungsfeldgröße*) Feldstärke \vec{E} , der der Ursache des Feldes

Bild 3.9: Zur Definition der vektoriellen elektrischen Feldgrößen aus der Kraftwirkung auf ruhende Ladungen, dargestellt für den Fall $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$



zugeordnete Feldvektor Flussdichte \vec{D} und die elektrische Feldkonstante ϵ_0 so miteinander verknüpft, dass gemäß Bild (3.9) alle drei Größen in demselben Raumpunkt und zu derselben Zeit auftreten.

Ähnlich wie nach Gl. (3.21) für die elektrische Feldstärke festgestellt, kommt auch der für den speziellen Fall zweier Punktladungen hergeleiteten Definitionsgleichung (3.25) der elektrischen Flussdichte \vec{D} allgemeinere Bedeutung zu. Man ersetzt dazu in Gl. (3.25) die elektrische Feldkonstante ϵ_0 durch eine als *Permittivität*

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (3.26)$$

bezeichnete Größe, in der die *relative Permittivität*

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (3.27)$$

den Einfluss der Materie auf das elektrische Feld beschreibt. In der für beliebige, elektrisch isotrope Materie gültigen *Definition der elektrischen Flussdichte*

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.28)$$

wird also auch der Einfluss der Materie auf den Zusammenhang zwischen Ursachenfeldgröße (\vec{D}) und der Wirkungsfeldgröße (\vec{E}) ortsbezogen über den Materialparameter ϵ_r beschrieben. Die Zweckmäßigkeit dieser Definition erkennt man schon hier aus der Vorstellung eines *inhomogenen Raumes*, für den ϵ keine konstante Größe, sondern eine Ortsfunktion ist.

Vorstehende Erläuterungen zeigen, dass der elektrischen Ladung in der Feldtheorie eine doppelte Bedeutung zukommt: einerseits *verursacht* sie ein elektrisches Feld, andererseits erfährt sie im elektrischen Feld aber auch eine *Kraftwirkung*. Dabei mag durch das einfache Beispiel hier zunächst der Eindruck erweckt werden, dass die Felddarstellung ein – entbehrlicher – mathematischer Formalismus sei, da nach dem Coulombschen Gesetz Gl. (3.18) die Kraftwirkung des Feldes auch unmittelbar auf die dieses Feld erregenden Ladungen zurückführbar ist. Gerade in der Einführung der Feldvorstellung zeichnet sich jedoch der entscheidende Wandel der physikalischen Auffassung ab, deren Bedeutung erst bei der Behandlung schnell veränderlicher Felder und deren räumlicher Ausbreitung in vollem Umfang erkennbar wird.

3.2 Elektrisches Strömungsfeld

In diesem Abschnitt wird das Feld strömender Ladungen in Gebieten mit *linearem, passivem, isotropem Material* behandelt. Die Spannung U an einem solchen Gebiet ist durch das *Ohmsche Gesetz* $U = IR$ mit dem Strom I durch dieses Gebiet verknüpft, sodass es gleichgültig ist, ob man als *Ursache* für die räumliche Ladungsströmung einen (von außen) eingepprägten Strom I oder eine (von außen) angelegte Spannung betrachtet.

Auf das Problem des im Allgemeinen in einem geschlossenen Kreis auftretenden Strömungsfeldes unter Einbeziehung seiner Ursache [Fro94], die lokalisiert in diesem Kreis liegen (z. B. galvanische Quelle) oder nicht lokalisierbar mit diesem verknüpft (zeitvariantes Magnetfeld) sein kann, wird erst in Abschnitt 4 eingegangen.

3.2.1 Wesen und Darstellung des elektrischen Strömungsfeldes

Wie in Abschnitt 10.4 erläutert wird, existieren in elektrischen Leitern frei bewegliche Ladungsträger. Wirkt also in einem solchen Leiter eine elektrische Feldstärke \vec{E} , z. B. durch Anlegen einer Spannung, so übt diese Kräfte $\vec{F} = Q\vec{E}$ auf die Ladungsträger aus, sodass sich ihren *unregelmäßigen thermischen Bewegungen* eine *gerichtete Bewegungskomponente* überlagert. Es kommt also zu einer resultierenden Ladungsströmung in Richtung der Kraftwirkung, was als *elektrisches Strömungsfeld* bezeichnet wird. Man sagt auch, die frei beweglichen Ladungsträger *driften* in Richtung der Kraftwirkung.

3.2.1.1 Driftladung

In der elektrischen Feldlehre wird, ähnlich wie in Abschnitt 3.1.1.1 für die Ladung Q erläutert, die Elementarladung e der frei beweglichen Ladungsträger als Kontinuum aufgefasst, wie im Folgenden erläutert.

Einen langen, geraden Leiter aus homogenem Material mit dem Querschnitt A_q stellt man sich, wie in Bild 3.10 skizziert, in Volumenelemente $\Delta V = A_q \Delta l$ der Länge Δl unterteilt vor, in denen sich Δn_d frei bewegliche Ladungsträger mit der Elementarladung e befinden. Die sich damit insgesamt in einem Volumenelement befindliche, frei bewegliche Ladung wird zur Unterscheidung von der allgemeinen Raumladung nach Gl. (3.2) (die in einem solchen Leiter null ist) als *Driftladung* $\Delta Q_d = e \Delta n_d$ bezeichnet. Da diese Driftladung als Kontinuum, d. h. über die „Zwischenräume“ ihrer Träger hinweg kontinuierlich über das Volumen ΔV „verschmiert“ angenommen wird, lässt sich ähnlich den Gln. (3.2) bis (3.4) eine *Driftladungsdichte*

$$\eta = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_d}{\Delta V} = \frac{dQ_d}{dV} \quad (3.29)$$

definieren, die sich als räumlicher Mittelwert der real nur in den Ladungsträgern existierenden Driftladung auch jedem Raumpunkt zuordnen lässt.

Mit dieser (vorzeichenbehafteten) Driftladungsdichte η lässt sich auch für ein infinitesimal kleines Volumenelement $dV = A_q dl$ mit der infinitesimal kleinen Leiterlänge dl eine infinitesimale Teil-Driftladung

$$dQ_d = \eta dV = \eta A_q dl \quad (3.30)$$

bestimmen.

3.2.1.2 Driftgeschwindigkeit und elektrische Stromdichte

Betrachtet wird der in Bild 3.10 dargestellte Leiterabschnitt. Die in dem Volumenelement $dV = A_q dl$ der Länge dl befindliche (positiv angenommene) Driftladung $dQ_d = \eta dV$ ströme in der Zeit dt durch die Stirnfläche A_q dieses Volumens. Der Quotient dQ_d/dt als Ladung, die pro Zeit durch den Leiterquerschnitt strömt, entspricht der Definition des elektrischen Stroms

$$I = \frac{dQ_d}{dt} = \eta A_q \frac{dl}{dt} = \eta v_d A_q, \quad (3.31)$$

wie sie bereits mit Gl. (1.9) angegeben ist.

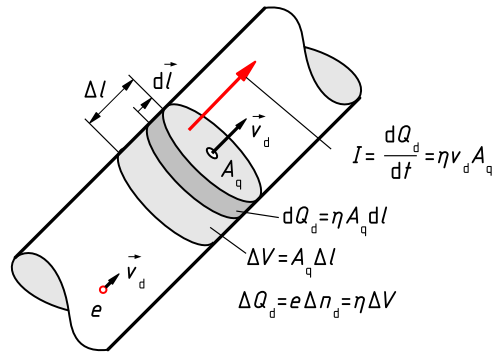


Bild 3.10: Zusammenhang zwischen der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d einer homogenen Driftladungsströmung und dem sie beschreibenden Strom I

Da sich das „Ladungspaket“ $\eta A_q dl$ mit seiner Länge dl in der Zeit dt durch die Fläche A_q schiebt, gibt der Quotient dl/dt die *Driftgeschwindigkeit* v_d dieser Ladung an. Ist wie im vorliegenden Beispiel eines geraden, langen Leiters die Ladungsströmung homogen über den Leiterquerschnitt A_q verteilt, stellt sich in allen Punkten der Querschnittsfläche A_q die gleiche Driftgeschwindigkeit $v_d = \text{const}$ ein, die nach Gl. (3.31) proportional dem Quotienten Strom I zu Querschnitt A_q ist ($I/A_q = \eta v_d$).

Damit lässt sich also die mechanische Größe der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d proportional der elektrischen Größe Strom pro Fläche schreiben, die als *elektrische Stromdichte*¹

$$J = \frac{I}{A_q} = \eta v_d \quad (3.32)$$

bezeichnet wird. Die Driftladungsdichte η der hier als Kontinuum vorgestellten Driftladung entspricht dem Produkt $n \cdot e$ aus *Driftladungsträgerkonzentration* n und Elementarladung e bei der elektronentheoretischen Erklärung der Ladungsströmung (Abschnitt 10.4.3.1, Gl. (10.52)).

Bei inhomogener Ladungsströmung kann man sich, wie in Bild 3.11 skizziert, das Leitungsgebiet in infinitesimal kleine „*Stromröhren*“ des Querschnitts dA_q unterteilt vorstellen, in denen jeweils ein infinitesimal kleiner Strom dI fließt, der dann jeweils wieder als gleichmäßig über den Querschnitt verteilt aufgefasst werden kann. Damit gilt auch Gl. (3.32) sinngemäß, d. h. in differenzieller Schreibweise

$$J = \frac{dI}{dA_q} = \eta v_d, \quad (3.33)$$

¹Statt des Symbols J wird auch das Symbol S für die elektrische Stromdichte verwendet.

die dann – in allgemeingültiger, vektorieller Form geschrieben – der vollständigen *Definition der elektrischen Stromdichte*

$$\vec{J} = \eta \vec{v}_d \tag{3.34}$$

entspricht. In jedem Punkt eines Strömungsfeldes ist die Stromdichte \vec{J} proportional zur in diesem Punkt auftretenden Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d der Driftladung.

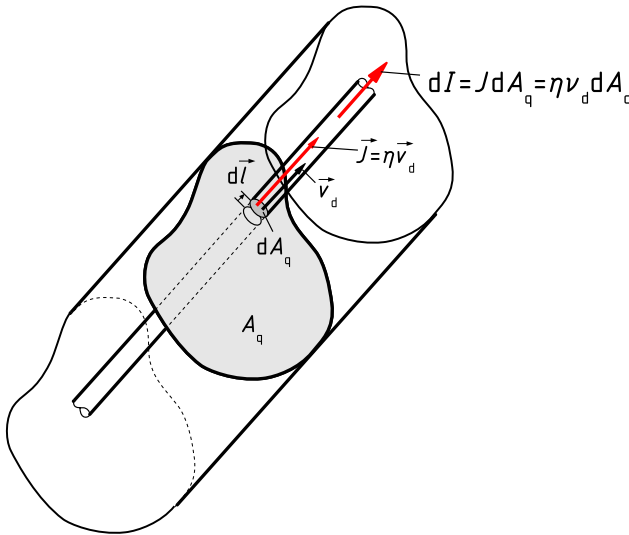


Bild 3.11: Zusammenhang zwischen Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d einer inhomogenen Driftladungsströmung und der diese beschreibenden Stromdichte \vec{J}

Wie in der Strömungsmechanik üblich, lässt sich auch die Strömungsgeschwindigkeit der Driftladung anschaulich durch „*Strömungslinien*“ darstellen, die als *Feldlinien* bezeichnet werden.

Im Fall eines homogenen geraden Leiters mit konstantem Querschnitt verteilt sich die Ladungsströmung gleichmäßig über den Leiterquerschnitt, d. h. an jedem Punkt innerhalb des Leiterolumens tritt die gleiche Driftgeschwindigkeit der Driftladung in Leiterlängsrichtung auf, die durch gleiche Vektoren \vec{v}_d gekennzeichnet werden kann (Bild 3.12). Zeichnet man in ein solches Richtungsfeld *durchgehende Linienzüge, deren Tangentenrichtungen überall mit den Richtungen der Vektoren \vec{v}_d der Driftgeschwindigkeit übereinstimmen*, vermittelt dieses *Feldlinienbild* einen anschaulichen Eindruck von der räumlichen Verteilung der Ladungsströmung (Bild 3.12).

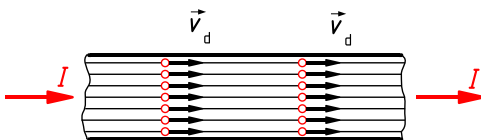


Bild 3.12: Feldlinienbild der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d einer Ladungsströmung in einem geraden Leiter konstanten Querschnitts

Die Zweckmäßigkeit der Feldliniendarstellung wird besonders deutlich, wenn nicht nur lange gerade Leiter konstanten Querschnitts, sondern z. B. solche mit gestuften Querschnitten betrachtet werden. In Bild 3.13 ist eine Leiterschleife der konstanten Dicke d skizziert, deren Breite sich aber an der Stelle x sprunghaft von einem Wert $b_1 = b$ auf den doppelten Wert $b_2 = 2b$ ändert.

Damit sind nach Gl. (3.32) die Stromdichte $J = I/A$ und die Driftgeschwindigkeit $v_d = J/\eta$ in dem breiteren Bereich 3 des Leiters halb so groß wie im schmaleren Bereich 1. Die Bereiche 1 und 3 sollen so weit von der Stelle x entfernt sein, dass in ihnen die Ladungsströmung näherungsweise homogen ist.

Mit der Annahme, dass sich die Ladungsströmung ähnlich wie die Strömung von Flüssigkeiten beim unstetigen Übergang vom kleineren auf den größeren Leiterquerschnitt stetig in den größeren Querschnitt ausbreitet, ergibt sich eine Geschwindigkeitsverteilung, wie sie in Bild 3.13 durch die eingezeichneten Vektoren dargestellt ist.

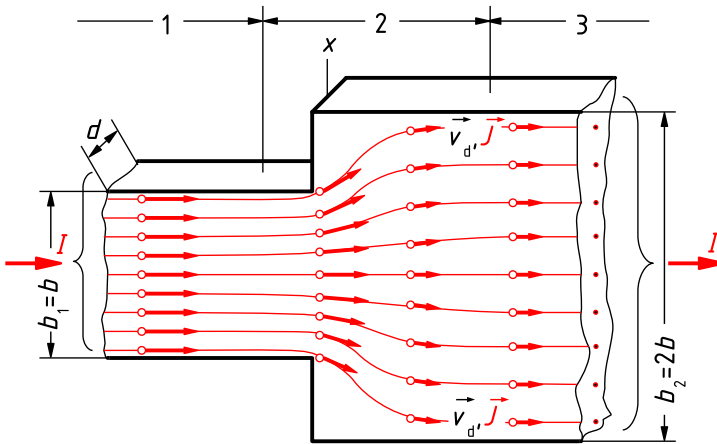


Bild 3.13: Feldlinienbild der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d einer Driftladungsströmung bzw. der Stromdichte \vec{J} in einem Leiter mit unstetiger Querschnittsänderung

Auch in dieses durch Vektoren in Richtung und Intensität (Betrag der Vektoren) grafisch dargestellte Feld der Strömungsgeschwindigkeit lassen sich Feldlinien einzeichnen, deren Tangentenrichtungen überall parallel zu den Vektoren \vec{v}_d der Strömungsgeschwindigkeit liegen (Bild 3.13). Werden alle Feldlinien durchgehend gezeichnet, tritt durch jeden Querschnitt des Leiters die gleiche Anzahl von Feldlinien. Kennzeichnet die in allen Querschnitten A gleiche Anzahl n der Feldlinien den in allen Querschnitten *gleichen Strom* I , entspricht der Betrag der Stromdichte $J = I/A$ dem Kehrwert des Feldlinienabstandes, der aber wiederum der *Feldliniendichte* (n/A) proportional ist.

Felder wie das nach Bild 3.13 werden *durch das ebene Feldlinienbild vollständig beschrieben*, da dieses dem Strömungsfeld in allen Längsschnitten der Leiterschiene entspricht, d. h. die Stromdichte \vec{J} ist in *allen* Punkten der Längsebene des Leiters jeweils über die Dicke d konstant.

Damit sind für die Bereiche 1 und 3 der Leiterschiene in Bild 3.13 mit $A_1 = b_1 d$ bzw. $A_2 = b_2 d$ die Stromdichte $J_1 = I/(b_1 d)$ bzw. $J_2 = I/(b_2 d)$ und die Feldliniendichte $n/(b_1 d)$ bzw. $n/(b_2 d)$. Mit $d = \text{const}$ ist also der *Betrag der Stromdichte* umgekehrt proportional dem ebenen Feldlinienabstand [$(b_1/n)^{-1} \sim J_1$ bzw. $(b_2/n)^{-1} \sim J_2$] und *proportional der Feldliniendichte* ($n/b_1 \sim J_1$ bzw. $n/b_2 \sim J_2$) in der Ebene.

Die *geometrische Deutung* des ebenen Feldlinienbildes ist also besonders einfach, da sie eindimensional breitenbezogen erfolgen kann.

Bei der grafischen Darstellung eines Strömungsfeldes durch Feldlinien ist der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit in allen Punkten tangential zu den Feldlinien gerichtet. Sein Betrag ist proportional zur Dichte der Feldlinien, also umgekehrt proportional zu ihrem Abstand. *Die Anzahl der Feldlinien darf frei gewählt werden.* Solche Feldlinienbilder können daher im Allgemeinen nicht quantitativ ausgewertet werden – es sei denn, ein *Maßstabsfaktor* ist festgelegt.

Feldlinienbilder vermitteln einen anschaulichen Eindruck, wie sich die Strömungsgeschwindigkeit über das Leitungsgebiet verteilt. Insbesondere bei inhomogenen Strömungen werden die Gebiete hoher Strömungsgeschwindigkeit (Stromdichte) sehr anschaulich durch die sich hier zusammendrängenden Feldlinien (Dichte der Feldlinien ist groß) hervorgehoben.

Da die Vektoren der Stromdichte \vec{J} und der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d der Ladung die gleiche Richtung haben und sich nur betragsmäßig um den Faktor η unterscheiden, ergibt sich für \vec{J} das gleiche Feldlinienbild wie für \vec{v}_d . (Dies gilt nicht für Leitungsgebiete mit inhomogener Materialverteilung, in denen die spezifische Leitfähigkeit κ und damit der Faktor η nicht konstant, sondern ortsabhängig ist.)

Beispielsweise gilt das in Bild 3.13 für die vom Strom I durchflossene Leiterschleife skizzierte Feldlinienbild nicht nur für die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_d der Ladung, sondern entsprechend Gl. (3.34) auch für die in diesem Leiter auftretende Stromdichte \vec{J} .

Die Richtung der Vektoren \vec{J} wird durch die Tangenten an die Feldlinien bestimmt und der Betrag J der Vektoren ist umgekehrt proportional dem Abstand zwischen den Feldlinien.

3.2.2 Stromdichte und Strom

In *homogenen* Strömungsfeldern, wie sie z. B. in langen, geraden Leitern mit konstantem Querschnitt A_q auftreten, wird der Zusammenhang zwischen der Stromdichte J und dem Strom I vollständig durch die Gl. (3.32) beschrieben. Unbedingt zu beachten ist allerdings, dass in der Gleichung für den Strom

$$I = J A_q \quad (3.35)$$

die Fläche A_q der Leiterquerschnitt ist, der *rechtwinklig* zur Richtung der gleichmäßig über den Querschnitt verteilten Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d bzw. der Stromdichte \vec{J} liegt (Bild 3.14).

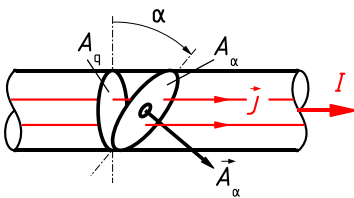


Bild 3.14: Strom I und Stromdichte \vec{J} in einem geraden Leiter

Betrachtet man aber eine Fläche A_α , die, wie in Bild 3.14 skizziert, um den Winkel $0 < \alpha < \pi/2$ gegenüber der Querschnittsfläche A_q geneigt ist, so ist diese Fläche $A_\alpha = A_q / \cos \alpha$ abhängig vom Neigungswinkel α größer als die Querschnittsfläche A_q . Der Strom I und die Stromdichte \vec{J} sind aber im ganzen Leiter, also auch in der geneigten Fläche A_α die gleichen wie in der Querschnittsfläche A_q . Man erkennt aus Bild 3.14, dass für den Zusammenhang zwischen dem

Strom I und dem Betrag der Stromdichte J in einer Fläche A_α beliebiger Neigung zum Querschnitt sinngemäß die Gl. (3.35) gilt, wenn nicht die Fläche A_α selbst, sondern deren Projektion in eine Ebene senkrecht zur Leiterlängsachse, d. h. zur Richtung der Stromdichte \vec{J} , eingesetzt wird, die also der Querschnittsfläche entspricht [$I = J(A_\alpha \cos \alpha) = J A_q$].

Die Erläuterungen zu Bild 3.14 können allgemeingültig auf homogene Strömungsfelder der Stromdichte \vec{J} in einer beliebigen um den Winkel $(\pi/2) - \alpha$ gegenüber der Stromdichte \vec{J} geneigten ebenen Fläche A übertragen werden.

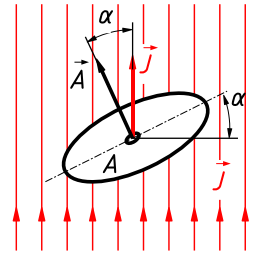


Bild 3.15: Beschreibung der Lage einer ebenen Fläche A im homogenen elektrischen Strömungsfeld durch ihren Flächenvektor \vec{A}

Für den durch diese Fläche A fließenden Strom I gilt (Bild 3.15)

$$I = J A \cos \alpha . \quad (3.36)$$

Für die formale Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Strom I und Stromdichte J gelten folgende Festlegungen (Bild 3.16):

- Die räumliche Lage einer ebenen Fläche A wird durch einen Vektor \vec{A} beschrieben, der senkrecht auf dieser Fläche steht und willkürlich gewählt in eine der beiden möglichen Richtungen weist.
- Die Größe der ebenen Fläche A ist gleich dem Betrag des Vektors \vec{A} .
- Der *Zählpfeil* für den Strom I wird *in Richtung des Flächenvektors* \vec{A} durch die Fläche A weisend angetragen. Dieser Stromzählpfeil beschreibt entsprechend Abschnitt 1.4.1 im Zusammenhang mit dem Vorzeichen des nach Gl. (3.36) bzw. (3.37) berechneten Zahlenwertes für den Strom I die Stromrichtung durch die Fläche A .

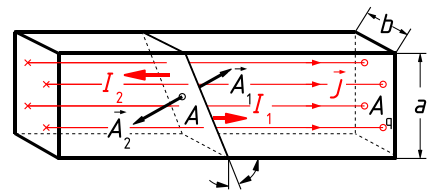


Bild 3.16: Zur Definition der Richtung des Zählpfeils des elektrischen Stroms

Mit diesen Vereinbarungen kann Gl. (3.36) als Vektorgleichung

$$I = \vec{J} \cdot \vec{A} \quad (3.37)$$

geschrieben werden. Die rechte Seite stellt das Skalarprodukt aus Stromdichte \vec{J} und Flächenvektor \vec{A} dar, das nach den Regeln der Vektorrechnung $J A \cos \alpha$ ergibt [BDHG06]. Da die durch die Stromdichte \vec{J} gegebene Richtung der Ladungsströmung im Skalarprodukt $\vec{J} \cdot \vec{A}$ nicht mehr zum Ausdruck kommt, muss sie mit der Vereinbarung nach c) durch einen Zählpfeil für I beschrieben werden.

Beispiel 3.3: Berechnung des Stroms in einem homogenen Strömungsfeld

In dem in Bild 3.16 skizzierten Leiter mit dem rechteckigen Querschnitt $A_q = ab = 2 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm}$ tritt ein homogenes elektrisches Strömungsfeld in Leiterlängsrichtung auf mit der gegebenen Stromdichte $J = 5 \text{ A/mm}^2$. Der Strom I durch die um $(\pi/2) - \alpha$ gegenüber der Leiterlängsachse geneigte Schnittfläche $A = a'b' = 2,15 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 3,22 \text{ cm}^2$ ist zu berechnen.

Mit der gegebenen Länge $a' = 2,15 \text{ cm}$ der Schnittfläche $A = a'b'$ ergibt sich der Kosinus ihres Neigungswinkels α zur Querschnittsfläche $A_q = ab$ zu $\cos \alpha = a/a' = 2 \text{ cm}/(2,15 \text{ cm}) = 0,93$ und damit der Winkel $\alpha = 21,5^\circ$.

Lösung 1: Der Flächenvektor \vec{A}_1 wird rechtwinklig zu der gegebenen Schnittfläche A im Bild 3.16 nach rechts weisend angetragen. Dieser Flächenvektor \vec{A}_1 schließt mit der Stromdichte \vec{J} des Strömungsfeldes den Winkel $\alpha = 21,5^\circ$ ein. Für den Strom I_1 durch die Fläche A ist der Zählpfeil in Richtung des Flächenvektors \vec{A}_1 , also in Bild 3.16 von links nach rechts durch die Fläche weisend einzutragen. Der Zahlenwert dieses Stroms

$$I_1 = \vec{J} \cdot \vec{A}_1 = J A \cos \alpha = (5 \text{ A/mm}^2) 3,22 \text{ cm}^2 \cdot 0,93 = 150 \text{ kA}$$

ist nach Gl. (3.37) positiv, d. h. positive Ladung fließt in Richtung des Zählpfeils I_1 , was auch der Richtung der Stromdichte \vec{J} entspricht.

Lösung 2: Der Flächenvektor \vec{A}_2 wird rechtwinklig zur Fläche A in Bild 3.16 nach links weisend angetragen. Damit schließen die Vektoren \vec{A}_2 und \vec{J} den Winkel $\pi - \alpha = 158,5^\circ$ ein und entsprechend bekommt man nach Gl. (3.37) für den Strom einen negativen Zahlenwert

$$I_2 = \vec{J} \cdot \vec{A}_2 = J A \cos(\pi - \alpha) = (5 \text{ A/mm}^2) 3,22 \text{ cm}^2 (-0,93) = -150 \text{ kA}.$$

Für diesen Strom I_2 ist der Zählpfeil in Richtung des Flächenvektors \vec{A}_2 , also in Bild 3.16 von rechts nach links durch die Fläche A weisend anzutragen. Da bei negativem Zahlenwert für den Strom die positive Ladungsströmung entgegen der Zählpfeilrichtung erfolgt, führt Lösung 2 wie Lösung 1 auf eine von links nach rechts strömende positive Ladung, was der gegebenen Stromdichte \vec{J} entspricht.

In einem *inhomogenen* Strömungsfeld, wie es z. B. im Bereich 2 der Leiterschiene nach Bild 3.13 auftritt, sind im Allgemeinen weder der Betrag noch die Richtung der Stromdichte \vec{J} über eine betrachtete Fläche A konstant. Ist eine Fläche nicht eben, kann sie nicht durch einen einzigen Flächenvektor gekennzeichnet werden. Um auch in solchen Fällen den Zusammenhang zwischen Strom I und Stromdichte \vec{J} beschreiben zu können, wird die gegebene Fläche A in *infinitesimal kleine Flächenelemente* dA unterteilt, für die dann angenommen werden kann, dass

1. ein solches Flächenelement dA auch bei gekrümmten Flächen näherungsweise eben und somit durch einen Flächenvektor $d\vec{A}$ eindeutig beschrieben ist und
2. die Stromdichte \vec{J} über dieses Flächenelement dA nach Betrag und Richtung konstant ist.

Damit lässt sich entsprechend Gl. (3.37) der durch ein infinitesimal kleines Flächenelement dA fließende infinitesimale Teilstrom

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

berechnen. Der gesamte Strom durch eine Fläche A ist die Summe aller Teilströme dI , die als Integral

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (3.38)$$

geschrieben wird. Die *Zählpfeile* von dI und I haben die gleiche Richtung wie die $d\vec{A}$.

Zur näheren Erläuterung der Gl. (3.38) wird die in dem inhomogenen Strömungsfeld des Bereichs 2 der Leiterschleife nach Bild 3.13 liegende Querschnittsfläche A_2 betrachtet (Bild 3.17). Man stellt sich das Strömungsfeld in einzelne „*Strömungsröhren*“ mit infinitesimal kleinen Querschnittsflächen dA_q unterteilt vor, deren Mittellinien parallel zu den Feldlinien der Stromdichte verlaufen. Diese Strömungsröhren durchdringen die betrachtete Fläche A_2 jeweils unter einem bestimmten Winkel α zu den Flächennormalen $d\vec{A}_2$ und begrenzen dabei die Flächenelemente dA_2 . Mit der Stromdichte \vec{J} in Richtung der Längsachse der Strömungsröhre, dem Flächenvektor $d\vec{A}_2$ in Richtung der Flächennormalen und dem Durchdringungswinkel α ergibt sich der Strom $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}_2$ in der Strömungsröhre. Die Summation (Integration) der Ströme aller Strömungsröhren durch die Fläche A_2 ergibt den Strom $I = \int_{A_2} \vec{J} \cdot d\vec{A}_2 = \int_{A_2} J dA_2 \cos \alpha$ durch die Fläche A_2 .

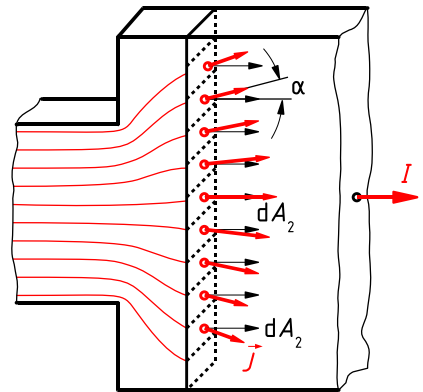


Bild 3.17: Stromdichte \vec{J} und Flächenvektoren $d\vec{A}_2$ in einer Fläche A_2 im inhomogenen elektrischen Strömungsfeld

Die Berechnung des Stroms I durch eine bekannte Fläche A ist bei bekannter Stromdichte \vec{J} mit Gl. (3.38) ohne Schwierigkeiten möglich. Dagegen kann die Berechnung der Stromdichte \vec{J} aus einem gegebenen Strom I zu erheblichen Schwierigkeiten führen, da die Stromdichte \vec{J} nur implizit in Gl. (3.38) enthalten ist. Eine Berechnung der Stromdichte \vec{J} als Ortsfunktion für inhomogene Strömungsfelder kann mit dem hier vorausgesetzten mathematischen Grundlagenwissen nur durchgeführt werden, wenn sich durch *Symmetrieüberlegungen* das Problem vereinfachen lässt, wie in Beispiel 3.4 gezeigt ist. In komplizierten Anordnungen ist nur eine näherungsweise Berechnung des Strömungsfeldes mit *numerischen Verfahren* auf leistungsfähigen Rechnern möglich.

Beispiel 3.4: Strömungsfeld in einer Trockenzelle

In einer Trockenzelle (Abschnitt 10.3.3.1) entsprechend Bild 3.18a mit *konzentrischen zylindrischen Elektroden* A (Anode) und K (Kathode) soll die Stromdichte \vec{J} im Elektrolyten Y für den Belastungsstrom $I = 1\text{ A}$ mit Zählpfeil gemäß Bild 3.18a berechnet werden. Der Elektrolyt sei zwischen Anode und Kathode *homogen* mit dem konstanten spezifischen Widerstand ρ .

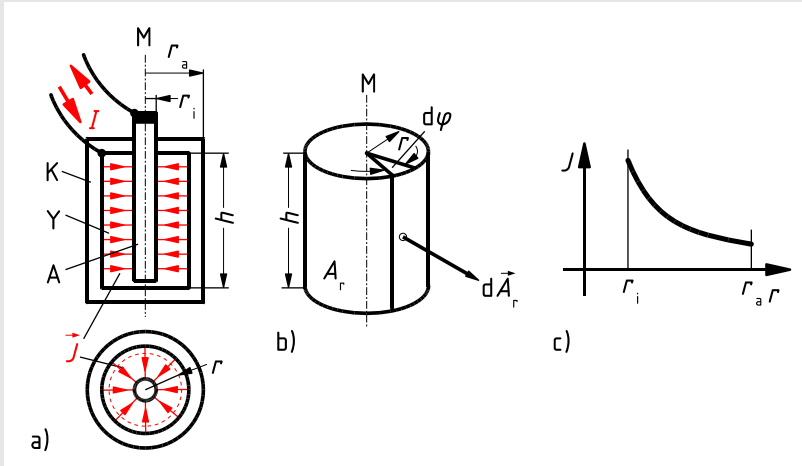


Bild 3.18: Elektrisches Strömungsfeld in einer Trockenzelle

- Feldlinienbild der Stromdichte \vec{J} in Längs- und Querschnitt
- konzentrischer Zylindermantel als Integrationsfläche
- Betrag der Stromdichte J in Abhängigkeit vom Radius r

In der Anordnung wird sich ein *zylindersymmetrisches* elektrisches Strömungsfeld ausbilden, wie es in Bild 3.18a skizziert ist (Randverzerrungen des Feldes werden außer Acht gelassen). Die Stromdichte \vec{J} hat in jedem Punkt nur eine radiale Komponente J_r . Ihr Betrag ist in allen Punkten mit dem gleichen Abstand r von der Mittellinie M konstant. Aus diesen *Symmetrieüberlegungen* folgt der Ansatz für die elektrische Stromdichte

$$\vec{J} = J_r(r) \cdot \vec{e}_r.$$

Nun wird der aus der Kontinuitätsgleichung (3.14) für stationäre elektrische Strömungsfelder folgende *Knotensatz für differenzielle Feldgrößen*

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

angesetzt.

Zur Berechnung der Stromdichte wählt man eine konzentrisch *zwischen den Elektroden* liegende geschlossene Zylinderoberfläche als Integrationsfläche A . Sie besteht aus der Zylindermantelfläche A_r mit dem Radius r (Bild 3.18b) sowie der oberen und der unteren Stirnfläche.

Durch die untere Stirnfläche fließt kein Strom. Durch die obere Stirnfläche fließt der Gesamtstrom I über den Pluspol der Batterie aus der Integrationshülle hinaus. Da die Stromdichte \vec{J} über die Höhe h der Zylindermantelfläche A_r den gleichen Betrag und die gleiche Richtung hat, kann A_r in infinitesimal kleine ebene Streifen dA_r der Höhe h und der tangentialen Breite $r d\varphi$ zerlegt werden. Die Normalenvektoren $d\vec{A}_r$ dieser Flächenelemente $dA_r = h r d\varphi$ werden auf der Mantelfläche *nach außen weisend* angetragen, es gilt also $d\vec{A}_r = dA_r \cdot \vec{e}_r$. Der Zählpfeil des Stroms I weist ebenfalls aus der Integrationshülle *heraus*. Der Strom I geht daher ebenfalls mit positivem Vorzeichen in die Knotengleichung ein.

Daraus folgt

$$\int_{A_r} \vec{J} \cdot d\vec{A}_r + I = 0$$

$$-I = \int_{A_r} \vec{J} \cdot d\vec{A}_r = \int_0^{2\pi} J_r \cdot \vec{e}_r (h r d\varphi) \cdot \vec{e}_r = \int_0^{2\pi} J_r h r d\varphi = J_r h r \int_0^{2\pi} d\varphi$$

und durch Integration über den Umfang des Zylindermantels

$$-I = J_r h r \int_0^{2\pi} d\varphi = J_r h r \cdot 2\pi$$

sowie schließlich durch Auflösen nach der gesuchten radialen Komponente der Stromdichte

$$J_r = -\frac{I}{2\pi h r} \sim \frac{1}{r}.$$

Die Rechnung ergibt also einen negativen Wert der radialen Komponente der Stromdichte und bestätigt damit den in Bild 3.18a dargestellten Feldverlauf. In Bild 3.18c ist der Betrag der Stromdichte $|\vec{J}| = |J_r(r)| \geq 0$ als Funktion von r dargestellt.

Für eine Zelle mit $h = 55 \text{ mm}$ ergibt die quantitative Auswertung $J = 1 \text{ A}/(2\pi \cdot 55 \text{ mm} \cdot r) = (2,9 \text{ mA/mm})/r$. Da der Betrag der Stromdichte J umgekehrt proportional dem Radius r ist, strebt er für $r \rightarrow 0$ gegen Unendlich. Die innere Elektrode muss also einen Mindestdurchmesser $2r_{\min}$ haben, damit bei einem maximal zugelassenen Belastungsstrom I_{\max} eine maximal zulässige Stromdichte J_{zul} im Elektrolyten nicht überschritten wird [$2r_i > 2r_{\min} = I/(\pi h J_{\text{zul}})$].

3.2.3 Elektrische Feldstärke und elektrische Spannung

Zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen der die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d beschreibenden elektrischen Stromdichte \vec{J} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} in passiven, elektrisch isotropen Gebieten wird das homogene elektrische Strömungsfeld in einem geraden Leiter der Länge l , des konstanten Querschnitts A_q und des konstanten spezifischen Widerstandes ϱ entsprechend Bild 3.19 betrachtet.

Durch Kontaktierungen K mittels als widerstandslos angenommener *Elektroden* soll sich der Strom $I > 0$ unmittelbar hinter den Stirnflächen des Leiters gleichmäßig über den Leiterquer-

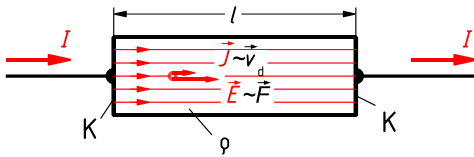


Bild 3.19: Feldlinienbild für Stromdichte \vec{J} und elektrische Feldstärke \vec{E} in einem geraden Leiter konstanten Querschnitts mit idealen Elektroden an den Stirnseiten

schnitt A_q verteilen, sodass über die ganze Länge l die konstante Stromdichte $J = I/A_q$ parallel zur Leitermittellinie in Richtung des Stroms I auftritt.

Dieser Strom I erfordert nach dem Ohmschen Gesetz die Spannung $U = IR$ über die Leiterlänge. Setzt man den Widerstand des Leiters $R = \rho l/A_q$ entsprechend Gl. (2.11) in die Gleichung für die Klemmenspannung U ein ($U = I \rho l/A_q$), enthält diese nach Umformung

$$\frac{U}{l} = \frac{\rho I}{A_q} = \rho J \quad (3.39)$$

die Feldgröße Stromdichte $J = I/A_q$ und eine *längenbezogene Spannung* U/l , die nach den Erläuterungen in Abschnitt 3.1.2.2 als *Kraft pro Ladung*, also als *elektrische Feldstärke* $E = F/Q = U/l$, gedeutet werden kann.

Die hier für das homogene Strömungsfeld mögliche skalare Betrachtung der Feldgrößen darf nicht davon ablenken, dass die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \vec{F}/Q$ naturgemäß ein Vektor ist, der in passiven, isotropen Gebieten die gleiche Richtung wie die Stromdichte \vec{J} hat. Ersetzt man in Gl. (3.39) den Quotienten U/l durch die Feldgröße E und schreibt diese ebenso wie die Feldgröße Stromdichte \vec{J} als Vektor \vec{E} , bekommt man die Vektorgleichung

$$\vec{E} = \rho \vec{J}, \quad (3.40)$$

die den Zusammenhang zwischen den beiden Feldgrößen \vec{E} und \vec{J} allgemeingültig für passive Gebiete beschreibt, in denen der spezifische Widerstand *richtungsunabhängig (isotrop)* ist, was hier immer vorausgesetzt wird.

Man erkennt aus Gl. (3.40), dass ein für die Stromdichte \vec{J} gewonnenes Feldlinienbild auch als ein solches für die elektrische Feldstärke \vec{E} gedeutet werden kann, sofern der spezifische Widerstand ρ des Strömungsgebiets homogen ist.

Bei *homogenen Strömungsfeldern* wie im Leiter nach Bild 3.19 verteilen sich der Strom I gleichmäßig über den Querschnitt A_q und die Spannung U gleichmäßig über die Länge l . Damit ist in einfacher Weise sowohl der Zusammenhang zwischen Strom und Stromdichte ($I = J A_q$) entsprechend Gl. (3.35) als auch der der zwischen Spannung und elektrischer Feldstärke beschrieben:

$$U = E l \quad (3.41)$$

In *inhomogenen Strömungsfeldern* wie z. B. dem in Bild 3.13 ist die Stromdichte \vec{J} und damit auch die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \rho \vec{J}$ weder nach Betrag noch nach Richtung über die Länge des Leiters konstant. Eine mittlere Feldstärke mit dem Betrag $E_{\text{mitt}} = U/l$ hat wenig Bedeutung, zumal es fraglich ist, welcher Längenwert einzusetzen wäre. In inhomogenen Feldern muss die elektrische Feldstärke \vec{E} daher als *Ortsfunktion* betrachtet werden. Dieses wird anschaulich anhand eines inhomogenen Strömungsfeldes entsprechend Bild 3.13 erläutert.

Bei homogenem spezifischem Widerstand ϱ des Leiters ist mit dem Feldlinienbild für die Stromdichte \vec{J} auch das für die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \varrho \vec{J}$ gegeben (Bild 3.20). Man stellt sich nun eine Linie *entlang einer Feldlinie* der elektrischen Feldstärke \vec{E} in diesem Feld in infinitesimal kleine Strecken $d\vec{l}$ unterteilt vor, über die die Feldstärke \vec{E} jeweils als konstant angenommen werden kann (Bild 3.20, zweite Feldlinie von oben).

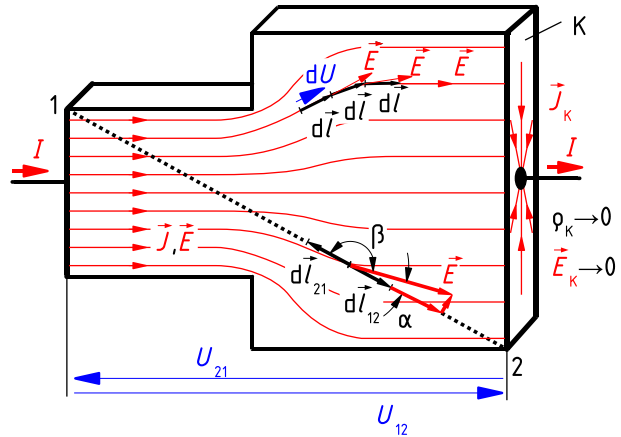


Bild 3.20: Zur Berechnung der Spannung U als Wegintegral der elektrischen Feldstärke \vec{E}

Über jede dieser Teilstrecken dl kann dann eine Teilspannung $dU = E dl$ entsprechend Gl. (3.41) als Produkt aus elektrischer Feldstärke E und Weg dl berechnet werden, da jeweils entlang der Strecke dl die elektrische Feldstärke E mit konstantem Betrag *parallel* zu dl auftritt. Summiert, d. h. integriert man die Teilspannungen dU über alle Teilstrecken dl entlang einer Feldlinie, stellt das Integral die über diese Feldlinie wirkende Spannung

$$U = \int_l dU = \int_l E dl \quad (3.42)$$

dar. Zur Erläuterung allgemeinerer Gesetzmäßigkeiten für die Spannung im elektrischen Strömungsfeld wird angenommen, dass die stirnseitigen Kontaktierungen K der Leiterschleife in Bild 3.20 *ideale Elektroden* sind, also einen gegen null gehenden spezifischen Widerstand haben ($\varrho_K \rightarrow 0$). Dann kann sich in diesen Kontaktierungen K der Strom I ausbreiten, ohne einen Spannungsabfall zu bewirken. (Die Stromdichte J_K erfordert in den Kontaktierungen keine elektrische Feldstärke $E_K = \varrho J_K \rightarrow 0$, da $\varrho \rightarrow 0$.) In der Grenzfläche zwischen Kontaktierung K und Leiter L können keine Spannungen (Potentialunterschiede) auftreten. Mit $E_K = 0$ gilt zwischen beliebigen Punkten der Grenzfläche auch $U = \int E_K dl = 0$.

Für solche Flächen, die *Äquipotenzialflächen* (ÄPF) genannt werden, gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

- Die \vec{E} -Feldlinien verlaufen immer rechtwinklig zu den Äquipotenzialflächen, da in diesen $E = 0$ gilt, also keine Komponente von \vec{E} auftreten kann.
- Entlang allen Feldlinien zwischen zwei Äquipotenzialflächen ergibt das Wegintegral der elektrischen Feldstärke nach Gl. (3.42) den gleichen Spannungswert, nämlich die Differenz der Potentiale der beiden Äquipotenzialflächen.

c) Zwischen zwei Äquipotenzialflächen liefert das Integral

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \varrho \vec{J} \cdot d\vec{l} \quad (3.43)$$

des Skalarproduktes aus elektrischer Feldstärke $\vec{E} = \varrho \vec{J}$ und Wegvektor $d\vec{l}$ über beliebige Wege immer den gleichen Spannungswert U .

Die unter c) genannte Regel wird im Folgenden anhand des Bildes 3.20 erläutert.

In den als Äquipotenzialflächen aufzufassenden Grenzflächen zur Kontaktierung treten keine Spannungen bzw. Potenzialunterschiede auf. Wie zwischen Anfangs- und Endpunkt jeder \vec{E} -Feldlinie muss auch zwischen einem beliebigen Punkt der einen und einem beliebigen Punkt der anderen Grenzfläche die gleiche Spannung U auftreten.

Der in Bild 3.20 gestrichelt eingetragene Weg zwischen den Punkten 1 und 2 wird betrachtet und, wie für die Feldlinien erläutert, in infinitesimal kleine Weegelemente dl zerlegt. Die über diesen Streckenelementen $d\vec{l}_{12}$ auftretenden Spannungen $dU_{12} = d_{12} E \cos \alpha$ ergeben sich als Produkt aus dem jeweiligen Weegelement $d\vec{l}_{12}$ und der Komponente von \vec{E} in Richtung dieses Weegelements ($E \cos \alpha$). Da dieses Produkt $d_{12} E \cos \alpha$ auch als Skalarprodukt $\vec{E} \cdot d\vec{l}_{12}$ geschrieben werden kann, führt die Summation, d. h. die Integration, der Teilspannungen dU_{12} über alle Teilstrecken $d\vec{l}_{12}$ der Linie zwischen 1 und 2 auf den Ausdruck $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12}$, der Gl. (3.43) entspricht.

Bisher wurden nur von 1 nach 2 verlaufende Integrationswege in Bild 3.20 erläutert. Da auch die elektrische Feldstärke \vec{E} von 1 nach 2 gerichtet ist, ergibt das Integral des Skalarproduktes $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12}$ mit $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ nur positive Werte, also eine positive Spannung U_{12} . Im Zusammenhang mit dem eingezeichneten Zählpfeil für die Spannung U_{12} bestätigt das Ergebnis die Polarität des in Bild 3.20 dargestellten Strömungsfeldes. (Die stets positiv angenommenen Ladungsträger bewegen sich in passiven Gebieten stets vom höheren zum niedrigeren Potenzial.)

Wählt man die Integrationsrichtung aber entlang der gestrichelten Linie in Bild 3.20 von 2 nach 1, ist der Wegvektor $d\vec{l}_{21}$ auch in dieser Richtung von 2 nach 1 anzutragen. Damit wird dann das Skalarprodukt $\vec{J} \cdot d\vec{l}_{21} = J dl \cos \beta$ negativ, da $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$, sodass auch das Integral, also die Spannung nach Gl. (3.43), mit negativem Zahlenwert berechnet wird. Trägt man aber den Zählpfeil für diese Spannung U_{21} auch in der Integrationsrichtung, also von 2 nach 1 weisend an (Bild 3.20), gibt dieser mit dem negativen Zahlenwert für U_{21} auch wieder die richtige Polarität des Strömungsgebiets an. Aus diesen Betrachtungen folgt:

Der Zählpfeil für die nach Gl. (3.43) berechnete Spannung U ist immer in der Integrationsrichtung $d\vec{l}$ anzutragen.

Die vorstehende anschauliche Erläuterung des Zusammenhangs zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der Spannung U darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass eine quantitative Auswertung der Gl. (3.43) bei inhomogenen Feldern schwierig sein kann. Ist die elektrische Feldstärke \vec{E} als Ortsfunktion gegeben, kann zwar grundsätzlich immer die Spannung U berechnet werden, nicht aber umgekehrt aus der gegebenen Spannung die elektrische Feldstärke.

Mit elementaren Mathematikkenntnissen lassen sich im Allgemeinen nur Felder berechnen, die gewisse Symmetrien aufweisen, was allerdings bei praktischen Gegebenheiten häufig der Fall ist. Komplizierte elektrische Feldanordnungen werden mittels numerischer Methoden berechnet.

Beispiel 3.5: Strömungsfeld in einer Kreisringscheibe

Eine Kreisringscheibe entsprechend Bild 3.21 mit dem spezifischen Widerstand ϱ , dem Innen- bzw. Außenradius r_1 bzw. r_2 und der Höhe h wird vom Innen- zum Außenumfang vom Strom $I > 0$ durchflossen. Innen- und Außenumfang sind so kontaktiert, dass sie Äquipotenzialflächen darstellen.

Die Spannung, die erforderlich ist, damit der Strom I in der Scheibe fließt, und der Widerstand der Scheibe sind zu berechnen.

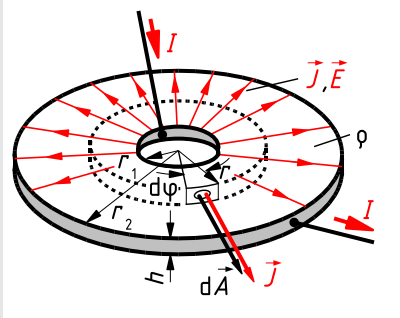


Bild 3.21: Elektrisches Strömungsfeld in einer leitenden Scheibe

Der Strom I verteilt sich so in der Scheibe, dass die Stromdichte \vec{J} senkrecht auf Innen- und Außenumfangsflächen steht (Äquipotenzialflächen). Damit folgt aus Symmetrieüberlegungen, dass die Feldlinien von \vec{J} und damit auch der elektrischen Feldstärke $\vec{E} = \varrho \vec{J}$ radial nach außen gerichtet sind (Bild 3.21). In axialer Richtung ist über die Höhe h bei konstanten Radien r die Stromdichte \vec{J} konstant. Damit gilt für eine konzentrisch in der Scheibe angenommene Zylindermantelfläche A_r mit dem Radius r (in Bild 3.21 gestrichelt eingezeichnet) entsprechend Gl. (3.38)

$$I = \int_{A_r} \vec{J}_r \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} J_r h r d\varphi = J_r h r \int_0^{2\pi} d\varphi = J_r h \cdot 2\pi r.$$

Diese Gleichung lässt sich nach der radialen Komponente der gesuchten Stromdichte

$$J_r = \frac{I}{h \cdot 2\pi r} \quad (3.44)$$

auffösen. Damit ergibt sich nach Gl. (3.40) die radiale Komponente der elektrischen Feldstärke

$$E_r = \varrho J_r = I \frac{\varrho}{h \cdot 2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \quad (3.45)$$

Wird diese radial gerichtete elektrische Feldstärke \vec{E} entsprechend Gl. (3.42) entlang einer Feldlinie ($d\vec{l} = d\vec{r}$, $\vec{E} \parallel d\vec{r}$) von r_1 nach r_2 integriert, erhält man die Spannung

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = I \frac{\varrho}{h \cdot 2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = I \frac{\varrho}{h \cdot 2\pi} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = I \frac{\varrho}{h \cdot 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.46)$$

Der Widerstand

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{h \cdot 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.47)$$

der Scheibe zwischen Innen- und Außenumfang folgt aus seiner Definitionsgleichung (2.5) mit der in Gl. (3.46) berechneten Spannung.

3.2.4 Elektrisches Potenzial

Das Feldlinienbild für die Stromdichte \vec{J} oder auch für die elektrische Feldstärke \vec{E} vermittelt einen anschaulichen Eindruck von der Strömungsverteilung. Man erkennt z. B. Gebiete hoher Stromdichten und damit Verlustdichten ρJ^2 (Abschnitt 3.2.5) sowie die dadurch verursachten thermischen Beanspruchungen. Dagegen kann man die Spannungsverteilung (Potenzialverteilung) im Strömungsfeld nur indirekt erkennen. Es kann daher zweckmäßig sein, Linien bzw. Flächen zu zeichnen, die jeweils den geometrischen Ort aller Punkte darstellen, die die gleiche Spannung gegenüber einem gemeinsamen Bezugspunkt, also gleiches elektrisches Potenzial haben. Solche Linien bzw. Flächen mit $\varphi = \text{const}$ sind z. B. die im Anschluss an Gl. (3.42) für das Strömungsfeld nach Bild 3.20 erläuterten *Äquipotenzialflächen* in den Kontaktierungen.

Für die grafische Darstellung der Spannungsverteilung im Strömungsfeld werden außer den als Grenzflächen jeweils zwischen idealen Elektroden und Leiter existierenden Äquipotenzialflächen weitere Äquipotenzialflächen in das Feldbild eingezeichnet (Bild 3.22). Die Konstruktionsanweisung hierfür folgt direkt aus der Definition der Äquipotenzialfläche. Da in ihr keine Spannung auftreten darf, muss für alle Wegelemente Δl innerhalb der Äquipotenzialfläche die Bedingung

$$\Delta U = \int_{\Delta l} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.48)$$

erfüllt sein. Dies ist mit $E \neq 0$ und $\Delta l \neq 0$ nur gegeben, wenn der elektrische Feldstärkevektor \vec{E} überall senkrecht auf der Äquipotenzialfläche und damit auf jedem in ihr liegenden Wegvektor $d\vec{l}$ steht, da dann $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos(\pi/2) = 0$ ist.

Äquipotenzialflächen verlaufen immer so, dass sie rechtwinklig von den Feldlinien der elektrischen Feldstärke durchdrungen werden.

Da die elektrische Spannung per Definition zwischen *zwei* Punkten auftritt, können immer je zwei Äquipotenzialflächen durch eine zwischen ihnen auftretende Spannung gekennzeichnet werden (Bild 3.22). Für die Feldbeschreibung ist es aber zweckmäßiger, bereits einer einzelnen Äquipotenzialfläche einen Spannungswert zuzuordnen, was nur möglich ist, wenn dieser gegenüber einem für das betreffende Feld festgelegten *einheitlichen Bezugspunkt* gemessen wird.

Eine solche dem einzelnen Feldpunkt zugeordnete Größe mit der Dimension der Spannung wird als *elektrisches Potenzial* mit dem Symbol φ bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.2.4). Der Zusammenhang zwischen Spannung und Potenzial in einem Potenzialfeld lässt sich anhand von Bild 3.22 wie folgt erklären:

Die Driftladung Q_d bewegt sich in einem passiven Leiter infolge der auftretenden elektrischen Feldstärke \vec{E} , d. h. die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d und damit die Stromdichte $\vec{J} = \eta \vec{v}_d$ sind gleich orientiert wie die Feldstärke ($\vec{J} \uparrow \vec{E}$).

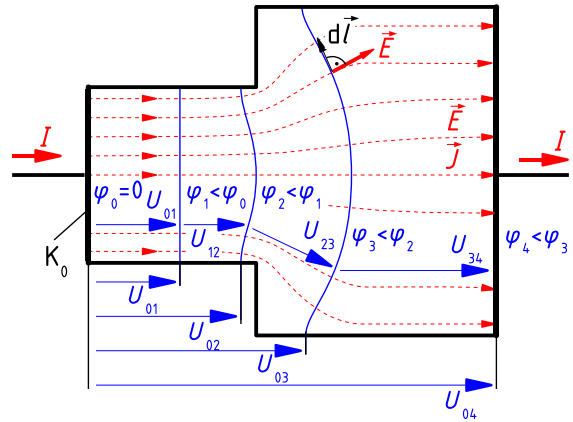


Bild 3.22: Feldlinien der elektrischen Feldstärke \vec{E} und Äquipotenziallinien $\varphi = \text{const}$ mit eingezeichneten Spannungen U

Die Energie der von der Stromdichte \vec{J} im Leiter verursachten Erwärmung wird der Driftladung im elektrischen Feld entzogen, d. h. die *potenzielle Feldenergie* der Driftladung wird entlang ihres Bewegungsweges durch das Feld kleiner (in Wärmeenergie umgeformt). Da das Potenzial φ wie die Spannung U als Energie pro Ladung definiert ist (Abschnitte 3.3.2 und 3.3.6.1), muss auch das Potenzial entlang des wie \vec{E} orientierten Weges kleiner werden. In Bild 3.22 gilt also $\varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 \dots$

Die in gleicher Orientierung wie \vec{E} berechnete Spannung $U_{01} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, $U_{02} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, ... ist positiv, der zugehörige Spannungszählpfeil weist vom Bezugspunkt K_0 zur Äquipotenzialfläche mit dem Potenzial $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Diesem positiven Spannungswert entspricht ein positiver Wert der Potentialdifferenz $(\varphi_0 - \varphi_1), (\varphi_0 - \varphi_2), \dots$, wenn in dieser vom Bezugspotenzial φ_0 der jeweils kleinere Wert des Potentials φ_1, φ_2 subtrahiert wird.

In Bild 3.22 gilt also $U_{01} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_0 - \varphi_1$, $U_{02} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_0 - \varphi_2$, ... und damit für die Spannung zwischen beliebigen Äquipotenzialflächen $U_{12} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$, $U_{23} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_2 - \varphi_3$, ...

Diese Erläuterungen gelten für *beliebige Potenzialfelder* und lassen sich daher in allgemeingültiger Form schreiben:

$$\varphi_p = \varphi_0 - \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_0 - U_{0p} = \varphi_0 + \int_p^{p_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_0 + U_{p0} \quad (3.49)$$

Das elektrische Potenzial eines beliebigen Feldpunktes p ergibt sich aus dem Bezugspotenzial φ_0 eines ebenfalls beliebig wählbaren Bezugspunktes p_0 *minus* der Spannung U_{0p} zwischen Bezugspunkt p_0 und Feldpunkt p , die als Wegintegral der elektrischen Feldstärke \vec{E} vom Bezugspunkt p_0 zum Feldpunkt zu berechnen ist. Alternativ kann das Potenzial des Feldpunktes aus dem Bezugspotenzial *plus* dem Wegintegral vom Feldpunkt zum Bezugspunkt berechnet werden.

Das Potenzial steigt entgegen der Richtung der elektrischen Feldstärke an, der Vektor der elektrischen Feldstärke ist also vom höheren zum niedrigeren Potenzial gerichtet.

Damit weist der – in Integrationsrichtung $d\vec{l}$ anzutragende – Zählpfeil der elektrischen Spannung U bei positiven Zahlenwerten vom höheren zum niederen Potenzial (Bild 3.22).

Um einen quantitativen Eindruck von der Spannungsverteilung in einem Strömungsfeld zu vermitteln, werden die Äquipotenzialflächen so gezeichnet, dass jeweils zwischen zwei räumlich aufeinanderfolgenden die gleiche Potenzialdifferenz besteht (Abschnitt 3.3.3).

Löst man Gl. (3.49) nach der Spannung auf und ersetzt die Potenziale φ_0 und φ_p durch die Potenziale beliebiger Raumpunkte p_1 und p_2 , ergibt sich die Spannung

$$U_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.50)$$

zwischen den beiden Raumpunkten als Differenz der Potenziale dieser Punkte.

In Bild 3.23 ist das Strömungsfeld in einer rechteckigen Leiterplatte der Dicke d dargestellt, die diagonal vom Strom I durchflossen wird. Da das Strömungsfeld in allen Punkten der Platte jeweils über die Dicke d konstant ist, genügt eine *ebene Felddarstellung*, d. h. es wird ein für alle Längsschichten über die Dicke d geltendes Feldlinienbild gezeichnet. Die Äquipotenzialflächen werden in dieser Darstellung zu Äquipotenziallinien.

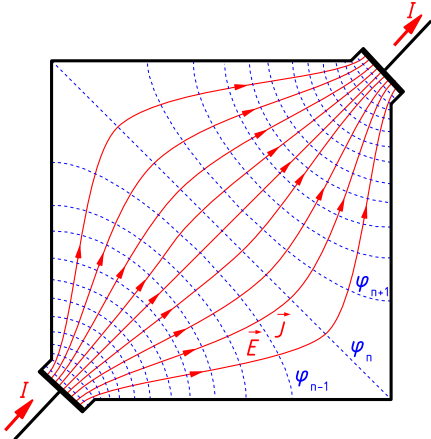


Bild 3.23: Feld- und Äquipotenziallinien im Strömungsfeld einer rechteckigen Leiterplatte

Die durchgezogenen \vec{E} -Feldlinien schneiden rechtwinklig die gestrichelt gezeichneten Äquipotenziallinien. Man sagt auch, die *Feldlinien verlaufen orthogonal zu den Äquipotenziallinien*. Die Zusammendrängung sowohl der Feldlinien als auch der Äquipotenziallinien kennzeichnet sofort erkennbar die Gebiete hoher Feldstärke.

Beispiel 3.6: Strömungsfeld eines Halbkugelerders

Um in Schaltungen oder Netzen eindeutige Spannungen gegen Erde zu bekommen, wird häufig ein bestimmter Punkt galvanisch mit der Erde verbunden. Man sagt, dieser Punkt der Schaltung bzw. des Netzes sei *geerdet*, er habe Erdpotential φ_0 , das im Allgemeinen mit null angenommen wird ($\varphi_0 = 0$).

Fließen (z. B. in Fehlerfällen) große Ströme über die Erdungsstelle, verändert sich das Potenzial des Erdreiches in der Umgebung der Erdungsstelle. Für rechnerische Untersuchungen der entstehenden Potenzialverschiebungen soll näherungsweise angenommen werden, der Erder bestehe aus einer in das Erdreich eingebetteten *Halbkugelelektrode* (Bild 3.24a), deren spezifischer Widerstand vernachlässigbar klein gegenüber dem des Erdreiches ist.

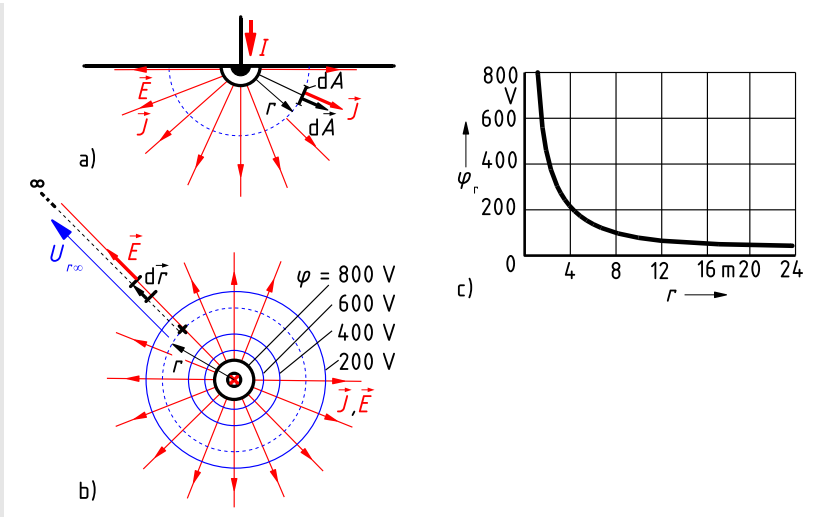


Bild 3.24: Strömungsfeld eines Halbkugelerders

- Querschnitt durch Erder und Erdreich mit \vec{E} - und \vec{J} -Feldlinien
- Erdoberfläche mit Feld- und Äquipotenziallinien
- Potenzial φ in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r

Das elektrische Strömungsfeld im Erdreich und das Potenzialfeld an der Erdoberfläche sollen bestimmt werden für den Fall, dass sich der Strom $I = 100$ A über den Erder symmetrisch in das Erdreich verteilt und zu einer als unendlich weit entfernt angenommenen Schadenstelle ins Netz zurückfließt. Für das Erdreich wird der konstante spezifische Widerstand $\varrho = 50 \Omega\text{m}$ und für den *Halbkugelerder* der Radius $r_K = 1$ m angenommen.

Die halbkugelförmige Oberfläche des Erders ist eine Äquipotenzialfläche. Von ihr gehen die Feldlinien der Stromdichte \vec{J} rechtwinklig aus und breiten sich *radialsymmetrisch* (sternförmig) in das Erdreich aus (siehe Bild 3.24). Die Stromdichte hat also nur eine radiale Komponente.

Nimmt man eine konzentrisch zum Kugelerder liegende Halbkugelschale mit dem Radius r an, gilt für alle Punkte ihrer Oberfläche, dass der Betrag der Stromdichte konstant ist und dass der Vektor \vec{J} ebenso wie der Flächenvektor $d\vec{A}$ senkrecht auf dieser Oberfläche stehen (Bild 3.24a). Somit gilt $\vec{J} \cdot d\vec{A} = J dA$. Daraus folgt der Strom, der durch die Halbkugelschale fließt:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \int_A dA = J \cdot 2\pi r^2 \quad (3.51)$$

Mit der aus Gl. (3.51) folgenden radialen Komponente der Stromdichte

$$J_r = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi r^2} = 15,9 \frac{\text{A}}{r^2} \quad (3.52)$$

kann entsprechend Gl. (3.40) auch die radiale Komponente der elektrische Feldstärke berechnet werden:

$$E_r = \varrho J_r = \frac{\varrho I}{2\pi r^2} = 50 \Omega\text{m} \cdot 15,9 \frac{\text{A}}{\text{r}^2} = 795 \text{ V} \frac{\text{m}}{\text{r}^2} \quad (3.53)$$

Zur Darstellung des Potenzialfeldes wird als *Bezugspunkt* der vom Erder unendlich weit entfernte Erdbereich mit dem Potenzial

$$\varphi_0 = \varphi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.54)$$

gewählt. Für einen beliebigen Punkt im Abstand r vom Mittelpunkt des Erders kann damit entsprechend Gl. (3.49) das Potenzial über das Wegintegral der elektrischen Feldstärke bestimmt werden (Bild 3.24b):

$$\varphi(r) = \varphi(r \rightarrow \infty) - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = I \frac{\varrho}{2\pi} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = I \frac{\varrho}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = 795 \text{ V} \frac{\text{m}}{r} \quad (3.55)$$

Alle Punkte mit gleichem Abstand r vom Erdmittelpunkt haben das gleiche Potenzial (und mit $\varphi_0 = 0$ die gleiche Spannung gegenüber dem unendlich fernen Bezugspunkt $r \rightarrow \infty$). Konzentrisch zum Kugelerder liegende Halbkugelschalen sind Äquipotenzialflächen, was auch aus der Überlegung folgt, dass diese Halbkugelschalen rechtwinklig zu den sich sternförmig ausbreitenden \vec{E} -Feldlinien verlaufen.

In Bild 3.24c ist das Potenzial als Funktion von r dargestellt (Rechenwerte siehe Tabelle 3.1) und in Bild 3.24b die Äquipotenziallinien auf der Erdoberfläche für jeweils die gleiche Potentialdifferenz $\varphi_n - \varphi_{n+1} = 200 \text{ V}$.

Man erkennt, dass durch einen Erdstrom das Potenzial der Erde zum Erder hin ansteigt, also nicht mehr als konstant angenommen werden kann. Durch den dabei auftretenden Potenzialunterschied können Lebewesen gefährdet werden. Ein in unmittelbarer Nähe des Erders gehender Mensch, der etwa 0,5 m in radialer Richtung überbrückt, würde einer *Schrittspannung* $U_{\text{schr}} = \varphi(r) - \varphi(r + 0,5 \text{ m})$ ausgesetzt sein. (Z. B. ist bei $r = 1 \text{ m}$ diese Schrittspannung $U_{\text{schr}} = \varphi(r = 1 \text{ m}) - \varphi(r = 1,5 \text{ m}) = 795 \text{ V} - 530 \text{ V} = 265 \text{ V}$.)

Tabelle 3.1: Potenzial in der Umgebung des Halbkugelerders in Beispiel 3.6

r in m	1	1,5	2	3	5	10	20
$795 \text{ Vm}/r$ in V	795	530	397	264	159	79,5	40

Die Schrittspannung ist abhängig von der Stromdichte J und dem spezifischen Widerstand ϱ des Erdreichs. Insbesondere bei trockenen Böden müssen daher Erder mit großen Oberflächen (I/A möglichst klein) verwendet werden. Trotzdem kann es bei großen Strömen, wie sie beim Blitzschlag auftreten können, zu gefährlichen Spannungen kommen. Bei Blitzschlag ist allerdings für den Potenzialanstieg nicht nur die hier betrachtete Ohmsche Spannung, sondern insbesondere auch die Selbstinduktionsspannung (Abschnitt 4.3.1.4) zu berücksichtigen.

3.2.5 Leistungsdichte im elektrischen Strömungsfeld

Nach Abschnitt 2.1.4.2 ist die in einem Leiter in Wärme umgeformte elektrische Leistung $P = UI$. In einem geraden Leiter nach Bild 3.19, in dem sich ein homogenes Strömungsfeld ausbildet, verteilt sich diese Leistung gleichmäßig über das gesamte Leitervolumen. Bezieht man die Leistung P auf das Leitervolumen $V = lA$, erhält man in allen Punkten des Strömungsfeldes den gleichen *volumenbezogenen Leistungsanteil*, der als *Leistungsdichte*

$$\frac{P}{V} = \frac{UI}{lA} = \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{A} = EJ \quad (3.56)$$

bezeichnet wird.

Die nach Gl. (3.56) als Produkt aus der ortsbezogenen elektrischen Feldstärke \vec{E} und elektrischen Stromdichte \vec{J} eingeführte Leistungsdichte ist damit ebenfalls dem *Feldpunkt* zugeordnet, sodass mit ihr auch in inhomogenen Strömungsfeldern die Leistungsverteilung als Ortsfunktion beschrieben werden kann. Man stellt sich dazu einen Feldraum in infinitesimal kleine Volumenelemente $dV = dl dA$ unterteilt vor, deren Höhen dl parallel und deren Grundflächen dA rechtwinklig zu den Feldlinien der elektrischen Feldstärke \vec{E} liegen (Bild 3.25).

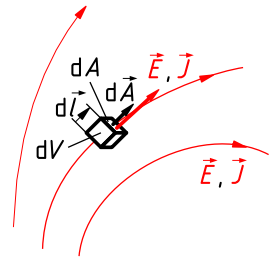


Bild 3.25: Zur Berechnung der Leistungsdichte im inhomogenen elektrischen Strömungsfeld

Auch in inhomogenen Strömungsfeldern können die Feldgrößen innerhalb solch infinitesimal kleiner Volumenelemente dV als konstant angenommen werden. Daher lassen sich der durch ein Volumenelement dV fließende Strom $dI = J dA$ und die an ihm anliegende Spannung $dU = E dl$ im häufig betrachteten Fall passiver, isotroper Gebiete als Produkte der Beträge der Feldvektoren ermitteln. Damit kann entsprechend Gl. (3.56) die in einem Volumenelement in Wärme umgeformte elektrische Leistung $dP = dU dI = EJ dl dA$ bestimmt werden. Wird diese auf das Volumen bezogen, ergibt sich die Leistungsdichte

$$\frac{dP}{dV} = EJ. \quad (3.57)$$

Für den Fall *aktiver* oder *anisotroper* Gebiete, in denen die Stromdichte \vec{J} und die elektrische Feldstärke \vec{E} nicht in die selbe Richtung weisen, ist Gl. (3.57) als Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{J}$ zu verallgemeinern:

$$\frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (3.58)$$

Mit Gl. (3.58) können die in inhomogenen Strömungsfeldern auftretenden ortsabhängigen *Verlustdichten* berechnet werden, z. B. die im Feld des Beispiels 3.4 in unmittelbarer Nähe der Elektrodenoberflächen. Die Kenntnis des räumlichen Verlaufes der Verlustdichte ist erforderlich, um die örtlich unterschiedlichen thermischen Belastungen und die daraus resultierenden Erwärmungen zu beurteilen.

3.3 Elektrisches Feld in Nichtleitern

Die über das elektrische Feld beschriebenen Kraftwirkungen auf elektrische Ladungen können in Nichtleitern naturgemäß keine Ladungsströmung zur Folge haben, da in nichtleitender Materie die Ladungsträger nicht frei beweglich sind. Das elektrische Feld äußert sich in Nichtleitern lediglich in einer *Verschiebung* von an Atomen gebundenen Ladungen im mikrokosmischen Bereich.

Allein aus Gründen einer anschaulichen, leicht verständlichen Darstellung wird in den folgenden Abschnitten das elektrische Feld in Nichtleitern bevorzugt am Beispiel des *elektrostatischen Feldes* erläutert, das *zeitkonstant* zwischen *ruhenden* Ladungen auftritt.

3.3.1 Wesen und Darstellung des elektrischen Feldes in Nichtleitern

Im elektrischen Strömungsfeld ist in passiven isotropen Gebieten die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \rho \vec{J}$ proportional zur Stromdichte \vec{J} , sodass die \vec{E} -Feldlinien parallel zu den \vec{J} -Feldlinien verlaufen und man sich beide über die Ladungsströmung in dem Leitungsgebiet vorstellen kann. Für das elektrische Feld in Nichtleitern ist eine solche *strömungsmechanische Vorstellung* über den Verlauf der Feldlinien nicht möglich.

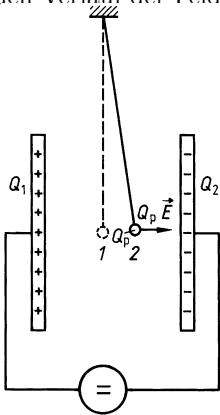


Bild 3.26: Kraft auf eine elektrische Ladung im elektrischen Feld

Wird beispielsweise an die entsprechend Bild 3.26 in Luft angeordneten *Plattenelektroden* eine konstante Spannung U gelegt, bewirkt diese durch eine kurzzeitige Ladungsströmung in den Zuleitungen (Abschnitt 9.3.2) eine Ladungstrennung. Nach Abschluss dieses Vorgangs befinden sich positive bzw. negative Ladungen auf den Plattenoberflächen, die ein elektrisches – in diesem Fall elektrostatisches – Feld im nichtleitenden Raum außerhalb der Platten bewirken.

Das elektrische Feld bildet sich also zwischen Ladungen ungleicher Polarität aus und kann durch Feldlinien beschrieben werden. Die Feldlinien beginnen auf den positiven Ladungen, den *Quellen des Feldes*, und enden auf den negativen, den *Senken des Feldes*. Diese Feldlinien beschreiben die – mögliche – Kraftwirkung des elektrischen Feldes auf Ladungen über die nach Gl. (3.2) definierte elektrische Feldstärke \vec{E} derart, dass die Richtung von \vec{E} (mögliche Krafrichtung) parallel zu den Tangentenrichtungen der Feldlinien liegt und der Betrag E proportional der Feldliniendichte bzw. umgekehrt proportional ihrem Abstand ist.

3.3.2 Elektrische Feldstärke und Spannung

Die elektrische Feldstärke \vec{E} kann im Strömungsfeld (Abschnitt 3.2.3) entsprechend Gl. (3.40) aus der die Strömungsgeschwindigkeit beschreibenden Stromdichte \vec{J} berechnet werden. Für das elektrische Feld in Nichtleitern ist eine solche Berechnung zwar nicht möglich, sie kann aber auch hier in ähnlicher Weise wie in der für das Strömungsfeld abgeleiteten Gl. (3.39) als eine längenbezogene Spannung abgeleitet werden.

Für den einfachen Fall eines homogenen Feldes zwischen parallelen, ebenen, unendlich ausgedehnten Plattenelektroden entsprechend Bild 3.27 gilt für den Betrag der elektrischen Feldstärke

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{U}{l_n}, \quad (3.59)$$

wenn U die Spannung und l_n die kürzeste Entfernung zwischen den Platten bedeutet, d. h. die Strecke, die als Normale zur Plattenoberfläche parallel zu den \vec{E} -Feldlinien liegt.

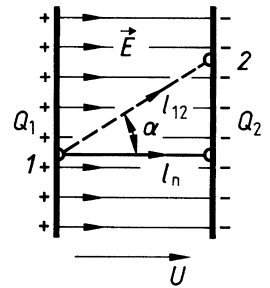


Bild 3.27: Zur Berechnung der Spannung im elektrischen Feld

Betrachtet man eine beliebige gerade Strecke l_{12} zwischen den Platten, z. B. die in Bild 3.27 von 1 nach 2 im Winkel α zu den Feldlinien verlaufende, gilt für diese die Gl. (3.59) nicht mehr. Die Richtung der betrachteten Länge l muss also beachtet werden, was dadurch geschieht, dass sie als Vektor geschrieben wird. Da ein Vektor aber nicht im Nenner einer Gleichung stehen darf, muss Gl. (3.59) zunächst in die Form

$$U = E l_n \quad (3.60)$$

umgeschrieben werden. Fasst man die Strecke l_n als Projektion der Strecke l_{12} in Richtung der elektrischen Feldstärke auf ($l_n = l_{12} \cos \alpha$) und diese wiederum als einen von 1 nach 2 gerichteten Vektor, kann die Spannung

$$U_{12} = E l_{12} \cos \alpha = \vec{E} \cdot \vec{l}_{12} \quad (3.61)$$

als Skalarprodukt des elektrischen Feldstärkevektors \vec{E} und des von 1 nach 2 gerichteten Vektors \vec{l}_{12} einer geraden Strecke l_{12} zwischen den Punkten 1 und 2 berechnet werden.

Wird an zwei Elektroden beliebiger Geometrie, z. B. zwei parallel zueinander liegende, zylindrische Leiter entsprechend Bild 3.28a, eine Spannung U gelegt, verursacht diese auf den beiden Zylinderoberflächen auch je eine Ladung Q unterschiedlicher Polarität. Die Ladung verteilt sich allerdings nicht mehr wie bei den parallelen Plattenelektroden nach Bild 3.27 gleichmäßig, sondern ungleichmäßig über die Oberfläche. In allen Fällen stellt sich im elektrostatischen Feld die *Ladungsverteilung auf Elektroden so ein, dass die elektrische Feldstärke \vec{E} immer senkrecht*

zur Oberfläche steht. So beginnen bzw. enden die \vec{E} -Feldlinien in Bild 3.28a senkrecht auf den Zylinderoberflächen. Dies macht folgende anschauliche Überlegung deutlich:

Würde die elektrische Feldstärke \vec{E} nicht senkrecht auf einer leitenden Oberfläche (Elektrode) stehen, träte eine von null verschiedene Tangentialkomponente $E_t = E \cos \alpha$ an der Elektrodenoberfläche auf. In einem Leiter hätte diese aber unmittelbar eine Verschiebung freier Ladungsträger (Strömungsfeld) zur Folge, die erst dann beendet wäre, wenn die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwindet ($E_t = E \cos \alpha = 0$), diese also rechtwinklig auf der Oberfläche steht ($\alpha = \pi/2$).

Aus der Erkenntnis, dass die elektrische Feldstärke \vec{E} immer senkrecht zu der Elektrodenoberfläche steht, folgt anschaulich, dass sich zwischen Elektroden, deren Oberflächen nicht parallel zueinander liegen, ein *inhomogenes Feld* ausbildet (\vec{E} -Feldlinien verlaufen nicht parallel und/oder mit ungleichmäßigen Abständen).

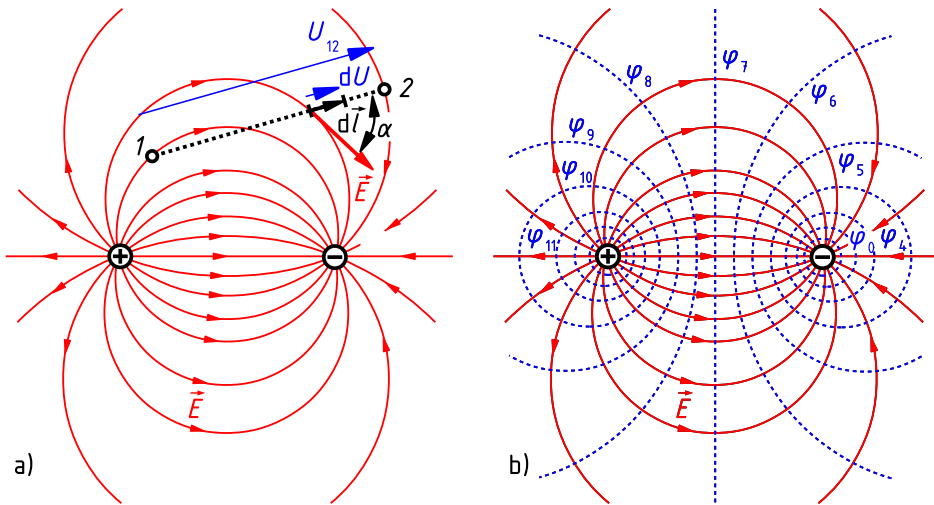


Bild 3.28: Elektrostatisches Feld zwischen langen, parallelen, zylindrischen Leitern
 a) Feldlinienbild der elektrischen Feldstärke \vec{E} mit grafischer Deutung der Berechnung einer Spannung $U_{12} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ als Wegintegral
 b) Feld- und Äquipotenziallinien

Da sich in inhomogenen Feldern die elektrische Feldstärke zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 in Betrag und/oder Richtung ändern kann (Bild 3.28a), gilt Gl. (3.61) hier nicht mehr. Zur Berechnung der Spannung U_{12} zwischen zwei Punkten 1 und 2 muss man analog zu den Erläuterungen in Abschnitt 3.2.3 zunächst Teilspannungen $dU = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ über infinitesimal kleine Längen $d\vec{l}$ bilden und diese dann entsprechend Gl. (3.43) über die gesamte Länge zwischen den Punkten 1 und 2 summieren, d. h. integrieren (Bild 3.28).

Mit den zu Beginn dieses Abschnitts angeführten Erläuterungen soll zum einen der grundsätzliche Unterschied zwischen den Erscheinungsformen elektrischer Potenzialfelder in Leitern und Nichtleitern betont, zum anderen aber die Gleichartigkeit des physikalischen Charakters und der formalen Behandlung der elektrischen Feldstärke und der Spannung für beide Feldarten aufgezeigt werden. Für den Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke \vec{E} , Spannung U

und elektrischem Potenzial φ gelten im elektrostatischen Feld die gleichen Gesetze, wie sie in Abschnitt 3.2.3 und 3.2.4 für das stationäre elektrische Strömungsfeld abgeleitet wurden. Sie werden in diesem Abschnitt lediglich aus Gründen der übersichtlichen, geschlossenen Darstellung, mit einer separaten Gleichungsnummer versehen, wiederholt.

Im *elektrischen Potenzialfeld* kann die Spannung

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.62)$$

zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 als Integral des Skalarproduktes aus Feldstärkevektor \vec{E} und Wegvektor $d\vec{l}$ berechnet werden. Für Gl. (3.62) gilt:

- Der Verlauf des Integrationsweges darf beliebig gewählt werden. Für praktische Rechnungen wird immer der Weg gewählt, der den geringsten Rechenaufwand erfordert.
- Die Integrationsrichtung $d\vec{l}$ kann beliebig von 1 nach 2 oder umgekehrt von 2 nach 1 gewählt werden, allerdings muss der Zählpfeil der nach Gl. (3.62) berechneten Spannung immer in Integrationsrichtung weisend angetragen werden.

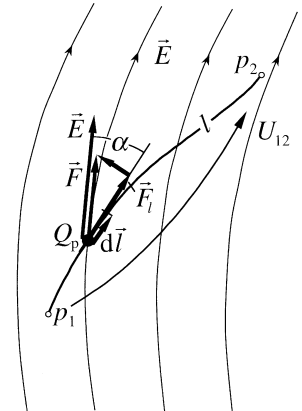


Bild 3.29: Verschiebung einer Probeladung Q_p im elektrischen Feld entlang eines beliebigen Weges
 $F_1 = F \cos \alpha = Q_p E \cos \alpha$ ist die in Richtung des Verschiebungsweges $d\vec{l}$ fallende Komponente der in Richtung der elektrischen Feldstärke \vec{E} wirkenden Coulomb-Kraft $\vec{F} = Q_p \vec{E}$

Stellt man sich in einem elektrischen Feld, z. B. dem nach Bild 3.29, eine *Probeladung* Q_p vor, die von Punkt p_1 nach Punkt p_2 bewegt wird, erfährt diese eine Kraftwirkung $\vec{F} = Q_p \vec{E}$ entsprechend Gl. (3.22). Bei der Verschiebung der Probeladung um den Weg $d\vec{l}$ ergibt sich eine mechanische Energie $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q_p \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_p dU$, die dem elektrischen Feld entzogen wird, wenn sich die Probeladung Q_p infolge der *Feldkraft* $Q_p \vec{E}$ bewegt ($d\vec{l} \uparrow \vec{E}$), oder die dem elektrischen Feld zugeführt wird, wenn die Probeladung Q_p durch eine eingepreßte (äußere) Kraft $\vec{F}_e = -Q_p \vec{E}$ entgegen der Feldkraft $Q_p \vec{E}$ bewegt wird ($d\vec{l} \downarrow \vec{E}$).

Multipliziert man Gl. (3.62) (nach der die zwischen den Punkten p_1 und p_2 auftretende Spannung U_{12} berechnet wird) mit der Probeladung Q_p

$$Q_p U_{12} = \int_1^2 Q_p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (F \cos \alpha) dl = W_{12}, \quad (3.63)$$

so stellt das Wegintegral der Kraft die bei der Bewegung der Ladung Q_p über den Weg von p_1 nach p_2 der Ladung Q_p zugeführte bzw. entzogene (mit dem Feld ausgetauschte) Energie W_{12} dar. Entsprechend der Gl. (3.63) kann diese Energie aber auch mit der über den Weg berechneten, also zwischen den Punkten p_1 und p_2 auftretenden Spannung bestimmt werden.

Damit gibt die Gleichung (3.63) auch die physikalische Definition der Spannung

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{Q} \quad (3.64)$$

als *Energieänderung pro Ladung* wieder. Über diese Gleichung lassen sich bei vielen Aufgaben umständliche Integrationen vermeiden.

Beispiel 3.7: Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld

Zwischen den parallelen ebenen Elektroden A (Ablenkplatten) in einer Elektronenstrahlröhre (Abschnitt 10.1.3.3) liegt die Gleichspannung U (Bild 3.30). Ein Elektronenstrahl tritt bei 1 in das elektrostatische Feld zwischen den Elektroden und verlässt es bei 2. Die Rückwirkungen des Elektronenstrahls auf das elektrostatische Feld sollen vernachlässigbar sein, ebenso die an den Elektrodenrändern auftretenden Inhomogenitäten des Feldes.

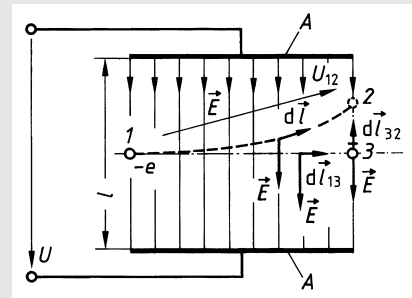


Bild 3.30: Ablenkung eines Elektronenstrahls im homogenen Feldbereich zwischen zwei ebenen Elektroden

Die über den Weg von 1 nach 2 einem Elektron der Ladung $-e$ zugeführte Energie ist zu berechnen. Der Energieaustausch im inhomogenen Randfeld außerhalb des Bereiches 1 bis 2 sowie der mit einer an die Elektroden angeschlossenen Spannungsquelle soll hier nicht betrachtet werden.

Zwischen den parallelen ebenen Elektroden bildet sich im Bereich zwischen 1 und 2 ein näherungsweise homogenes elektrostatisches Feld aus (Bild 3.30). Damit ist nach Gl. (3.59) der Betrag der elektrischen Feldstärke $E = U/l$.

Die einem Elektron der Ladung $-e$ in dem elektrischen Feld zugeführte Energie kann nach Abschnitt 3.3.6.1 entsprechend Gl. (3.98) bestimmt werden. Dazu muss lediglich die vom Elektron auf dem Weg von 1 nach 2 durchlaufene Spannung U_{12} entsprechend Gl. (3.62) berechnet werden.

Wählt man als Integrationsweg den tatsächlich von den Elektronen durchlaufenen Weg, der in Bild 3.30 gestrichelt gezeichnet angegeben ist, führt dies auf eine aufwändige Rechnung.

Wesentlich zweckmäßiger ist es, entlang der geraden Strecken von 1 über 3 nach 2 zu integrieren. Das ist möglich, da im hier vorliegenden elektrischen Potenzialfeld der In-

tegrationsweg zur Berechnung der Spannung U zwischen zwei Punkten beliebig gewählt werden darf.

Man erkennt aus Bild 3.30, dass dieser Integrationsweg aus den zwei charakteristischen Abschnitten zwischen 1 und 3 bzw. 3 und 2 besteht, in denen das Skalarprodukt aus elektrischem Feldstärkevektor \vec{E} und Wegvektor $d\vec{l}$ null ist [$\vec{E} \cdot d\vec{l}_{13} = E dl_{13} \cos(\pi/2) = 0$] bzw. als algebraisches Produkt geschrieben werden darf ($\vec{E} \cdot d\vec{l}_{32} = E dl_{32} \cos \pi = -E dl_{32}$). Da außerdem über den Weg von 3 nach 2 die elektrische Feldstärke als konstant angenommen wird, lässt sich die Integration in eine Multiplikation überführen ($-\int E dl_{32} = -E l_{32}$).

Damit bekommt man einen sehr einfachen Ausdruck für die zwischen den Punkten 1 und 2 auftretende Spannung

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_3^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}_{32} = -E l_{32}. \quad (3.65)$$

Mit den Beträgen für die elektrische Feldstärke $E = U/l$ und die Länge l_{32} folgt aus Gl. (3.65) ein negativer Zahlenwert, d. h. die Wirkungsrichtung dieser Spannung U_{12} ist umgekehrt wie die in Integrationsrichtung von 1 nach 2 eingezeichnete Zählpfeilrichtung für U_{12} .

Die Energie, die einem Elektron auf seiner Flugbahn von 1 nach 2 über das elektrische Feld zugeführt wird, ergibt sich nach Gl. (3.64) zu

$$W_{12} = U_{12}(-e) = e E l_{32}. \quad (3.66)$$

3.3.3 Elektrisches Potenzial und Eigenschaften des Potenzialfeldes

Unter Verweis auf den Absatz vor Gl. (3.62) werden auch hier die Gesetze zur Berechnung des elektrischen Potenzials lediglich wiederholend zusammengestellt. Die Erläuterungen in Abschnitt 3.2.4 gelten für sie sinngemäß.

Man wählt für die Beschreibung des Potenzials in einem elektrischen Feld einen beliebigen *Bezugspunkt* p_0 mit dem *Bezugspotenzial* φ_0 . Damit ist für jeden einzelnen Punkt p des Feldraumes nach Gl. (3.49) das *Potenzial*

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_0 - U_{0p} \quad (3.67)$$

eindeutig bestimmt. Zwischen zwei beliebigen Punkten p_1 und p_2 besteht wie beim elektrischen Strömungsfeld, siehe Gl. (3.50), die Spannung

$$U_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.68)$$

deren Zählpfeil vom Punkt p_1 zum Punkt p_2 weist.

Beispielsweise wird das Feld zwischen zwei parallelen zylindrischen Leitern nach Bild 3.28 betrachtet, die an eine konstante Spannung U angeschlossen sind. Es bildet sich ein inhomogenes

elektrostatisches Feld aus (Abschnitt 3.3.2), das in Bild 3.28 durch die voll ausgezogenen \vec{E} -Feldlinien dargestellt ist.

Das Potenzial in diesem Feld soll nun auf das Potenzial der zylindrischen Oberfläche des negativ geladenen Leiters bezogen bestimmt werden. Diese willkürliche Wahl könnte z. B. dadurch begründet sein, dass dieser Leiter geerdet ist. Damit kann das Potenzial für den beliebigen Raumpunkt nach Gl. (3.67) berechnet werden:

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_p^{p_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Für die qualitative Beurteilung des Felddbildes eines Potenzialfeldes ist es zweckmäßig, Potenzialwerte mit jeweils gleichen Abständen festzulegen:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \dots = \varphi_{(n-1)} - \varphi_n = \text{const.}$$

Verbindet man jeweils alle Punkte, die das gleiche Potenzial haben, bekommt man bei ebenen Darstellungen die *Äquipotenziallinien* (ÄPL) und bei räumlichen die *Äquipotenzialflächen* (ÄPF) als geometrischen Ort aller Punkte jeweils gleichen Potenzials.

Beispielsweise werden für das Feld zwischen den an der Spannung U liegenden zylindrischen Leitern nach Bild 3.28b die Potenzialwerte $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = U/14$, $\varphi_2 = U/7$, \dots , $\varphi_{14} = U$ festgelegt. Die sich für diese Werte ergebenden Äquipotenzialflächen sind parallel und exzentrisch zu den Zylinderleitern liegende Röhren. Ihre Schnittlinien mit einer rechtwinklig zu den beiden Zylinderleitern verlaufenden Darstellungsebene ergeben die in Bild 3.28b gestrichelt eingezeichneten Äquipotenziallinien.

In einem Potenzialfeld hat jeder Raumpunkt einen eindeutigen Wert des Potenzials. Wird also entsprechend Bild 3.31a ausgehend von einem beliebigen Punkt p_1 mit dem Potenzial φ_1 für einen beliebigen zweiten Punkt p_2 das Potenzial

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12} \quad (3.69)$$

entsprechend Gl. (3.67) berechnet, muss sich *unabhängig vom gewählten Integrationsweg* immer der gleiche Wert φ_2 ergeben. Beispielsweise liefert die Integration entlang der Wege l_1 , l_2 , l_3 , \dots in Bild 3.31a immer den gleichen Wert φ_2 . Das gleiche gilt auch für den Weg von p_1 nach p_2 in Bild 3.31b.

Berechnet man von diesem Punkt p_2 mit dem Potenzial φ_2 ausgehend wieder für den Punkt p_1 das Potenzial

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \int_{p_2}^{p_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{21} = \left(\varphi_1 - \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12} \right) - \int_{p_2}^{p_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{21} \quad (3.70)$$

(Bild 3.31b), muss sich unabhängig vom gewählten Integrationsweg wieder das diesem Punkt p_1 eigene Potenzial φ_1 ergeben. Nach Gl. (3.70) muss also die Summe der beiden Wegintegrale

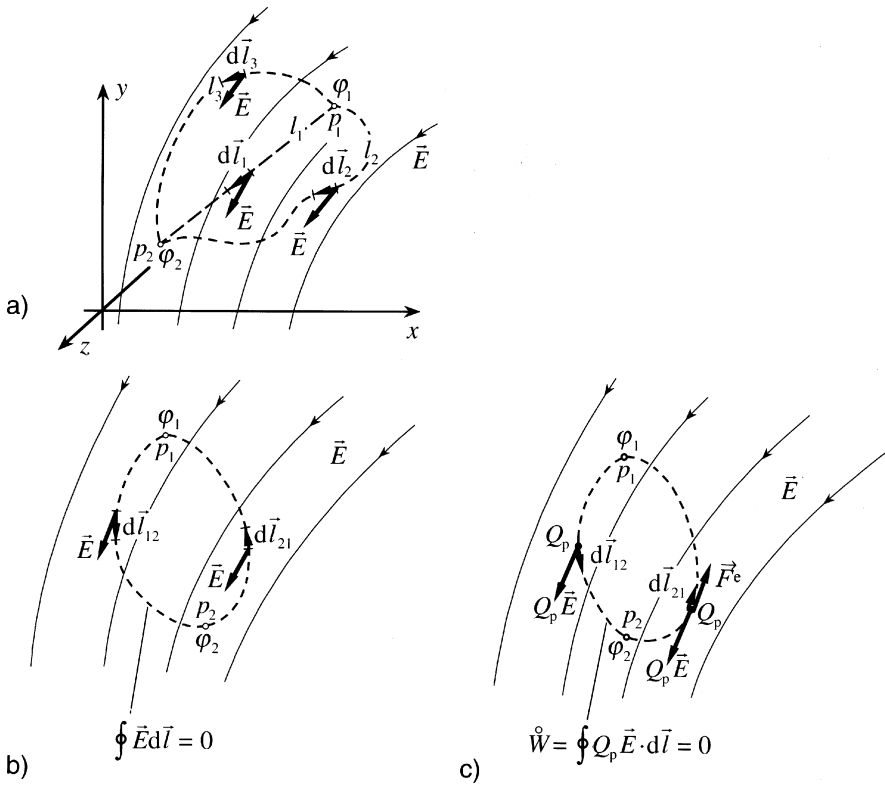


Bild 3.31: Wegintegral der elektrischen Feldstärke

- a) über verschiedene Wege zur Berechnung des Potentials
- b) über einen geschlossenen Weg (Umlaufspannung \dot{U})
- c) multipliziert mit einer Ladung Q zur Bestimmung der Umlaufenergie (\dot{W})

von p_1 nach p_2 und von dort zurück nach p_1 null ergeben:

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12} + \int_{p_2}^{p_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{21} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12} - \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{12} = 0$$

Allgemein gilt, dass im elektrischen Potenzialfeld das Wegintegral der elektrischen Feldstärke zwischen zwei Punkten unabhängig vom gewählten Weg immer den gleichen Spannungswert bzw. die gleiche Potentialdifferenz liefert. Über einen beliebigen, geschlossenen Umlauf ist das Wegintegral der elektrischen Feldstärke also stets null:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{3.71}$$

Man nennt ein solches über einen geschlossenen Weg gebildetes Wegintegral auch *Umlaufintegral* oder *Ringintegral* und kennzeichnet es mit einem Kreis im Integralzeichen.

Physikalisch kann man Gl. (3.71) so interpretieren, dass sich die potenzielle Energie einer La-

dung Q , die (durch eine äußere eingeprägte Kraft) in einem Potenzialfeld über einen geschlossenen Umlauf herumgeführt wurde, nicht ändert (Bild 3.31c).

Auf dem Grundgesetz Gl. (3.71) basiert der für die Netzwerklehre fundamentale *Maschensatz*: In einer Masche (einem geschlossenen Umlauf) ist die Summe aller Spannungen (die Umlaufspannung $\overset{\circ}{u} = \sum U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$), also das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke, stets null (Abschnitt 2.2.2.2).

3.3.4 Elektrische Flussdichte und elektrischer Fluss

In Abschnitt 3.1.2.2 wurde beschrieben, dass die Ursache des elektrostatischen Feldes ruhende elektrische Ladungen sind. In der elektrischen Feldtheorie wird diese Ursache durch die als Hilfsgröße aufzufassende *elektrische Flussdichte* \vec{D} beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen elektrische Feldstärke \vec{E} und Flussdichte \vec{D} ist in der Definitionsgleichung (3.28) festgelegt. In diesem Abschnitt werden Verfahren zur Bestimmung der elektrischen Flussdichte \vec{D} aus der sie hervorruhenden elektrischen Ladungsverteilung erläutert.

Im Folgenden wird als Beispiel der in Bild 3.32 skizzierte Plattenkondensator betrachtet.

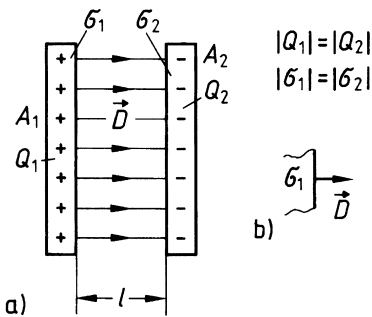


Bild 3.32: Idealisiertes Feldbild der elektrischen Flussdichte \vec{D} im Plattenkondensator (a) und Flächenladungsdichte σ an der Elektrodenoberfläche mit elektrischer Flussdichte \vec{D} auf ihr (b)

Auf den sich parallel gegenüberstehenden ebenen Plattenelektroden mit gleich großen Flächen $A_1 = A_2 = A$ befinden sich die gleich großen positiven bzw. negativen Ladungen $Q_1 > 0$ und $Q_2 = -Q_1$. Sind die Plattenabmessungen sehr groß gegenüber dem Plattenabstand, bildet sich zwischen den Platten ein näherungsweise homogenes elektrisches Feld aus, dessen Randverzerrungen vernachlässigbar sind. Damit ist die Ladung auf den Platten gleichmäßig verteilt und es lässt sich nach Gl. (3.8) die *Flächenladungsdichte*

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (3.72)$$

berechnen. Dieser Flächenladungsdichte kann die in Abschnitt 3.1.2.2 erläuterte ebenfalls flächenbezogene Feldgröße *elektrische Flussdichte* zugeordnet werden.

An der Grenzfläche zwischen den leitenden Elektroden und dem nichtleitenden Feldraum ist der Betrag der elektrischen Flussdichte \vec{D} gleich dem Betrag der Ladungsdichte σ [Fro94]:

$$|\vec{D}| = |\sigma| \quad (3.73)$$

Bildhaft kann man sich vorstellen, die Ladungsdichte σ setzt sich an der Elektrodenoberfläche in die elektrische Flussdichte \vec{D} um (Bild 3.32b). *Wie die \vec{E} -Feldlinien beginnen bzw. enden auch die \vec{D} -Feldlinien jeweils auf positiven bzw. negativen Ladungen.*

Trotz der mit Gl. (3.73) beschriebenen Gleichheit der Beträge von \vec{D} und σ ist zu beachten, dass die lediglich als Rechengröße definierte elektrische Flussdichte \vec{D} grundsätzlich von anderer Qualität ist als die Größe der Ladungsdichte σ , die in den Oberflächenladungen der Elektroden körperlich existent ist.

Der in Gl. (3.73) aufgezeigte Zusammenhang zwischen der Dichte der das elektrische Potenzialfeld direkt verursachenden Ladung und der diese Ursache beschreibenden elektrischen Flussdichte \vec{D} gilt nur unmittelbar an der Oberfläche leitender Elektroden, auf der die Feldvektoren bei isotropen Materialien immer senkrecht stehen. Um zu erläutern, wie sich die Flussdichte \vec{D} im Feldraum zwischen den Elektroden ausbildet, wird folgendes Experiment betrachtet:

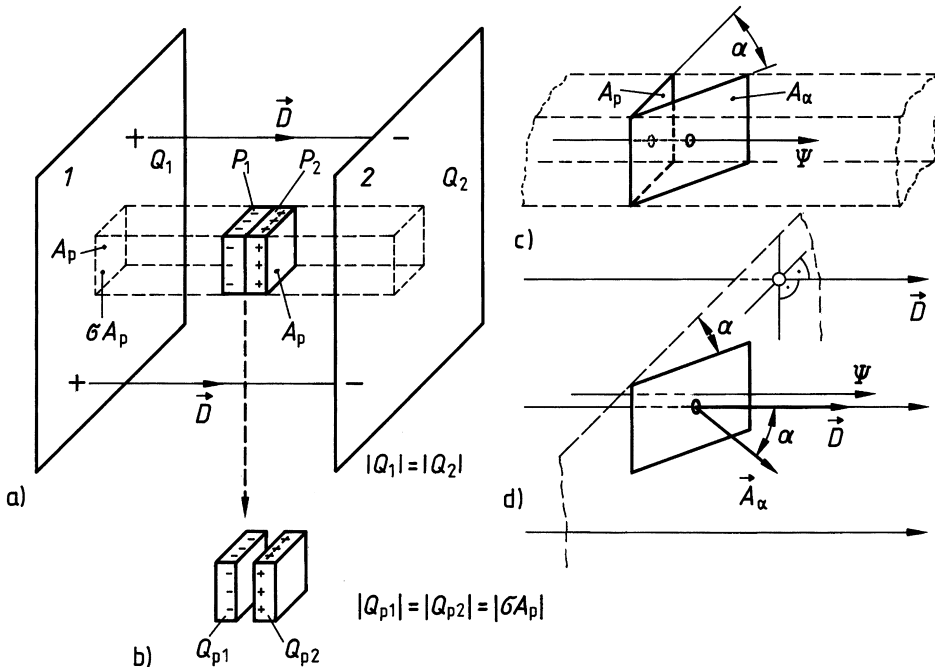


Bild 3.33: Zusammenhang zwischen Flächenladungsdichte σ , elektrischer Flussdichte \vec{D} und elektrischem Fluss Ψ

- elektrostatisches Feld im Plattenkondensator mit Maxwell'scher Doppelplatte
- Maxwell'sche Doppelplatten nach Entfernen aus dem Feld
- Flussröhre mit Querschnitt A_p und Schnittfläche A_α in allgemeiner Lage
- elektrischer Fluss Ψ durch Fläche A_α

In das homogene elektrostatische Feld zwischen den Platten Elektroden 1 und 2 mit den Ladungen $Q_1 > 0$ und $Q_2 = -Q_1$ nach Bild 3.33 werden zwei zusammengelegte (also galvanisch verbundene) leitfähige, dünne Prüfplatten P_1 und P_2 (Maxwell'sche Doppelplatte) gebracht, die parallel zu den Plattenelektroden, also senkrecht zu den \vec{D} -Feldlinien liegen. Trennt man diese Platten im Feldraum und zieht sie in getrenntem Zustand aus dem Feld heraus, kann man auf jeder der Platten eine Ladung Q_{p1} bzw. Q_{p2} messen (Bild 3.33b). Diese Ladungen haben den

gleichen Betrag, aber unterschiedliche Polarität:

$$Q_{p1} = -Q_p < 0, \quad Q_{p2} = +Q_p > 0$$

Man sagt, es seien Ladungen *influenziert* worden, und bezeichnet diese Erscheinung als *Influenz*.

Ursache hierfür ist die überall im Feldraum, also auch am Ort der Prüfplatten, herrschende elektrische Feldstärke \vec{E} , die einen Teil der in Leitern vorhandenen freien Elektronen an die Oberfläche der einen Platte *verschiebt*, sodass in der anderen die positiven Kernladungen überwiegen.

Dividiert man die auf die Prüfplatten influenzierte Ladung Q_p durch die Fläche A_p der Prüfplatten, bekommt man eine Ladungsdichte $\sigma_p = Q_p/A_p$, deren Betrag im vorliegenden Fall des homogenen Feldes gleich ist dem der Ladungsdichte σ auf den Plattenelektroden, der wiederum gleich ist dem Betrag des Feldvektors der elektrischen Flussdichte $|\vec{D}| = |\sigma| = |\sigma_p|$.

Man stellt sich nun eine „Röhre“ mit dem Querschnitt der Prüfplatten A_p vor, die parallel zu den \vec{D} -Feldlinien verläuft (Bild 3.33c), und ordnet dieser per Definition einen *elektrischen Fluss*

$$\Psi = D A_p \tag{3.74}$$

zu, der als Produkt aus dem Betrag der elektrischen Flussdichte D und der Querschnittsfläche A_p der Röhre ist. Dieser durch den Röhrenquerschnitt A_p bestimmte elektrische Fluss Ψ tritt, wie aus Bild 3.33c zu erkennen ist, gleichermaßen in beliebigen Schnittflächen A_α durch die Röhre auf. Beispielsweise ist der Fluss durch die gegenüber der Querschnittsfläche A_p geneigten Fläche A_α in Bild 3.33c

$$\Psi_\alpha = \Psi_p = D A_p.$$

Beschreibt man analog den Erläuterungen in Abschnitt 3.2.2 zu Gl. (3.37) die räumliche Lage der ebenen Fläche A_α durch einen senkrecht auf ihr stehenden Flächenvektor \vec{A}_α , so schließt dieser mit dem Vektor der elektrischen Flussdichte \vec{D} den Winkel α ein (Bild 3.33d), und man bekommt die Bestimmungsgleichung für den elektrischen Fluss

$$\Psi = \vec{D} \cdot \vec{A} = D A \cos \alpha, \tag{3.75}$$

die allerdings nur für ebene Flächen A gilt, in denen die *elektrische Flussdichte* \vec{D} *konstant* ist.

Dabei ist analog den Erläuterungen zum Strom I der *Zählpfeil des elektrischen Flusses* Ψ in *Richtung des Flächenvektors* \vec{A} einzutragen.

In *inhomogenen Feldern* (Bild 3.34) lassen sich keine „Flussröhren“ (mit beliebig großen Querschnittsflächen A_p) mehr festlegen, in denen überall die gleiche elektrische Flussdichte \vec{D} auftritt.

In Bild 3.34 ist eine beliebige Fläche A in einem inhomogenen Feld skizziert. Zerlegt man die Fläche A in infinitesimal kleine Flächenelemente dA , die durch parallel zu den \vec{D} -Feldlinien verlaufende Flussröhren mit den elektrischen Teilflüssen $d\Psi$ begrenzt sind, gilt für jede dieser Flächen dA nach obigen Erläuterungen

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A}. \tag{3.76}$$

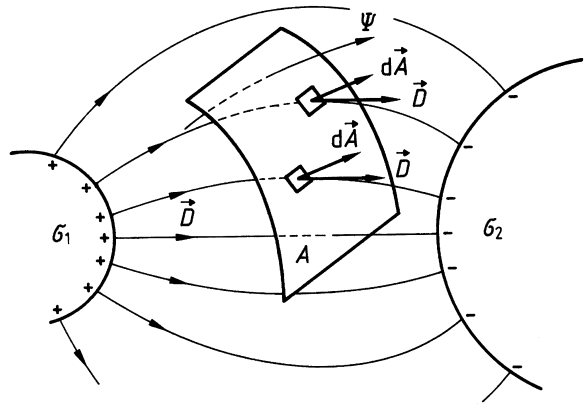


Bild 3.34: Zur Berechnung des elektrischen Flusses Ψ als Flächenintegral der elektrischen Flussdichte \vec{D}

Summiert, d. h. integriert man alle Teilflüsse $d\Psi$, bekommt man den die Fläche A durchdringenden *elektrischen Fluss*

$$\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (3.77)$$

Die größte praktische Bedeutung erlangt die Definition des elektrischen Flusses Ψ bei der Formulierung des *Gaußschen Satzes der Elektrostatik*

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q. \quad (3.78)$$

Dieser besagt, dass der elektrische Fluss Ψ durch eine geschlossene Fläche (*Hüllfläche*) gleich ist der von dieser Fläche eingeschlossenen elektrischen Ladung.

Der elektrische Hüllenfluss kann als Flächenintegral der elektrischen Flussdichte \vec{D} über eine beliebig geformte, aber geschlossene (was durch den Kreis über Ψ bzw. im Integralzeichen beschrieben ist) Fläche berechnet werden.

Der *Flächenvektor* $d\vec{A}$ ist immer aus der Hüllfläche herausweisend anzutragen. Dadurch stimmt das Vorzeichen des berechneten elektrischen Hüllenflusses $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$ mit dem Vorzeichen der von der Hüllfläche eingeschlossenen Gesamtladung überein.

Beispiel 3.8: Elektrisches Feld innerhalb eines Koaxialkabels

Bei einem sehr langen, geraden Koaxialkabel entsprechend Bild 3.35 habe der Innenleiter mit dem Außendurchmesser d_i die Ladung pro Länge $\lambda = Q/l > 0$ und der Außenleiter mit dem Innendurchmesser d_a die Ladung pro Länge $-\lambda = -Q/l < 0$. Die elektrische Flussdichte \vec{D} im Koaxialkabel ist zu berechnen.

Aus der geometrischen und elektrischen Zylindersymmetrie der Anordnung folgt, dass die \vec{D} -Feldlinien radialsymmetrisch vom Innenleiter zum Außenleiter verlaufen müssen (Bild 3.35b). Die Flussdichte \vec{D} kann also nur eine radiale Komponente D_r haben.

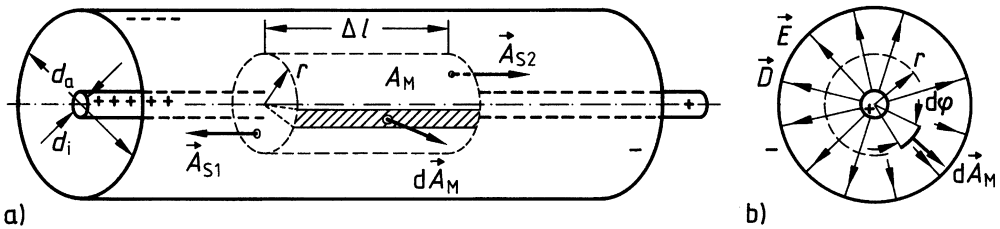


Bild 3.35: Koaxialkabel

- a) gedachter konzentrischer Zylinder zwischen Innen- und Außenleiter als Hüllfläche zur Anwendung des Gaußschen Satzes
 b) Querschnitt mit Feldlinienbild

Wählt man, wie in Bild 3.35 gestrichelt skizziert, einen geschlossenen Zylinder mit dem Radius r und der Länge Δl in konzentrischer Lage um den Innenleiter, so gilt, dass der Vektor \vec{D} in der Mantelfläche A_M dieses Zylinders in allen Punkten einen konstanten Betrag hat und senkrecht auf der Mantelfläche A_M steht. Zu den Stirnflächen A_{S1} und A_{S2} des Zylinders verlaufen die \vec{D} -Feldlinien parallel.

Die Flächenvektoren $d\vec{A}_M$ und $d\vec{A}_S$ des so gedachten Zylinders müssen nach außen weisend angetragen werden. Dabei können die Flächenelemente $d_M = \Delta l r d\varphi$ der Mantelfläche als ebene Längsstreifen mit der tangentialen Breite $r d\varphi$ aufgefasst werden (Bild 3.35), da sich über die axiale Länge Δl bei konstantem r der Vektor \vec{D} weder in Betrag noch Richtung ändert.

Mit der gegebenen längenbezogenen Ladung λ ergibt sich die vom Zylinder eingeschlossene Ladung $\Delta Q = \lambda \Delta l$ und der Gaußsche Satz der Elektrostatik kann entsprechend Gl. (3.78) wie folgt aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_M} D_r dA_M \cos 0 + \int_{A_{S1}} D_r dA_{S1} \cos(\pi/2) + \int_{A_{S2}} D_r dA_{S2} \cos(\pi/2) \\ &= D_r \Delta l r \int_0^{2\pi} d\varphi = D_r \Delta l \cdot 2\pi r = \Delta Q \end{aligned} \quad (3.79)$$

Diese Gleichung kann man mit $\Delta Q = \lambda \Delta l$ nach der Radialkomponente der elektrischen Flussdichte auflösen:

$$D_r = \lambda / (2\pi r) \sim \frac{1}{r} \quad (3.80)$$

Zu den Vorzeichen in Gl. (3.79) ist anzumerken, dass der gedachte Zylinder die positive Ladung ΔQ des Innenleiters einschließt. Die auf dieser Ladung beginnenden \vec{D} -Feldlinien durchdringen den gedachten Zylinder von innen nach außen, verlaufen also parallel zu den per Definition ebenfalls nach außen weisend auf einer Hüllfläche anzutragenden Flächenvektoren des Zylindermantels. Damit liefert das Integral des Skalarproduktes $\vec{D} \cdot d\vec{A}$ auf der linken Seite des Gaußschen Satzes Gl. (3.79) positive Zahlenwerte, was dem positiven Vorzeichen der eingeschlossenen Ladung entspricht.

Die Schwierigkeit bei der Berechnung elektrischer Felder mit Hilfe des Gaußschen Satzes liegt darin, dass die elektrische Flussdichte \vec{D} nur implizit in Gl. (3.78) enthalten ist. Lediglich in Fällen, in denen aus Symmetrieüberlegungen der *qualitative Feldverlauf* bekannt ist, lässt sich Gl. (3.78) so anwenden, dass ihre explizite Auflösung nach der elektrischen Flussdichte möglich wird. Man kann also mit Hilfe des Gaußschen Satzes bei gegebenem \vec{D} -Feld im Allgemeinen immer den elektrischen Hüllenfluss $\oint \vec{D} \cdot \vec{d}\vec{s}$ und damit die von der Hülle eingeschlossene Ladung Q berechnen, dagegen umgekehrt aus dem gegebenen Fluss bzw. aus der gegebenen Ladung die elektrische Flussdichte \vec{D} nur in Sonderfällen, wenn der qualitative Feldverlauf bekannt ist und das Feld bestimmte Symmetrien aufweist.

3.3.5 Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und Spannung

Um den Zusammenhang zwischen den elektrischen Größen Ladung Q und Spannung U zu erläutern, werden die in Bild 3.36 dargestellten ebenen Platten mit den Flächen $A_1 = A_2 = A$ betrachtet, die sich im Abstand l parallel zueinander gegenüberstehen.

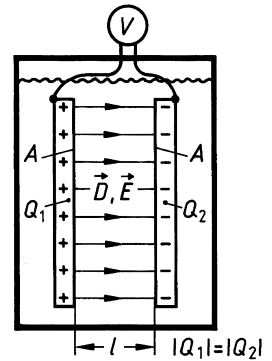


Bild 3.36: Plattenkondensator in einem mit Öl gefüllten Gefäß

Auf die eine Platte wurde eine positive Ladung $Q_1 > 0$, auf die andere eine negative Ladung $Q_2 < 0$ gebracht, die betragsmäßig gleich sind ($Q_1 = -Q_2 = Q$).

Diese Ladungen verursachen ein näherungsweise homogenes elektrostatisches Feld zwischen den Platten (die Verzerrungen zu den Plattenrändern hin sollen vernachlässigbar sein). Für dieses homogene Feld gilt nach den Gln. (3.72) und (3.73) für den Zusammenhang zwischen elektrischer Flussdichte D und Plattenladung

$$|Q| = |\sigma|A = DA. \quad (3.81)$$

Mit der zwischen den Platten verschobenen Ladung Q stellt sich eine Spannung U zwischen den Platten ein, die mit einem *elektrostatischen Spannungsmesser* gemessen werden kann. Ein solcher Spannungsmesser hat einen nahezu unendlich großen Innenwiderstand, d. h. über ihn fließt kein Strom, der den Ladungsunterschied der Platten ausgleichen würde. Der Zusammenhang zwischen der Spannung U und dem Betrag der elektrischen Feldstärke E des homogenen Feldes zwischen den Platten wird mit Gl. (3.60) beschrieben:

$$U = El \quad (3.82)$$

Dividiert man Gl. (3.81) durch Gl. (3.82), bekommt man die auf die Plattenspannung U bezogene Plattenladung

$$\frac{Q}{U} = \frac{D}{E} \cdot \frac{A}{l}. \quad (3.83)$$

Ordnet man die Platten in einem Gefäß an, welches zunächst evakuiert, also luftleer ist, misst man bei einer Plattenladung Q_L die Plattenspannung U_L . Füllt man dann das Gefäß mit Isolieröl, misst man eine Spannung $U_{\text{Ö}}$, die sich von der bei Vakuum gemessenen unterscheidet. Da die Platten isoliert angeordnet sind, kann sich ihre Ladung durch das Einfüllen des Öls nicht geändert haben ($Q_{\text{Ö}} = Q_L = Q$). Da auch die Plattenfläche A und ihr Abstand l nicht verändert werden, folgt aus Gl. (3.83)

$$\frac{Q}{U_L} = \frac{D}{E_L} \cdot \frac{A}{l} \neq \frac{Q}{U_{\text{Ö}}} = \frac{D}{E_{\text{Ö}}} \cdot \frac{A}{l}, \quad (3.84)$$

also die Tatsache, dass der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen elektrische Flussdichte \vec{D} und elektrische Feldstärke \vec{E} vom Material des Feldraumes abhängen muss.

Diese Materialabhängigkeit wird durch die *Permittivität* $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ berücksichtigt, die in Gl. (3.28) bei der Definition der elektrischen Flussdichte eingeführt wurde.

Die *relative Permittivität* ε_r gibt ähnlich wie die relative Permeabilität μ_r im magnetischen Feld (Abschnitt 4.1.5) ausschließlich den Einfluss des Werkstoffs an (Tabelle 3.2). Soweit Bereiche in dieser Tabelle für ε_r angegeben sind, zeigen die Stoffe eine merkliche Abhängigkeit von ihrer Zusammensetzung.

Tabelle 3.2: Beispiele für relative Permittivitäten ε_r fester und flüssiger Isolierstoffe bei 20 °C und Frequenzen $f < 2$ MHz

Eis bei -20°C	16,0	Mineralöl	2,2	Polyvinylchlorid,	4 bis 5,5
Glas, gewöhnlich	5 bis 7	Pertinax	4,8	weich	
Glimmer	5 bis 8	Petroleum	2,1	Porzellan	4,5 bis 6,5
Gummi	2,7	Polyäthylen	2,2 bis 2,3	Quarz	3,8 bis 5
Hartpapier	5 bis 6	Polystyrol	2,4 bis 3	Wasser, destilliert	80
Hölzer	1 bis 7	Polyvinylchlorid	3,2 bis 3,5		
Keramikmassen	bis 4000	(PVC), hart			

Die relativen Permittivitäten von Gasen liegen sehr nahe bei 1, z. B. $\varepsilon_r = 1,0006$ für Luft bei 1000 hPa. Bei vielen Werkstoffen ist die relative Permittivität ε_r *temperaturabhängig*. Insbesondere bei geschichteten Dielektrika kann ε_r *richtungsabhängig* (anisotrop) sein. In jedem Fall ist es *frequenzabhängig* [ITM07], [Mün87]. Allerdings ist die Frequenzabhängigkeit insbesondere im Bereich niedriger Frequenzen meist unbedeutend.

3.3.5.1 Kapazität

Ersetzt man in Gl. (3.83) den Quotienten D/E durch die Permittivität ε , erkennt man, dass der Quotient Ladung durch Spannung

$$\frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{A}{l} \quad (3.85)$$

nur von der Geometrie der Anordnung und den Materialeigenschaften des Feldraumes abhängig ist. Dieser hier am übersichtlichen Beispiel paralleler ebener Platten erläuterte Zusammenhang lässt sich sinngemäß auch auf Elektrodenanordnungen beliebiger Geometrie übertragen. Wegen der großen praktischen Bedeutung dieser Gesetzmäßigkeit wurden folgende allgemeingültige Begriffe festgelegt:

Eine Anordnung aus zwei *Elektroden* (elektrisch leitfähige Gebilde) beliebiger Geometrie, die durch einen nicht leitfähigen Raum, das *Dielektrikum*, getrennt sind, nennt man *Kondensator*.

Befinden sich auf den Elektroden gleich große Ladungen unterschiedlicher Polarität $Q > 0$ und $-Q$, tritt zwischen ihnen die Spannung U auf. Der Quotient Ladung durch Spannung wird als *Kapazität*

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3.86)$$

des Kondensators bezeichnet.

Die Kapazität C ist nur von der Geometrie der Anordnung und den Materialeigenschaften des Dielektrikums im felderfüllten Raum abhängig.

Die Ladung Q , die ein Kondensator pro Spannung U zu speichern vermag, wird durch die Kapazität C dieses Kondensators angegeben.

In der Praxis ist häufig die ladungsspeichernde Wirkung von Kondensatoren von Nutzen, z. B. zur Speisung von Elektronenblitzröhren, zur Glättung pulsierender Gleichspannungen, in Schwingkreisen usw.

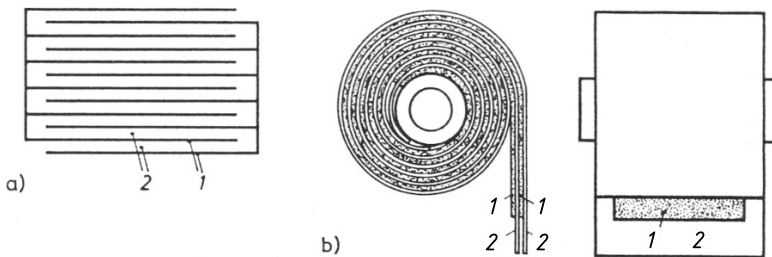


Bild 3.37: Schematische Darstellung ausgeführter Kondensatoren in geschichteter (a) und aufgerollter (b) Form

1 Elektroden aus Metallfolien

2 Dielektrikum aus Isolierstofffolien

Für diesen Zweck verwendet man Kondensatoren mit großflächigen Elektroden aus dünnen Metallfolien, die durch ein Dielektrikum aus dünnen Isolierfolien getrennt und wechselweise zusammengeschichtet (Bild 3.37a) bzw. aufgerollt (Bild 3.37b) sind, oder *Elektrolytkondensatoren*, auf deren kompliziertere Wirkungsweise hier nicht eingegangen wird.

Im Gegensatz zu solchen erwünschten Kapazitäten sind die zwischen allen Gebieten, zwischen denen eine elektrische Potenzialdifferenz auftreten kann, unvermeidbar wirksamen *parasitären Kapazitäten* in der Regel unerwünscht. Beispielsweise können über die zwischen zwei Leitungen

bestehende Kapazität Störungen übertragen werden, die die Funktion einer Schaltung beeinträchtigen oder sogar verhindern.

Die zwischen zwei Elektroden auftretende Kapazität lässt sich nach folgendem Schema berechnen:

Auf den zwei in ihrer Geometrie gegebenen Elektroden 1 und 2 werden gleich große positive und negative Ladungen $Q_1 = -Q_2 = Q$ angenommen. Für das von diesen Ladungen zwischen den Elektroden erzeugte elektrostatische Feld wird mit Hilfe des *Gaußschen Satzes der Elektrostatik* entsprechend Gl. (3.78) die elektrische Flussdichte \vec{D} berechnet (Beispiel 3.8). Mit der für das Dielektrikum des Feldraumes zwischen den Elektroden gegebenen Permittivität ε kann nach Gl. (3.28) die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ berechnet werden. Diese über einen beliebigen Weg zwischen den Elektroden entsprechend Gl. (3.68) integriert, ergibt die Spannung U zwischen den Elektroden, mit der die Kapazität $C = Q/U$ als Quotient aus angenommener Ladung Q und der dafür über D und E berechneten Spannung U bestimmt werden kann.

Beispiel 3.9: Kapazitätsbelag eines Koaxialkabels

Für das in Beispiel 3.8 behandelte, in Bild 3.35 dargestellte Koaxialkabel ist die längenbezogene Kapazität, der so genannte *Kapazitätsbelag* C/l zu berechnen. Der Innenleiter hat den Durchmesser $d_i = 1$ mm, der Außenleiter den Innendurchmesser $d_a = 10$ mm und das Dielektrikum zwischen Innen- und Außenleiter die relative Permittivität $\varepsilon_r = 2$.

Für eine axiale Länge Δl des Kabels wird eine positive bzw. negative Ladung des Betrags $\Delta Q = \lambda \Delta l$ auf dem Innen- bzw. Außenleiter angenommen (λ ist die Ladung pro Länge).

Für diese Ladung wurde in Beispiel 3.8 die elektrische Flussdichte $D = \lambda/(2\pi r) = \Delta Q/(\Delta l \cdot 2\pi r)$ berechnet. Dieser elektrischen Flussdichte entspricht im Dielektrikum der Permittivität $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ nach Gl. (3.28) die elektrische Feldstärke $E = D/\varepsilon_0 \varepsilon_r = \Delta Q/(\Delta l \cdot 2\pi r \varepsilon_0 \varepsilon_r)$. Damit kann entsprechend Gl. (3.62) die Spannung U zwischen Innen- und Außenleiter berechnet werden. Man wählt einen radialen Integrationsweg, über den der Wegvektor $d\vec{l} = dr$ immer parallel zu dem Feldstärkevektor \vec{E} liegt, also $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dr$ gilt. Damit beträgt die Spannung

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\Delta Q}{\Delta l \cdot 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{\Delta Q}{\Delta l \cdot 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} [\ln r]_{r_i}^{r_a} = \frac{\Delta Q}{\Delta l \cdot 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{r_a}{r_i}.$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach $\Delta Q/U$ liefert entsprechend Gl. (3.86) die Kapazität

$$\Delta C = \frac{\Delta Q}{U} = \frac{\Delta l \cdot 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \quad (3.87)$$

für ein Kabelstück der Länge Δl .

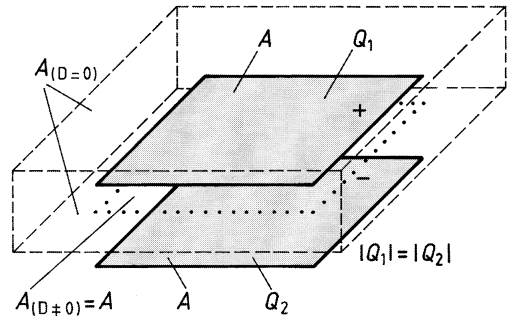
Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich der Kapazitätsbelag des Koaxialkabels

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} = \frac{2\pi \cdot 8,854 \cdot 2 \text{ pF/m}}{\ln(5/0,5)} = 48,3 \text{ pF/m},$$

der die Übertragungseigenschaften des Kabels wesentlich beeinflusst.

Bei den meisten Kondensatoren, die speziell zum Zweck der Ladungsspeicherung gebaut sind, ist das elektrische Feld auf den durch die Elektrodenform begrenzten Raum konzentriert. In solchen Fällen braucht bei der Berechnung der elektrischen Flussdichte aus der Elektrodenladung nicht immer die vollständig geschlossene Hülle um die Elektrode im Gaußschen Satz berücksichtigt zu werden.

Bild 3.38: Plattenkondensator mit quaderförmiger Hüllfläche (gestrichelt eingezeichnet) um die Elektrode mit der Ladung $Q_1 > 0$ (der Bereich der Hüllfläche zwischen den Plattenelektroden, in dem $D \neq 0$ ist, ist gepunktet umrandet)



Soll beispielsweise die Kapazität des Plattenkondensators nach Bild 3.38 berechnet werden, gilt der Gaußsche Satz für die gestrichelt eingezeichnete geschlossene Quaderoberfläche um eine der beiden Elektroden. (Zweckmäßigerweise wählt man die positiv geladene.) Da man weiß, dass sich das Feld des Plattenkondensators praktisch ausschließlich zwischen den Platten und hier näherungsweise homogen ausbildet, kann der Gaußsche Satz als Summe aus zwei Integralen geschrieben werden, die sich auf

- die Oberflächenanteile $A(D = 0)$ beziehen, in denen kein Feld auftritt, die Integration also null ergibt, und
- die Oberflächenanteile $A(D \neq 0)$, in denen $D \neq 0$ ist, die Integration also ausgeführt werden muss, dabei aber in eine Multiplikation überführt werden kann, weil D über diesen Flächenanteil konstant ist.

Für den *Plattenkondensator* in Bild 3.38 gilt also

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A(D=0)} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A(D \neq 0)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D A(D \neq 0) = Q$$

mit der punktiert umrandeten Fläche $A(D \neq 0)$, die der Projektion der Kondensatorplatten entspricht ($A(D \neq 0) = A$).

Für Kondensatoren mit plattenförmigen parallelen Elektroden der Fläche A_{P1} , die durch ein dünnes folienartiges Dielektrikum getrennt sind, gilt also in guter Näherung

$$Q_{P1} = D A_{P1} . \quad (3.88)$$

Daraus folgt die elektrische Feldstärke $E = D/\varepsilon$, die über den Plattenabstand a konstant ist, sodass die Spannung zwischen den Platten

$$E a = U \quad (3.89)$$

sich nach Gl. (3.60) berechnen lässt. Damit ergibt sich für den Plattenkondensator die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D A_{P1}}{(D/\varepsilon)a} = \varepsilon \frac{A_{P1}}{a} . \quad (3.90)$$

Beispiel 3.10: Elektrodenfläche eines Folienkondensators

Ein Kondensator soll aus dünnen Metallfolien aufgebaut werden, die durch eine Kunststofffolie der Dicke $a = 0,2$ mm und der relativen Permittivität $\epsilon_r = 4$ gegeneinander isoliert sind. Wie groß ist die erforderliche Elektrodenfläche pro Kapazität?

Die Flächenabmessungen der Elektroden von Folienkondensatoren mit Kapazitätswerten im oder über dem nF-Bereich sind sehr groß gegenüber ihrem Abstand a , sodass sie als Plattenkondensatoren aufgefasst werden können. Damit gilt Gl. (3.90), nach der sich die Elektrodenfläche $A_{P1} = Ca/\epsilon$ bzw. die kapazitätsbezogene Elektrodenfläche $A_{P1}/C = a/\epsilon = 0,2 \text{ mm}/(4 \cdot 8,8542 \text{ pF/m}) = 5,65 \text{ m}^2/\mu\text{F}$ ergibt.

In der praktischen Ausführung sind die beiden Elektrodenflächen als Metallfolien ausgeführt und mit je einer Isolierstofffolie zusammen aufgerollt (Bild 3.37b) oder übereinandergeschichtet (Bild 3.37a). In beiden Fällen werden jeweils beide Seiten jeder Metallfolie als Elektrode wirksam, sodass praktisch für jede Elektrode $A_{Fol} = A_{P1}/2 \approx 2,8 \text{ m}^2/\mu\text{F}$ Metallfolie benötigt wird.

3.3.5.2 Zeitliche Änderung von Strom und Spannung im Kondensator

Die mit Gl. (3.86) formulierte Definition der Kapazität C gilt nicht nur für elektrostatische Felder, sondern auch für zeitvariante elektrische Felder. Bei zeitvarianten Größen muss Gl. (3.86) zu jeder Zeit von den Augenblickswerten erfüllt sein. Für konstante Kapazitäten C gilt also, dass sich bei einer Ladungsänderung pro Zeit dQ/dt auch die Spannung entsprechend ändern muss:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (3.91)$$

Da die zeitliche Ladungsänderung dQ/dt durch den zu- bzw. abfließenden Strom entsprechend $dQ/dt = i$ bewirkt wird, ergibt sich aus Gl. (3.91) für den Augenblickswert des Stroms die Differentialgleichung

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (3.92)$$

bzw. für den Augenblickswert der Spannung die Integralgleichung in symbolischer Form

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt. \quad (3.93)$$

3.3.5.3 Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Werden mehrere ideale Kondensatoren entsprechend Bild 3.39 *parallel geschaltet*, kommt dies einer Vergrößerung der Elektrodenfläche gleich, was bei gegebener Spannung U eine entsprechende Vergrößerung der gespeicherten Ladung Q zur Folge hat, s. Gl. (3.90).

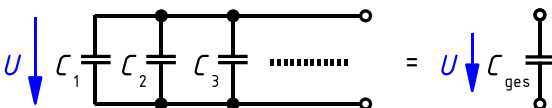


Bild 3.39: Gesamtkapazität C_{ges} parallel geschalteter idealer Kondensatoren

Sind C_1, C_2, C_3, \dots die Kapazitäten der parallelgeschalteten Kondensatoren mit den Einzellaadungen Q_1, Q_2, Q_3, \dots , ist die gesamte gespeicherte Ladung

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

Ersetzt man die Ladungen entsprechend Gl. (3.86) durch die an allen Kondensatoren gleiche Spannung U multipliziert mit der jeweiligen Kapazität, ergibt sich

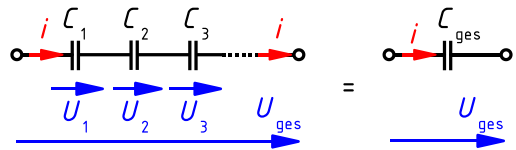
$$U C_{\text{ges}} = U C_1 + U C_2 + U C_3 + \dots = U(C_1 + C_2 + C_3 + \dots)$$

und nach Kürzen durch U die *Gesamtkapazität einer Parallelschaltung von Kondensatoren*:

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (3.94)$$

Bei der *Reihenschaltung* von Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2, C_3, \dots entsprechend Bild 3.40 fließt stets durch alle Kondensatoren der gleiche Strom i .

Bild 3.40: Gesamtkapazität C_{ges} in Reihe geschalteter idealer Kondensatoren



Waren beim Einschalten dieses Stroms (Abschnitt 9.3.2) *alle Kondensatoren ungeladen*, muss sich auf allen Elektroden die betragsmäßig gleiche Ladung $Q = \int i dt$ ansammeln. Die sich dabei an jedem Kondensator entsprechend Gl. (3.86) einstellende Spannung $U = Q/C$ ist abhängig von der Kapazität C des jeweiligen Kondensators. Aus der Gesamtspannung

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

der Reihenschaltung folgt mit $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q$

$$\frac{Q}{C_{\text{ges}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots$$

und nach Division durch Q der Kehrwert der *Gesamtkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren*

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (3.95)$$

Beispiel 3.11: Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

In einem Plattenkondensator entsprechend Bild 3.41 besteht das Dielektrikum aus drei Isolationsschichten der jeweils konstanten Dicke $a_1 = 2 \text{ mm}$, $a_2 = 3 \text{ mm}$, $a_3 = 3 \text{ mm}$ und den relativen Permittivitäten $\epsilon_{r1} = 3$, $\epsilon_{r2} = 1$ (Luft), $\epsilon_{r3} = 9$. Die sich parallel gegenüberliegenden Elektroden A_1 und A_2 haben die gleiche Fläche $A_1 = A_2 = A = 0,1 \text{ m}^2$.

Für den gegebenen Kondensator sind die Kapazität C und für den Fall, dass der Kondensator an die Spannung $U = 10 \text{ kV}$ gelegt wird, die gespeicherte Ladung Q , der Betrag der elektrischen Flussdichte D , der Betrag der elektrischen Feldstärke E sowie die Spannungsverteilung auf die drei Isolierschichten zu berechnen.

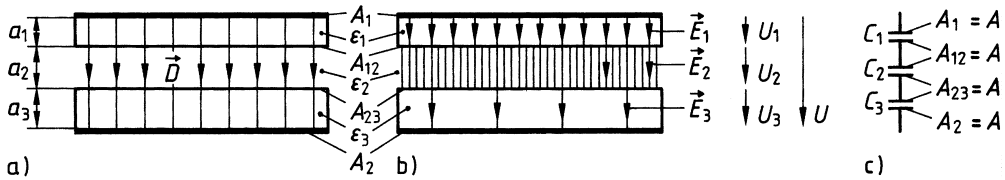


Bild 3.41: Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

- Feldlinienbild der elektrischen Flussdichte \vec{D}
- Feldlinienbild der elektrischen Feldstärke \vec{E}
- Modellierung durch eine Reihenschaltung von drei Kondensatoren

Die Trennflächen A_{12} und A_{23} zwischen den Dielektrika verlaufen parallel zu den Elektrodenflächen und damit senkrecht zu dem sich zwischen den parallel liegenden ebenen Elektroden ausbildenden elektrischen Feld. Sie liegen also in den Äquipotenzialflächen des \vec{E} -Feldes. Man könnte sich somit eine dünne Metallfolie in den Trennflächen A_{12} und A_{23} vorstellen (wodurch der Feldverlauf nicht gestört würde) und die Anordnung als eine Reihenschaltung von drei Plattenkondensatoren (Bild 3.41c) ansehen, deren jeweilige Kapazität nach Gl. (3.90) berechnet werden kann:

$$C_1 = A \epsilon_0 \epsilon_{r1} / a_1 = (0,1 \text{ m}^2 \cdot 3 \cdot 8,854 \text{ pF/m}) / (2 \text{ mm}) = 1,330 \text{ nF}$$

$$C_2 = A \epsilon_0 \epsilon_{r2} / a_2 = (0,1 \text{ m}^2 \cdot 1 \cdot 8,854 \text{ pF/m}) / (3 \text{ mm}) = 0,295 \text{ nF}$$

$$C_3 = A \epsilon_0 \epsilon_{r3} / a_3 = (0,1 \text{ m}^2 \cdot 9 \cdot 8,854 \text{ pF/m}) / (3 \text{ mm}) = 2,650 \text{ nF}$$

Aus diesen drei Teilkapazitäten folgt entsprechend Gl. (3.95)

$$1/C = (1/C_1) + (1/C_2) + (1/C_3) = (1,33 \text{ nF})^{-1} + (0,295 \text{ nF})^{-1} + (2,65 \text{ nF})^{-1} = 4,5/\text{nF}$$

die resultierende, d. h. zwischen den gegebenen Plattenelektroden wirksame Kapazität $C = (1/4,5) \text{ nF} = 222 \text{ pF}$.

Die angeschlossene Quelle mit der Spannung $U = 10 \text{ kV}$ verschiebt im Plattenkondensator die Ladung $Q = CU = 222 \text{ pF} \cdot 10 \text{ kV} = 2,22 \text{ } \mu\text{C}$. Diese Ladung Q verteilt sich bei Vernachlässigung der Randverzerrungen gleichmäßig über die Plattenoberfläche, sodass sich zwischen den Plattenelektroden ein homogenes Feld der elektrischen Flussdichte \vec{D} einstellt (Bild 3.41a) mit dem Betrag $D = Q/A = 2,22 \text{ } \mu\text{C} / (0,1 \text{ m}^2) = 22,2 \text{ } \mu\text{C/m}^2$.

Die Feldlinien der elektrischen Flussdichte \vec{D} beginnen jeweils auf der Plattenoberfläche mit den positiven Ladungen und enden jeweils auf der Plattenoberfläche mit den negativen Ladungen. Sie treten gemäß Bild (3.41a) mit gleicher Dichte (gleichem Abstand) in allen drei Isolierschichten auf.

Im Gegensatz zu der allein von der Ladung Q abhängigen elektrischen Flussdichte \vec{D} ist die elektrische Feldstärke \vec{E} auch von den Eigenschaften des Dielektrikums abhängig. Sie ist damit nicht mehr in allen drei Isolierschichten gleich, sondern abhängig von deren Permittivität. Mit $D/\epsilon_0 = (22,2 \text{ } \mu\text{C/m}^2) / (8,854 \text{ pC/Vm}) = 2,5 \text{ MV/m}$ ergeben sich die

Beträge der elektrischen Feldstärken:

$$E_1 = D/(\varepsilon_0 \varepsilon_{r3}) = (2,5 \text{ MV/m})/3 = 834 \text{ kV/m} = 8,34 \text{ kV/cm}$$

$$E_2 = D/(\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}) = (2,5 \text{ MV/m})/1 = 2500 \text{ kV/m} = 25 \text{ kV/cm}$$

$$E_3 = D/(\varepsilon_0 \varepsilon_{r3}) = (2,5 \text{ MV/m})/9 = 278 \text{ kV/m} = 2,78 \text{ kV/cm}$$

Die Feldstärken verhalten sich umgekehrt wie die relativen Permittivitäten, d. h. in Luft mit der kleinsten relativen Permittivität ε_r herrscht die größte Feldstärke. Da die elektrische Feldstärke, bei der ein Isolierstoff durchschlägt (*Durchbruchfeldstärke*), außerdem in Luft mit etwa 30 kV/cm geringer als in den meisten festen oder flüssigen Isolierstoffen ist, müssen in Hochspannungsisolierungen unbedingt *Lufteinschlüsse vermieden werden*.

Die Spannungsverteilung auf die drei Isolierstoffschichten folgt aus Gl. (3.60):

$$U_1 = a_1 E_1 = 2 \text{ mm} \cdot 834 \text{ kV/m} = 1,67 \text{ kV}$$

$$U_2 = a_2 E_2 = 3 \text{ mm} \cdot 2500 \text{ kV/m} = 7,5 \text{ kV}$$

$$U_3 = a_3 E_3 = 3 \text{ mm} \cdot 278 \text{ kV/m} = 0,83 \text{ kV}$$

3.3.6 Energie und Kräfte im elektrischen Feld

Im elektrischen Feld wirken Kräfte sowohl unmittelbar auf elektrische Ladungen als auch auf Grenzflächen zwischen Stoffen unterschiedlicher Permittivität. Durch entsprechende Verschiebung der Ladung oder der Grenzflächen und damit der auf sie wirkenden Kräfte wird mechanische Energie reversibel in Feldenergie umgeformt, woraus folgt, dass das elektrische Feld ein *reversibler Energiespeicher* ist.

3.3.6.1 Gespeicherte Energie im elektrischen Feld

Wie in Abschnitt 3.3.2 anhand des Bildes 3.29 erläutert wurde, wird im elektrischen Feld auf eine Ladung Q entsprechend Gl. (3.22) die Kraft $\vec{F} = \vec{E}Q$ ausgeübt. Bewegt sich eine Ladung *infolge* dieser Kraft über eine Strecke l , z. B. in Bild 3.29 von p_1 nach p_2 , wird dabei *elektrische Feldenergie in mechanische Energie umgeformt*. Diese ergibt sich nach den Gesetzen der Mechanik [DKV10] als Wegintegral des Skalarproduktes aus Kraft- und Wegvektor ($W_{\text{mech}} = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$).

Wird durch eine *äußere eingepreßte Kraft* $\vec{F}_{\text{mech}} = -\vec{E}Q$ eine Ladung *gegen die elektrische Feldkraft* $\vec{E}Q$ bewegt, wird die dafür aufzubringende *mechanische Energie in elektrische Feldenergie umgeformt*.

Ersetzt man im Wegintegral die Kraft \vec{F} entsprechend Gl. (3.22) durch das Produkt aus Feldstärke \vec{E} und Ladung Q , ergibt sich die mit dem elektrischen Feld in Wechselwirkung stehende Energie

$$W_e = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = QU. \quad (3.96)$$

Wird also eine Ladung Q im elektrischen Feld auf einem beliebigen Weg l zwischen zwei Punkten 1 und 2 verschoben, tritt dabei eine Energieumformung auf, die auch als Produkt aus der

Ladung Q und der Spannung U_{12} , die über den Verschiebungsweg zwischen den Punkten 1 und 2 wirksam ist, berechnet werden kann.

Die in dem elektrischen Feld zwischen zwei Elektroden insgesamt gespeicherte Energie ist durch die das Feld bestimmenden Größen der Ladung Q auf und der Spannung U zwischen den Elektroden bestimmt.

Zur Erläuterung wird der Kondensator in Bild 3.42 betrachtet, dem Energie über von außen eingeprägte mechanische Kräfte zugeführt werden soll.

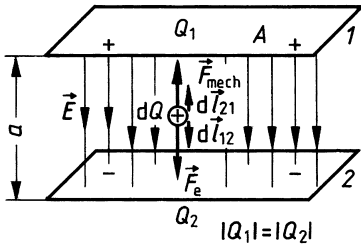


Bild 3.42: Kräfte auf eine Ladung dQ im homogenen Feld eines Plattenkondensators

Infolge einer solchen eingeprägten Kraft \vec{F}_{mech} wird eine infinitesimal kleine positive Ladung dQ entgegen der Feldkraft \vec{F}_e von der negativ geladenen Kondensatorplatte 2 auf die positiv geladene Platte 1 entlang einer Feldlinie \vec{E} verschoben. Damit ist die Ladung beider Elektroden betragsmäßig um dQ , die Spannung zwischen den Elektroden um $dU = dQ/C$ und die Feldenergie um

$$dW_e = \int_2^1 \vec{F}_{\text{mech}} \cdot d\vec{l}_{21} = \int_1^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{l}_{12} = dQ \int_1^2 E \cdot dl = U dQ = (Q/C) dQ \quad (3.97)$$

vergrößert worden. Denkt man sich den Vorgang – mit ungeladenem Kondensator beginnend – hinreichend oft wiederholt, erhält man die *Energie des geladenen Kondensators*

$$W_e = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}. \quad (3.98)$$

Praktisch wird die mit der Ladungstrennung verbundene Energie im Allgemeinen nicht mechanisch über eine Ladungsbewegung entgegen den Feldkräften im Feldraum zugeführt, sondern elektrisch über eine außen angeschlossene Spannungsquelle.

Insbesondere bei inhomogenen Feldern interessiert neben der gesamten über die Spannung U und die Ladung Q beschriebenen Energie in einem Feldraum noch deren *räumliche Verteilung*. Um diese zu beschreiben, ist die auf das Volumen bezogene Energie, die Energiedichte, als eine weitere Größe definiert, die aus den Feldvektoren berechnet werden kann, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Das in Bild 3.42 dargestellte Feld des Plattenkondensators kann unter Vernachlässigung der Randverzerrung als homogen aufgefasst werden. Dann lassen sich in Gl. (3.98) die Ladung Q bzw. die Spannung U entsprechend Gl. (3.88) bzw. Gl. (3.89) ersetzen und man bekommt die Energie

$$W_e = \frac{DEAa}{2} = \frac{DEV}{2} \quad (3.99)$$

des Feldraumes V eines Kondensators. Bezieht man diese auf das Volumen $V = A a$, ergibt sich die *Energiedichte des elektrischen Feldes*

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{DE}{2} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}. \quad (3.100)$$

In Gl. (3.100) ist das algebraische Produkt der Beträge DE durch das Skalarprodukt $\vec{D} \cdot \vec{E}$ ersetzt. Beide Schreibweisen sind gleichberechtigt, sofern die Vektoren der elektrischen Feldstärke \vec{E} parallel zu den Vektoren der elektrischen Flussdichte \vec{D} liegen ($\vec{D} \cdot \vec{E} = DE \cos 0 = DE$). Dies ist in elektrisch isotropen Materialien stets der Fall.

Den Feldraum inhomogener Felder kann man sich analog den Erläuterungen für das Strömungsfeld in Bild 3.26 in infinitesimal kleine Volumenelemente $dV = dl dA$ unterteilt vorstellen, in denen das Feld homogen angenommen werden kann. Liegen die Längen dl dieser würfelförmigen Volumenelemente parallel zu den \vec{E} -Feldlinien, stellen die Flächen dA Äquipotenzialflächen dar (Bild 3.43).

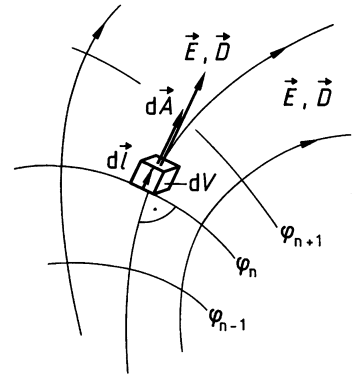


Bild 3.43: Zur Berechnung der Energie im inhomogenen elektrischen Feld

Damit kann man sich diese Würfel als Kondensatoren vorstellen mit der Ladung $dQ = D dA$ und der Spannung $dU = E dl$. Werden auf diese Teilkondensatoren die obigen Erläuterungen übertragen, gilt Gl. (3.100) entsprechend und man bekommt den allgemeinen Ausdruck für die in beliebigen elektrischen Feldern gespeicherte Energiedichte

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} = \frac{\vec{D}^2}{2\varepsilon}. \quad (3.101)$$

In Gl. (3.101) sind die Größen \vec{D} bzw. \vec{E} jeweils entsprechend Gl. (3.28) ersetzt. Integriert man diese Energiedichte über ein Feldvolumen V , so erhält man die in diesem Volumen gespeicherte *elektrische Feldenergie*

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV. \quad (3.102)$$

Beispiel 3.12: Blitzkondensator

Kurzzeitig fließende große Ströme, wie sie beispielsweise beim Impulselektroschweißen oder in Blitzröhren auftreten, können durch Kondensatorentladungen erreicht werden.

Auf welche Spannung muss ein Kondensator der Kapazität $C = 2000 \mu\text{F}$ aufgeladen werden, damit bei seiner Entladung die elektrische Energie $W_e = 20 \text{ kWs}$ umgeformt werden kann? Welcher mittlere Strom I_{mi} fließt, wenn die Entladung in der Zeit $t = 10 \text{ ms}$ erfolgt?

Soll die elektrische Energie durch die vollständige Entladung des Kondensators auf $U_e = 0$ entnommen werden, ist entsprechend Gl. (3.98) die zu Beginn der Entladung erforderliche Kondensatorspannung $U_a = \sqrt{2 W_e / C} = \sqrt{2 \cdot 20 \text{ kWs} / (2000 \mu\text{F})} \approx 4,5 \text{ kV}$.

Die bei dieser Spannung vom Kondensator gespeicherte Ladung ist $Q = C U = 2000 \mu\text{F} \cdot 4,5 \text{ kV} = 9 \text{ As}$, die in der Zeit $t = 10 \text{ ms}$ durch den mittleren Strom $I_{\text{mi}} = Q/t = 9 \text{ As} / (10 \text{ ms}) = 900 \text{ A}$ ausgeglichen wird.

3.3.6.2 Verlustleistung im elektrischen Feld

Da alle praktisch eingesetzten Isolierstoffe einen endlichen Widerstand R haben, fließt im Dielektrikum zwischen den an die Spannung U angeschlossenen Elektroden auch ein Leitungsstrom I_R . Dieser verursacht eine in Wärme umgewandelte Verlustleistung $P_R = U I_R$, die besonders bei schlechteren Isolatoren eine deutliche Erwärmung des Isolierstoffs zur Folge hat.

Weiter fließt über die *Oberfläche* von Isolatoren ein Strom I_F , der besonders bei verschmutzter und feuchter Oberfläche merkliche Werte annehmen kann. Die Verlustleistung in einem solchen *Oberflächenwiderstand* R_F ist $P_F = I_F^2 R_F = I_F U$, wenn U die am Oberflächenwiderstand liegende Spannung ist.

Eine dritte Art von Verlusten tritt im Dielektrikum eines Kondensators auf, wenn dieser an einer *Wechselspannung* betrieben wird. Die Wechselspannung erzwingt eine fortwährende Umladung, d. h. Umpolung der Elektroden des Kondensators, wodurch sich die Orientierung der elektrischen Feldstärke im Dielektrikum fortwährend umkehrt. Damit kehren sich auch die Orientierungen der Kräfte auf die Ladungsträger des Dielektrikums und der dadurch hervorgerufenen molekularen Verzerrungszustände um. Die dabei in Wärme umgeformte Leistung bezeichnet man als *dielektrische Verluste* P_d . Ihr Betrag ist abhängig von der Frequenz f , mit der die Umladung des Kondensators erfolgt, der Kapazität C des Kondensators, der angelegten Spannung U und dem vom Material des Dielektrikums abhängigen *dielektrischen Verlustfaktor* d .

Der Verlustfaktor d selbst ist auch von der Frequenz f der Umpolarisierung und der Temperatur abhängig. Er ist in Tabelle 3.3 für einige Isolierstoffe angegeben.

Wird ein verlustbehafteter Kondensator an eine Sinusspannung U gelegt, stellt sich ein Sinusstrom I ein, der gegenüber dieser Spannung um den Winkel φ nahe $\pi/2$ phasenverschoben ist (Bild 6.9b). In diesem Fall entsteht im Kondensator die *dielektrische Verlustleistung*

$$P_d = 2\pi f C U^2 d. \quad (3.103)$$

Durch dielektrische Verluste können sich Isolierstoffe besonders bei großen Feldstärken und/oder Frequenzen merklich erwärmen, was zwar im Allgemeinen unerwünscht ist, in der Elektrowärmetechnik (z. B. bei Mikrowellenherden) und in der Medizin (Kurzwellenbestrahlung) aber auch genutzt wird.

Tabelle 3.3: Anhaltswerte für den dielektrischen Verlustfaktor d von Isolierstoffen bei 20 °C

Isolierstoff	bei 50 Hz	bei 1 kHz	bei 1 MHz
Glimmer	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$
Hartpapier	$4 \cdot 10^{-3}$ bis $6 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$ bis 0,1	$20 \cdot 10^{-3}$ bis $50 \cdot 10^{-3}$
Papier, imprägniert	$5 \cdot 10^{-3}$ bis $10 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$ bis $10 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$ bis $60 \cdot 10^{-3}$
Polystyrol	–	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$ bis $2 \cdot 10^{-3}$
Polyvinylchlorid (PVC), hart	$20 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$ bis $20 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$
Polyvinylchlorid, weich	0,1 bis 0,15	0,1 bis 0,15	0,1
Polyethylen	$0,1 \cdot 10^{-3}$ bis $0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$ bis $0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$ bis $1 \cdot 10^{-3}$
Porzellan	$17 \cdot 10^{-3}$ bis $25 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$ bis $20 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$ bis $12 \cdot 10^{-3}$
Quarz	–	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$

3.3.6.3 Kräfte auf Grenzflächen im elektrischen Feld

Neben den Coulomb-Kräften, die entsprechend Gl. (3.22) direkt auf die elektrischen Ladungen wirken und über diese berechnet werden können, sind im elektrischen Feld auch Kraftwirkungen an *Grenzflächen zwischen Bereichen unterschiedlicher Permittivität* zu beobachten. Diese Kräfte lassen sich unmittelbar aus den Wechselwirkungen zwischen elektrischen Ladungen bzw. zwischen Feldern und Ladungen nur erklären, wenn man die *elektrische Polarisierung* der Dielektrika, also die mikrokosmischen Elementarladungen, in die Betrachtung einbezieht, wodurch die quantitative Bestimmung der Kräfte jedoch äußerst kompliziert wird.

Einfacher ist die Berechnung der Kräfte aus dem *Energieerhaltungssatz*. Man betrachtet dazu eine gedachte, infinitesimal kleine (virtuelle) Verschiebung $d\vec{l}$ einer Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika der Permittivitäten ϵ_1 bzw. ϵ_2 (Bild 3.44).

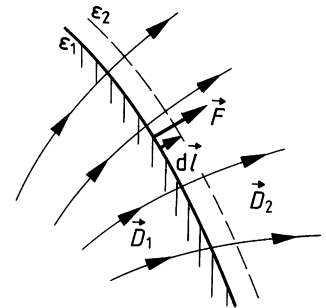


Bild 3.44: Virtuelle Verschiebung einer Grenzfläche zwischen unterschiedlichen Dielektrika um $d\vec{l}$

Erfolgt diese Verschiebung in einem *abgeschlossenen System* (dem System wird von außen keine Energie zugeführt oder entzogen), ändert sich dabei der Energieinhalt des Systems nicht. Nimmt man eine auf die Grenzfläche in Richtung der Verschiebung $d\vec{l}$ wirkende Kraft \vec{F} an, folgt daraus bei der Verschiebung eine mechanische Energie $dW_{\text{mech}} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Um einen gleich großen Betrag $dW_e = dW_{\text{mech}}$ muss sich bei der Verschiebung die elektrische Feldenergie W_e des Feldraumes ändern, wenn keine weiteren Energiebeiträge, wie z. B. Verluste oder Ladungsänderungen, in der für die Verschiebung aufzustellende Energiebilanz zu berücksichtigen sind.

Durch Gleichsetzen der Beträge von mechanischer Energie und Feldenergie

$$W_{\text{mech}} = F dl = dW_e \quad (3.104)$$

bekommt man die in der angenommenen Verschiebungslinie wirksame Kraft (\vec{F} parallel zu $d\vec{l}$)

$$F = \frac{dW_e}{dl}. \quad (3.105)$$

Die Wirkungsrichtung der Kraftwirkung kann bei abgeschlossenen Systemen anschaulich aus der Energiebilanz abgeleitet werden.

Wird z. B. ein *Plattenkondensator* nach Bild 3.42 auf die Ladung $\pm Q$ aufgeladen und klemmt man dann die Spannungsquelle ab, bleibt bei einer angenommenen Verringerung des Plattenabstandes (Verschiebung der Grenzfläche zwischen Elektrode und Dielektrikum) um da die Ladung Q auf den Platten konstant. Dagegen wird die im Kondensator gespeicherte Feldenergie $W_e = Q^2/(2C)$ gemäß Gl. (3.98) *kleiner*, da durch die Verschiebung der Platten die Kapazität $C = \varepsilon A_{\text{Pl}}/a$ infolge des um da verringerten Abstandes größer wird. Der Verkleinerung der Feldenergie dW_e muss eine mechanische Energie $dW_{\text{mech}} = F dl$ entsprechen, der nach Gl. (3.105) die Kraft

$$F = \frac{dW_e}{dl} = \frac{d}{da} \cdot \frac{Q^2 a}{2 \varepsilon A_{\text{Pl}}} = \frac{Q^2}{2 \varepsilon A_{\text{Pl}}} \quad (3.106)$$

entspricht. Diese Kraft wirkt in Richtung der Verkleinerung des Plattenabstandes, da dabei die Feldenergie verkleinert, d. h. in mechanische Energie $F dl$ umgeformt wird. *Die Platten ziehen sich also an*, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

In nicht abgeschlossenen Systemen ist die Bestimmung der Kraft aus der Energiebilanz nicht mehr so einfach möglich, wie im vorstehenden Beispiel gezeigt ist. Wird beispielsweise bei einem an eine konstante Spannung angeschlossenen Kondensator eine virtuelle Verringerung da des Plattenabstandes angenommen, erhöht sich dabei die gespeicherte Feldenergie $W_e = U^2 C/2$ entsprechend der Vergrößerung der Kapazität C . Trotzdem wirkt auch hier die Kraft in Richtung der Verkleinerung des Plattenabstandes. In diesem Fall werden die bei der Plattenverschiebung auftretende mechanische Energie und die Vergrößerung der im Kondensator gespeicherten Feldenergie als elektrische Energie aus der Spannungsquelle zugeführt, an die der Kondensator angeschlossen ist.

Allgemeingültige Regeln zur Bestimmung der Kraftwirkung im elektrischen Feld sind der weiterführenden Literatur, z. B. [Fro94] zu entnehmen.



4 Magnetisches Feld

Das *magnetische Feld* wird als ein physikalischer Raumzustand betrachtet, der von relativ zum Beobachter *bewegten* elektrischen Ladungen verursacht wird und seinerseits *Kraftwirkungen* auf *bewegte elektrische* Ladungen ausübt. *Das magnetische Feld ist hinsichtlich seines physikalischen Wesens nicht erklärbar*. Seine Wirkungen oberhalb der atomaren Ebene lassen sich aber mit den in diesem Kapitel behandelten Gesetzmäßigkeiten, die auf den Maxwell'schen Gleichungen beruhen, hinreichend genau beschreiben.

4.1 Beschreibung und Berechnung des magnetischen Feldes

Trotz der Vielfalt der verwendeten technischen Werkstoffe genügt es, diese für Berechnungen hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften in nur zwei Gruppen einzuteilen:

- *Magnetisch neutrale Stoffe* wie Luft, Wasser, Nichteisenmetalle, Kunststoffe usw. dürfen bei der Berechnung magnetischer Felder meist wie Vakuum behandelt werden.
- *Ferromagnetische Stoffe* (Ferromagnetika) zeigen hingegen ein *verstärkendes*, aber *nicht-lineares Magnetisierungsverhalten*. Wegen der herausragenden praktischen Bedeutung der ferromagnetischen Werkstoffe werden ihre magnetischen Eigenschaften ausführlich in Abschnitt 4.2 behandelt.

4.1.1 Wesen und Darstellung des magnetischen Feldes

4.1.1.1 Wirkungen und Ursachen des magnetischen Feldes

Das magnetische Feld äußert sich ähnlich wie das Gravitationsfeld oder das elektrische Feld durch *Kraftwirkungen*. Besonders auffällig sind diese an Eisenteilen in der Nähe von Dauermagneten oder stromdurchflossenen Leitern. Diese direkt zu beobachtenden *äußeren Kräfte* werden in Abschnitt 4.3.2 erläutert. Daneben kann das magnetische Feld auch *Kräfte im Inneren elektrischer Leiter* bewirken. Diese nicht direkt als mechanische Kräfte messbaren Wirkungen verursachen *Ladungstrennungen*, die als *elektrische Spannungen* in Erscheinung treten. Üblicherweise werden sie als *Induktionsvorgang* beschrieben. Das magnetische Feld kann also elektrische Spannungen erzeugen. Diese Induktionswirkungen werden in Abschnitt 4.3.1 behandelt.

Alle beschriebenen Wirkungen können sowohl in der Umgebung elektrischer Ströme als auch in der von Dauermagneten beobachtet werden. Man nimmt die *Bewegung elektrischer Ladungen als die Ursache magnetischer Erscheinungen* an. In *Dauermagneten* handelt es sich um die *Eigenbewegung von Ladungsträgern* im atomaren Verband, bei fließenden Strömen um die *makroskopisch messbare Bewegung freier Ladungsträger* (z. B. freier Elektronen im metallischen Leiter).

4.1.1.2 Feldbilder und Feldlinien

Da das magnetische Feld sich durch Kraftwirkungen äußert, muss es wie diese *Richtungscharakter* haben, d. h. es muss für jeden Punkt des Raumes (Feldpunkt) nicht nur eine bestimmte *Intensität*, sondern auch eine bestimmte *Richtung* haben. Daher muss das magnetische Feld mit Hilfe von Vektoren, d. h. als *Vektorfeld*, beschrieben werden.

Den Richtungscharakter kann man experimentell sehr anschaulich darstellen, indem man kleine längliche Eisenteilchen (etwa in Form von Eisenfeilspänen oder kleinen Magnetnadeln) in ein Magnetfeld, z. B. in die Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters, bringt.

Die Eisenteilchen drehen sich durch die auf sie wirkenden mechanischen Kräfte in die Wirkungsrichtung des magnetischen Feldes, wie Bild 4.1 zeigt, in dem auf ein Kartonblatt gestreute Eisenfeilspäne in der Umgebung einfacher Leiteranordnungen dargestellt sind. In Bild 4.1a tritt der Leiter in der Mitte senkrecht durch das Kartonblatt. Bild 4.1b zeigt ein Kartonblatt, welches durch den Durchmesser eines stromdurchflossenen Drahrings senkrecht zur Ringebene gelegt ist.

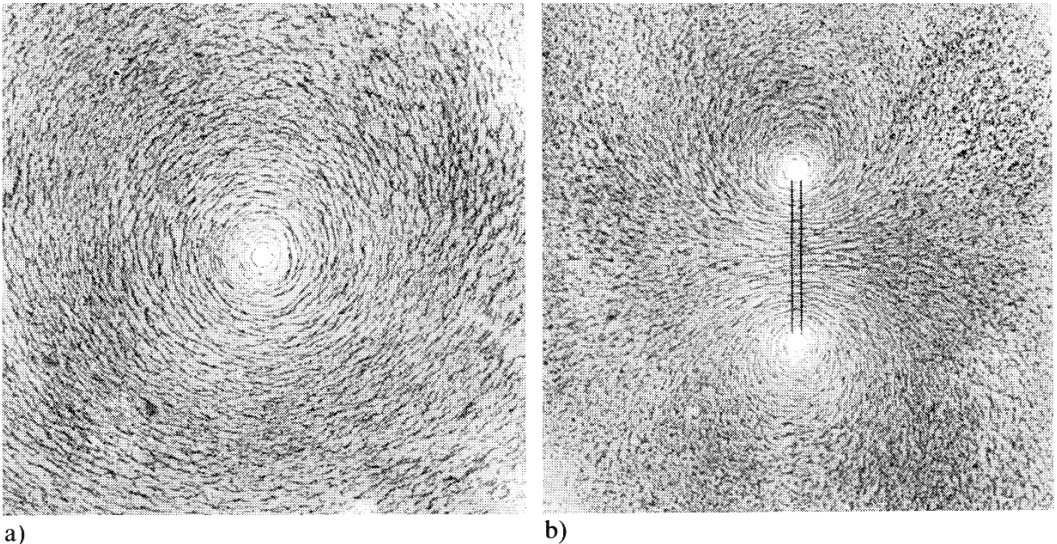


Bild 4.1: Mit Hilfe von Eisenfeilspänen dargestelltes magnetisches Feld eines stromdurchflossenen geraden Leiters (a) und einer stromdurchflossenen Windung (b)

Ähnlich anschaulich wie die experimentell aufgenommenen Bilder mit Eisenfeilspänen sind die aus Überlegungen und Rechnungen gewonnenen *Feldlinienbilder*, wie sie z. B. in den Bildern 4.2 bis 4.4 wiedergegeben sind. Solche Feldlinienbilder dienen nur zur Veranschaulichung magnetischer Felder, die eigentlich kontinuierlich den Raum durchsetzen. *Feldlinien haben also keinerlei körperliche Existenz.*

Für die Felder des geraden Leiters und der Windung nach Bild 4.1 sind die zugehörigen Feldlinienbilder in Bild 4.2 wiedergegeben. Darin bedeuten die mit *Kreuz* bzw. *Punkt* bezeichneten kleinen Kreise die Querschnitte der Leiter mit den *Zählpfeilen* für die in die Bildebene *hinein*- bzw. *herausfließenden* Ströme, die beide positiv angenommen sind.

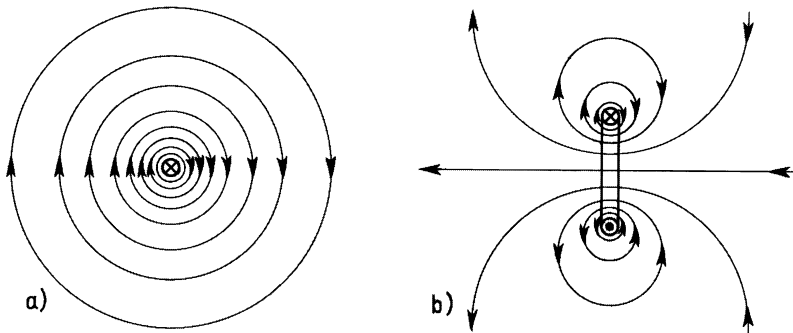


Bild 4.2: Feldlinienbilder eines stromdurchflossenen geraden Leiters (a) und einer stromdurchflossenen Windung (b), jeweils senkrecht zum Leiter bzw. zur Windungsebene

In den Feldlinienbildern 4.3 und 4.4 sind die Felder von Spulen mit 3 bzw. vielen *Windungen* dargestellt.

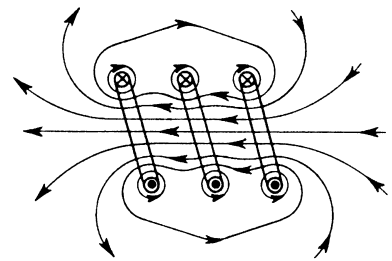


Bild 4.3: Feldlinienbild einer Spule mit drei stromdurchflossenen Windungen

4.1.1.3 Feldrichtung und Polarität

Die in allen Feldbildern zu erkennende *rechtswendige* Umschlingung der elektrischen Strömung durch magnetische Feldlinien wird durch die für magnetische Felder allgemeingültige *Rechtsschrauben-* oder *Korkenzieherregel* beschrieben:

Denkt man sich eine *Rechtsschraube* in der *technischen Stromrichtung* geschraubt, so stimmt die Drehrichtung ihrer Längsachse mit der Richtung des magnetischen Feldes überein. Oder umgekehrt: Beim Schrauben in *Feldrichtung* entspricht die Drehrichtung der *Stromrichtung* in der felderzeugenden Spule.

Zur Kennzeichnung der Richtung eines Feldes, das von Ladungsbewegungen auf atomarer Ebene (also z. B. in Dauermagneten) verursacht wird, bezeichnet man die *Austrittsfläche* der Feldlinien als *Nordpol* und die *Eintrittsfläche* als *Südpol* (Bild 4.4). Diese Bezeichnungen sind ursprünglich über die *Kompassnadel* (kleiner Naturmagnet) aus den Bezeichnungen der geografischen Pole der Erde abgeleitet. Da sich ungleichnamige Magnetpole anziehen, ist der *geografische Nordpol*, auf den der Nordpol einer Kompassnadel weist, der *magnetische Südpol* der Erde und umgekehrt.

Auch bei stromdurchflossenen Spulen, die die gleichen magnetischen Wirkungen wie Dauermagnete zeigen, werden die Aus- bzw. Eintrittsflächen der magnetischen Feldlinien manchmal als Nord- bzw. Südpol bezeichnet (Bild 4.4).

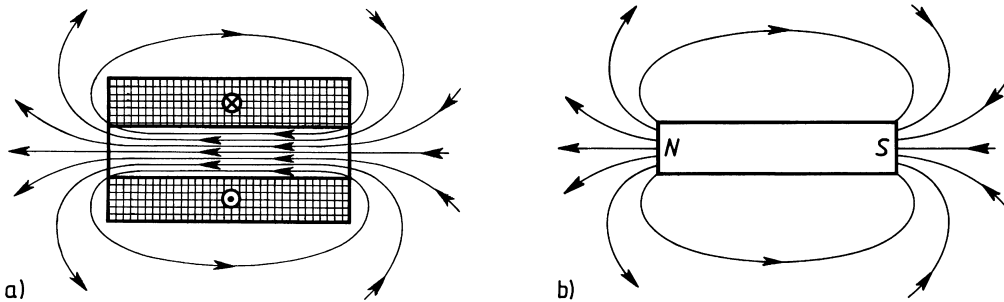


Bild 4.4: Feldlinienbild einer langen zylindrischen Spule mit eng aneinanderliegenden Windungen (a) und eines geometrisch vergleichbaren Dauermagneten (b)

4.1.2 Vektorielle Feldgrößen des magnetischen Feldes

Die in Abschnitt 4.1.1.2 und 4.1.1.3 erläuterten Feldbilder vermitteln einen *qualitativen* Eindruck davon, wie sich das magnetische Feld in Richtung und Intensität über den Raum verteilt. *Quantitativ* wird dies mit Hilfe von *Feldvektoren* beschrieben, die für die einzelnen Feldpunkte definiert sind und als Funktion der Raumkoordinaten (*Ortsfunktion*) angegeben werden können.

4.1.2.1 Magnetische Flussdichte

Das magnetische Feld hat in jedem Punkt des Raumes eine bestimmte *Richtung* und eine bestimmte *Intensität*¹, die beide durch einen diesem Punkt zugeordneten Feldvektor vollständig beschrieben werden können.

Die Ortsabhängigkeit der *Feldrichtung* folgt bereits aus Bild 4.1, das darüber hinaus auch einen Eindruck von der Ortsabhängigkeit der *Intensität* des Feldes vermittelt. Die Orientierung der Eisenfeilspäne in der Nähe des stromdurchflossenen Leiters ist sehr deutlich, mit zunehmender Entfernung von diesem aber immer weniger ausgeprägt. Mit kleiner werdender Feldintensität werden die Späne in immer geringerem Maße gegen ihre Reibung auf dem Kartonblatt in die Feldrichtung gedreht.

Analog zu den Erläuterungen in Abschnitt 3.2.1 wird in den Feldlinienbildern 4.2 bis 4.4 die Ortsabhängigkeit der Feldintensität dadurch zum Ausdruck gebracht, dass der Abstand zwischen den einzelnen Feldlinien jeweils umgekehrt proportional der Stärke des Feldes (Betrag des Feldvektors) in diesem Gebiet gewählt ist.

Die *Dichte der Feldlinien ist also ein Maß für die Intensität* des Feldes. Da man beliebig viele Feldlinien zeichnen kann, ist zu beachten, dass der Abstand kein absoluter, sondern *nur ein relativer Maßstab* ist.

Die mathematisch exakte Beschreibung der Feldintensität nach Betrag und Richtung erfolgt durch einen Vektor, der als *magnetische Flussdichte* bezeichnet und mit dem Symbol \vec{B} dargestellt wird. Diese Definition wird im Folgenden anhand des Bildes 4.5 erläutert.

¹Hier wird absichtlich das naheliegende Wort „Stärke“ vermieden, da man unter der „Feldstärke“ nach der historischen Bezeichnung etwas anderes als die hier zunächst für die Wirkung des Feldes maßgebende Intensitätsgröße versteht.

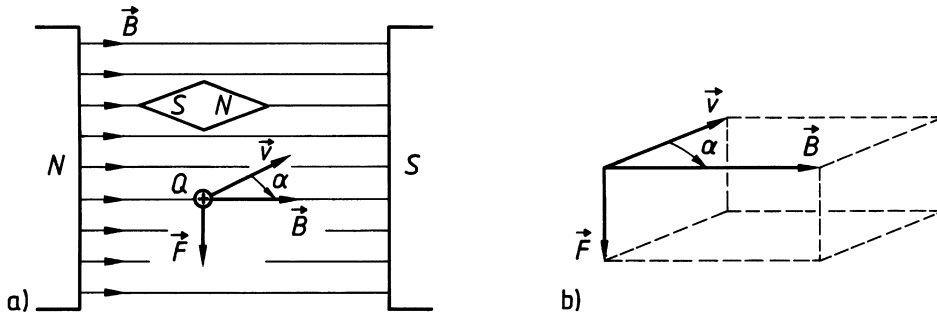


Bild 4.5: Richtungsdefinition der magnetischen Flussdichte \vec{B}

Aus historischen Gründen wurde die *Richtung der Flussdichte \vec{B}* so festgelegt, dass sie in *Längsrichtung* eines frei beweglich im Feld angeordneten magnetischen Dipols (z. B. einer Kompassnadel) *von dessen Süd- zum Nordpol weist* (Bild 4.5a). Der Betrag der magnetischen Flussdichte wurde aus dem *Drehmoment* abgeleitet, mit dem sich der magnetische Dipol in die Feldrichtung einstellt.

Heute wird die magnetische Flussdichte unter Beibehaltung der ursprünglichen Richtungsfestlegung aus der *Kraftwirkung \vec{F}* auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld bewegte elektrische Ladung Q definiert, wie ebenfalls in Bild 4.5 dargestellt ist.

Hat die mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung Q eine sehr kleine räumliche Ausdehnung (*Punktladung*), so lassen sich für jeden Feldpunkt folgende Feststellungen treffen:

- Die auf die Ladung Q wirkende *Kraft \vec{F}* steht immer *rechtwinklig* auf der Ebene, die durch die Vektoren der Ladungsgeschwindigkeit \vec{v} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} festgelegt ist.
- Die *Richtung* der Kraft \vec{F} auf eine positive Ladung Q weist in die Richtung der Axialbewegung einer Rechtsschraube (Korkenzieher), die man sich so gedreht vorstellt, dass der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} *auf kürzestem Weg* in die Richtung des Flussdichtevektors \vec{B} überführt wird.
- Der *Betrag* der Kraft \vec{F} ist vom Betrag der Ladung Q , von den Beträgen der Flussdichte \vec{B} und der Geschwindigkeit \vec{v} und dem Sinus des von diesen beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels α abhängig:

$$F = Q v B \sin \alpha \quad (4.1)$$

Die in a) bis c) beschriebenen experimentellen Beobachtungen bzw. Festlegungen lassen sich mathematisch mit Hilfe des *Vektorproduktes*

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.2)$$

zusammenfassen. Diese im Magnetfeld auf *bewegte Ladungen ausgeübte Kraft* wird als *Lorentz-Kraft* bezeichnet – zur Unterscheidung von der vom elektrischen Feld ausgeübten *Coulomb-Kraft*, die auch auf ruhende Ladungen wirkt (Abschnitt 3.1.2.2).

Beispiel 4.1: Hall-Sensor

Ein häufig verwendeter Sensor zur Messung der magnetischen Flussdichte \vec{B} ist der *Hall-Sensor*. Er besteht gemäß Bild 4.6a aus einem homogenen, isotropen Halbleiterplättchen der Dicke d und der Breite b , das von einem Steuerstrom I durchflossen wird. Quer zur Richtung des *Steuerstroms* I kann über zwei schmale Anschlüsse die *Hall-Spannung* U_H abgegriffen werden.

Es soll gezeigt werden, dass das Messprinzip des Hall-Sensors direkt durch die Definitionsgleichung (4.2) für die magnetische Flussdichte \vec{B} beschrieben werden kann.

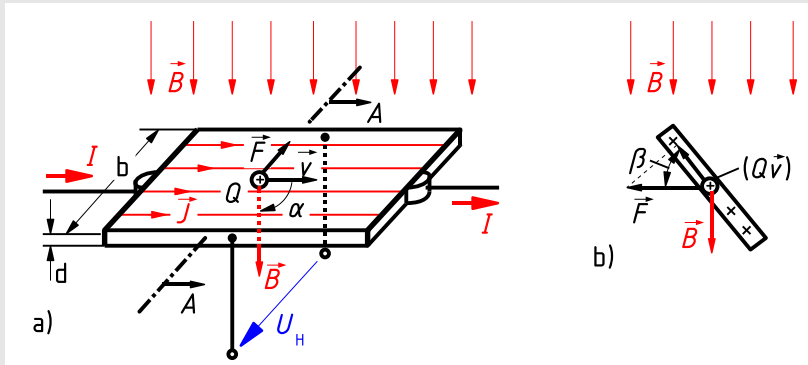


Bild 4.6: Funktionsprinzip des Hall-Sensors am Beispiel eines p-Halbleiters
 a) perspektivische Darstellung des Halbleiterplättchens
 b) Querschnitt A – A

Ohne Einwirkung eines Magnetfeldes verteilt sich der Strom I homogen über den Querschnitt $b \cdot d$ des Halbleiters, sodass sich eine Stromdichte $J = I/(bd)$ einstellt, der nach Gl. (3.34) die Driftgeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{J}/(ne)$ der Ladungsträger in Längsrichtung des Halbleiters entspricht.

Wird der Hall-Sensor in ein Magnetfeld gebracht, das eine senkrecht zur Plättchenfläche stehende *Komponente* hat, wirken auf die strömenden Ladungen Kräfte \vec{F} nach Gl. (4.2), die die Ladungen Q senkrecht zu ihrer Geschwindigkeit \vec{v} an den Rand des Halbleiters drängen. Dadurch stellt sich senkrecht zur Längsrichtung ein *Ladungsunterschied* ein, dem eine Hall-Spannung U_H entspricht, die gemessen werden kann. Bei konstantem Steuerstrom I , also konstanter Ladungsgeschwindigkeit $v = I/(bdne)$, ist sie ein Maß für die zur Plättchenoberfläche senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} .

Nach Gl. (4.2) ist die Kraft und damit die Hall-Spannung U_H nicht nur vom *Betrag* der magnetischen Flussdichte B , sondern auch von deren *Richtung* relativ zur Geschwindigkeitsrichtung der Ladungsträger abhängig.

Ordnet man den Hall-Sensor so an, dass seine Längsachse und damit die Ladungsgeschwindigkeit \vec{v} parallel zur Flussdichte \vec{B} liegt ($\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$), so ist nach Gl. (4.2) die Kraft auf die Ladungen $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) = QvB \sin \alpha = 0$ und damit auch die Hall-Spannung U_H null.

Liegt der Hall-Sensor mit seiner Längsachse *senkrecht zur magnetischen Flussdichte* ($\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = 3\pi/2$), so steht die Kraft $\vec{F}^i = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ mit maximalem Betrag $|Q|vB$ senkrecht auf der Ebene, die durch die Ladungsgeschwindigkeit \vec{v} in Längsachse des Halbleiters und die Flussdichte \vec{B} bestimmt ist (Bild 4.6b). Die Kraft \vec{F}^i liegt nur dann auch in der Halbleiterebene, wenn dieser mit seiner Breite b senkrecht zur Feldrichtung steht.

Bei beliebigem Winkel β zwischen der Querachse des Halbleiters und der Flussdichte \vec{B} nach Bild 4.6b bewirkt nur die *Komponente* $F \cos \beta$, die in der Halbleiterebene liegt, die Ladungstrennung quer zur Längsachse und damit die Hall-Spannung U_H über die Breite b des Halbleiters.

Soll die magnetische Flussdichte \vec{B} an einem beliebigen Ort bestimmt werden, so wird der Hall-Sensor an diesen Ort gebracht, um Längs- und Querachse gedreht so eingestellt, dass sich die maximale Hall-Spannung U_H ergibt. Damit ist die Wirkungslinie der Flussdichte \vec{B} nach Gl. (4.2) senkrecht zur Fläche des Hall-Sensors festgestellt ($\alpha = \beta = \pi/2$ oder $3\pi/2$). Die Richtung und der Betrag der Flussdichte können nach den Erläuterungen in Abschnitt 4.3.1.1 aus Vorzeichen und Betrag der Hall-Spannung U_H bestimmt werden.

Besteht der Steuerstrom aus negativen Ladungsträgern, so werden diese in die gleiche Richtung abgelenkt wie die bislang betrachteten positiven Ladungsträger, wodurch sich das Vorzeichen der Hall-Spannung umkehrt.

4.1.2.2 Elektrische Durchflutung

Zur Ableitung der wesentlichen weiteren Größen des magnetischen Feldes werden zunächst nur Felder betrachtet, bei denen im gesamten Feldraum der *Betrag* der magnetischen Flussdichte näherungsweise konstant, das B -Feld also homogen ist. Solche Felder treten z.B. in *Toroid- oder Ringspulen* nach Bild 4.7 mit konstantem innerem Spulenquerschnitt A_q auf, wenn der Durchmesser d_q des Spulenquerschnitts sehr klein gegenüber dem Durchmesser d_R der Spule ist.

Bei den in Bild 4.7 dargestellten Spulen sollen diese Bedingungen so gut erfüllt sein, dass das B -Feld innerhalb jeder Spule als näherungsweise homogen angenommen werden kann.

Um die Abhängigkeit des magnetischen Feldes von Strom, Windungszahl und geometrischen Abmessungen zu zeigen, werden die in Bild 4.7 dargestellten drei Ringspulen betrachtet, die sich in Windungszahl und Abmessungen unterscheiden.

Experimentell lässt sich feststellen, dass der Betrag der magnetischen Flussdichte B im Inneren einer Ringspule proportional dem Produkt aus Spulenstrom I und Windungszahl N und umgekehrt proportional der Spulenlänge $l = \pi d_R$ ist:

$$B \sim \frac{NI}{l} \quad (4.3)$$

Bei gleichem Spulenstrom I erhält man z.B. mit den in Bild 4.7 gewählten Werten für die Spule in Teilbild b eine halb so große, in Teilbild c eine gleich große magnetische Flussdichte wie in Teilbild a, was durch die unterschiedliche Zahl von 6 bzw. 3 eingezeichneten Feldlinien angedeutet ist.

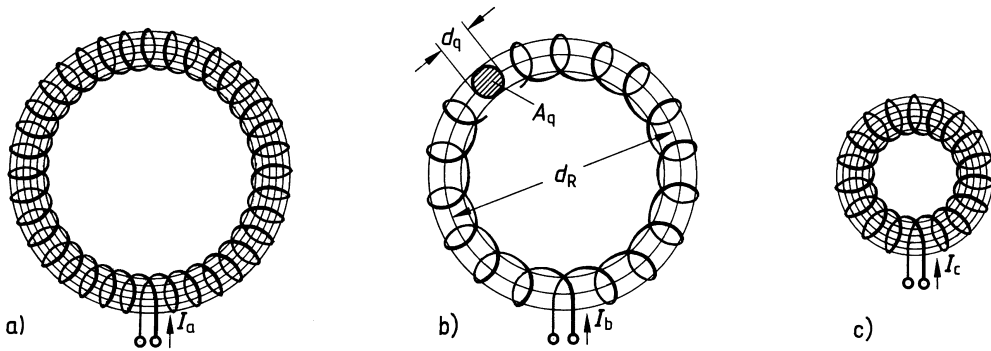


Bild 4.7: Ringspulen mit gleichem Spulenquerschnitt A_q , aber unterschiedlichem Ringdurchmesser d_R und Windungszahl N
 a) und b) gleicher Durchmesser d_R der Ringspule,
 c) halb so großer Durchmesser der Ringspule wie bei a),
 b) und c) halbe Windungszahl von a),
 a) und c) gleich große magnetische Flussdichte, doppelt so groß wie bei b) bei gleich großen Strömen $I_a = I_b = I_c$

Weiter wird der Zusammenhang zwischen Strom (Ursache) und magnetischer Flussdichte (Wirkung) durch den Werkstoff im Feldraum beeinflusst. Die Erfahrung zeigt, dass insbesondere Eisen bei sonst gleichen Verhältnissen eine extrem verstärkende Wirkung auf Magnetfelder ausübt, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wird. Diese das Magnetfeld verstärkenden (bei wenigen Materialien auch vermindernden) Wirkungen werden in der Elektrotechnik über einen Faktor berücksichtigt, der als *Permeabilität* μ bezeichnet wird. Damit kann die Proportion in Gl. (4.3) überführt werden in die Gleichung

$$B = \mu \frac{NI}{l}. \quad (4.4)$$

Wesentlich ist die Erkenntnis, dass für die Erzeugung eines Magnetfeldes das Produkt NI aus Windungszahl und Strom maßgebend ist, dass also mit kleinen Strömen und großen Windungszahlen gleiche Wirkungen erzielt werden wie mit großen Strömen und kleinen Windungszahlen. Man hat daher für dieses Produkt, das die Stromsumme angibt, die vom Feld umschlungen wird, die *elektrische Durchflutung*

$$\Theta = NI \quad (4.5)$$

als eigene Größe definiert. Sie hat offensichtlich die Einheit Ampere (früher war die Einheit Amperewindungen üblich). Durch Variieren von Strom I und Windungszahl N lassen sich Spulen an bestimmte Betriebsspannungen anpassen.

Nicht immer stellt sich die elektrische Durchflutung in einer so konzentrierten und leicht erfassbaren Art dar wie bei den hier betrachteten Ringspulen. Zum Beispiel können Leiteranordnungen mit verschiedenen Strömen oder inhomogene Strömungsfelder (Abschnitt 3.2.2) auftreten. Man muss daher unabhängig von der Art und der räumlichen Verteilung der elektrischen Strömung die elektrische Durchflutung Θ in einer Fläche A als Summe aller durch diese Fläche

fließenden Ströme I bzw. als das Integral der Stromdichte \vec{J} über diese Fläche A berechnen:

$$\Theta = \sum I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (4.6)$$

Die elektrische Durchflutung Θ ist wie der Strom I eine skalare Größe mit Richtungscharakter, also eine Zählpfeilgröße. Der Zählpfeil für die Durchflutung Θ durch eine Fläche A ist in Richtung der Flächenvektoren $d\vec{A}$ in Gl. (4.6) weisend einzutragen. Konzentrierte Ströme, deren Zählpfeile in Richtung der $d\vec{A}$ weisen, werden positiv gezählt, bei umgekehrter Richtung negativ. Beispielsweise ist die elektrische Durchflutung in der von den Strömen I_1 bis I_4 durchflossenen Fläche A in Bild 4.9 $\Theta = I_1 - I_2 + I_3 - I_4$.

4.1.2.3 Magnetische Feldstärke

In dem Ingenieurwissenschaften ist es üblich, den in Gl. (4.4) hinter der Permeabilität μ stehenden Ausdruck als die das Feld *ohne den Materialeinfluss* bestimmende Feldgröße aufzufassen und ihr einen eigenen Namen zu geben. Damit kann die magnetische Flussdichte als Produkt einer von den Werkstoffeinflüssen unabhängigen zweiten Feldgröße und einer nur vom Werkstoff im Feldraum abhängigen Größe dargestellt werden. Diese *die Ursache des magnetischen Feldes beschreibende Feldgröße* wird historisch bedingt als *magnetische Feldstärke* \vec{H} bezeichnet.

Im Fall einer Ringspule nach Bild 4.7 wird in jedem Feldpunkt im Inneren der Ringspule näherungsweise die magnetische Feldstärke mit dem Betrag

$$H = \frac{N |I|}{l} \quad (4.7)$$

erzeugt. Aus dieser kann mit der jedem Feldpunkt eigenen Permeabilität μ die magnetische Flussdichte mit dem Betrag

$$B = \mu H \quad (4.8)$$

berechnet werden. Gl. (4.7) gilt für die Ringspule nur dann, wenn in ihrem Inneren die Permeabilität μ örtlich konstant und richtungsunabhängig, ihr Material also magnetisch *magnetisch homogen und isotrop* ist.

Die magnetische Feldstärke \vec{H} ist wie die magnetische Flussdichte \vec{B} eine vektorielle Feldgröße. Der Vektorcharakter von \vec{H} wird auch deutlich, wenn man Gl. (4.7) in die allgemeinere Form

$$H l = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = N |I| \quad (4.9)$$

umschreibt und die linke Seite als das Integral des Skalarproduktes des Vektors \vec{H} und des ebenfalls gerichteten und daher als Vektor zu schreibenden Wegelements $d\vec{l}$ entlang der Spulenlänge l auffasst.

In den Beispielen des Bildes 4.7 konnte diese Vektoreigenschaft von \vec{H} und $d\vec{l}$ nur deshalb außer Acht gelassen werden, weil die die Spulenlänge l beschreibende Strecke an allen Stellen parallel zu den Feldlinien für \vec{B} und \vec{H} verläuft, sodass das Integral des Produktes der Vektoren $\vec{H} \cdot d\vec{l}$ auch als algebraisches Produkt $H l$ geschrieben werden kann. Fälle, in denen das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{H} \cdot d\vec{l}$ gebildet werden muss, sind in Abschnitt 4.1.3.1 erläutert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die magnetischen Eigenschaften eines Raumes durch zwei vektorielle Feldgrößen eindeutig und allgemeingültig beschrieben werden können, die über die *Permeabilität* μ gemäß

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.10)$$

miteinander verknüpft sind.

Bei magnetisch isotropen Stoffen ist die Permeabilität durch einen Skalar beschreibbar. Bei Stoffen mit richtungsabhängiger (anisotroper) Permeabilität (z. B. aufeinandergeschichteten gewalzten Eisenblechen) müsste μ mathematisch durch einen Tensor zweiter Stufe (der durch eine 3×3 -Matrix dargestellt wird) beschrieben werden, da die Richtungen von \vec{B} und \vec{H} nicht überall übereinstimmen. Dies wird in der Grundlagenausbildung in der Regel nicht berücksichtigt.

Die magnetische Feldstärke kann in *magnetisch homogenen, isotropen Räumen* allein aus der elektrischen Durchflutung und der Geometrie des Feldraumes berechnet werden. Daher wird \vec{H} als die *Ursachenfeldgröße des magnetischen Feldes* bezeichnet. Aus der Ursachenfeldgröße \vec{H} ergibt sich durch Multiplikation mit der von den Materialeigenschaften des Feldraumes abhängigen Permeabilität μ die magnetische Flussdichte \vec{B} , die die *Wirkung* des magnetischen Feldes beschreibt. Daher wird \vec{B} als die *Wirkungsfeldgröße des magnetischen Feldes* bezeichnet.

Nach der heute üblichen Betrachtungsweise ist der Name magnetische *Feldstärke* irreführend, da in ihm die *Wirkung* des Feldes, z. B. die Kraftwirkung, zum Ausdruck kommt. Diese wird aber, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird, durch die magnetische Flussdichte beschrieben. Es wäre also konsequent, analog zum elektrischen Feld, in dem die Wirkungsfeldgröße \vec{E} als elektrische Feldstärke bezeichnet wird, auch die Wirkungsfeldgröße \vec{B} des magnetischen Feldes magnetische Feldstärke zu nennen. Die Ursachenfeldgröße \vec{H} würde dann *magnetische Erregung* genannt analog zur teilweise üblichen Bezeichnung *elektrische Erregung* \vec{D} für die Ursachenfeldgröße im elektrostatischen Feld. Um einen leichteren Vergleich mit dem größeren Teil der Literatur zu ermöglichen, wird die Bezeichnung magnetische Feldstärke für die Ursachen- und magnetische Flussdichte für die Wirkungsgröße hier beibehalten.

4.1.2.4 Einheiten der magnetischen Feldgrößen

Im SI-Einheitensystem (Abschnitt 1.1.2 und Anhang A.2) ergibt sich die abgeleitete Einheit der magnetischen Feldstärke \vec{H} zu

$$[H] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

was auch an Gl. (4.7) zu erkennen ist. In der Praxis wird häufig die Einheit A/cm verwendet.

Die abgeleitete Einheit der magnetischen Flussdichte \vec{B} ist das *Tesla*. Ihre Definition folgt aus der Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter (Abschnitt 4.3.2.3) oder der Induktionswirkung (Abschnitt 4.3.1.2):

$$[B] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T}$$

Mit $1 \text{ V} = 1 \text{ W/A} = 1 \text{ Nm}/(\text{As})$ kann der Zusammenhang zwischen magnetischen, elektrischen und mechanischen Einheiten über die Gleichung

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} \quad (4.11)$$

dargestellt werden. Der letzte Einheiten Ausdruck in Gl. (4.11) folgt auch unmittelbar aus der Definitionsgleichung für die magnetische Flussdichte nach Gl. (4.2).

Üblicherweise wird die *Permeabilität* gemäß

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (4.12)$$

als Produkt der *relativen Permeabilität* μ_r und der *magnetischen Feldkonstante* μ_0 , dargestellt. Damit wird Gl. (4.10) geschrieben als

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}. \quad (4.13)$$

Die *relative Permeabilität* μ_r ist eine *einheitenlose Zahl*, die das Verhältnis der Permeabilität eines bestimmten Stoffs (z. B. Luft, Eisen) zu der des Vakuums angibt. Für Vakuum ist also $\mu_r = 1$. Für Luft hat μ_r nahezu denselben Wert, nämlich $\mu_r \approx 1,0000004$, sodass bei Feldern in Luft praktisch $\mu_r = 1$ gesetzt werden kann. Die Größe der relativen Permeabilität anderer Medien, besonders von Eisen, ist in Abschnitt 4.2.1.3 beschrieben.

Die *magnetische Feldkonstante* μ_0 ist gleich der Permeabilität μ des Vakuums. Sie ist eine dimensionsbehaftete Konstante, deren Einheit $1 \text{ T}/(\text{A/m}) = 1 \text{ Vs}/(\text{Am}) = 1 \text{ H/m}$ aus Gl. (4.13) folgt. Dabei steht H für die abgeleitete Einheit *Henry* mit $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$. Im SI-Einheitensystem ergibt sich mit der Definition des Ampere der Wert der *magnetischen Feldkonstante*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \approx 1,256\,637\,0614 \mu\text{H/m}. \quad (4.14)$$

Beispiel 4.2: Dimensionierung einer Ringspule

Eine Ringspule nach Bild 4.7 ohne ferromagnetischen Kern (*Luftspule*) hat den mittleren Ringdurchmesser $d_R = 20 \text{ cm}$. Welche elektrische Durchflutung ist erforderlich, um innerhalb der Spule die magnetische Flussdichte $B = 0,01 \text{ T}$ zu erzeugen?

Aus Gl. (4.13) erhält man die magnetische Feldstärke

$$H = B/(\mu_r \mu_0) = 0,01 \text{ T}/(1 \cdot 1,257 \mu\text{Tm/A}) = 7,958 \text{ kA/m}.$$

Mit dem mittleren Ringumfang $l = \pi d_R = \pi \cdot 20 \text{ cm}$ ergibt sich damit nach Gl. (4.5) und (4.7) die elektrische Durchflutung

$$\Theta = NI = Hl = (7,958 \text{ kA/m}) \pi \cdot 20 \text{ cm} = 5000 \text{ A}.$$

Diese Durchflutung kann z. B. mit 5000 Windungen, in denen der Strom 1 A fließt, erzeugt werden, aber auch mit 1000 Windungen bei 5 A, 200 Windungen bei 25 A usw. Die Aufteilung des Produktes wird in der Praxis durch die Spannung bestimmt, die für die Erzeugung des magnetisierenden Stroms zur Verfügung steht.

4.1.3 Integrale Größen des magnetischen Feldes

Die in Abschnitt 4.1.2.1 und 4.1.2.3 erläuterten Feldgrößen \vec{B} und \vec{H} sind *ortsbezogen*, also nach Betrag und Richtung für jeden einzelnen Feldpunkt definiert. Sie werden auch als *differenzielle Feldgrößen* bezeichnet.

Häufig interessiert aber nicht die örtliche Verteilung der Feldgrößen, sondern ihre *resultierende Wirkung* über ein bestimmtes räumlich ausgedehntes Feldgebiet. Beispielsweise ist die Spannung, die in einer Leiterschleife vom magnetischen Feld induziert wird, nicht abhängig von der räumlichen Verteilung des Feldes in dieser Schleife, sondern allein von der summarischen Wirkung, d. h. dem Flächenintegral des Feldes.

Für solche Fragestellungen wurden *integrale Feldgrößen* definiert, die mathematisch einfacher zu handhaben sind als die Ortsfunktionen der Feldgrößen.

4.1.3.1 Magnetische Spannung

In Abschnitt 3.2.3 wird die elektrische Spannung U als Wegintegral der längenbezogenen elektrischen Feldstärke \vec{E} (elektrische Spannung pro Länge) dargestellt.

In *formaler Analogie* hierzu wird im magnetischen Feld aus der längenbezogenen magnetischen Feldstärke \vec{H} (Strom pro Länge) als integrale Feldgröße die *magnetische Spannung* V definiert.

Im einfachsten Fall kann man hierzu H mit der Weglänge l multiplizieren. Für das Feld der Ringspulen in Abschnitt 4.1.2.2 ist dies algebraisch in der Form Hl möglich, da der Weg l als Ringmittellinie über den ganzen Ringumfang parallel zur \vec{H} -Feldlinie verläuft und der Betrag des Vektors \vec{H} über l konstant ist. In Gl. (4.9) in der Form $Hl = IN$ kann die linke Seite Hl gedeutet werden als magnetische Spannung

$$\mathring{V} = Hl. \quad (4.15)$$

Im zunächst betrachteten Fall ist es die magnetische Spannung, die über eine *geschlossene* Kreislinie der Ringspule (Mittellinie) auftritt und die man demzufolge auch als *magnetische Umlaufspannung* \mathring{V} bezeichnet. Eine über einen geschlossenen Weg auftretende magnetische Spannung wird durch einen Kreis über dem Symbol V gekennzeichnet (\mathring{V}).

Eine solche magnetische Umlaufspannung ist immer gleich der elektrischen Durchflutung, die von diesem Umlauf eingeschlossen wird (Abschnitt 4.1.3.2), in diesem Fall also dem Produkt aus Windungszahl N der Ringspule und Spulenstrom I .

Soll die magnetische Spannung V entlang eines *beliebigen* Weges in einem *inhomogenen* Feld dargestellt werden, darf analog zu den Erläuterungen in Abschnitt 3.2.3 das Produkt Hl immer nur für infinitesimal kleine Wegstrecken dl gebildet werden, über die die magnetische Feldstärke \vec{H} als konstant angenommen werden kann (Bild 4.8). Außerdem darf nur die Komponente der magnetischen Feldstärke \vec{H} in Richtung des Wegelements $d\vec{l}$ berücksichtigt werden. Damit ergibt sich für jedes Wegelement $d\vec{l}$ die differenzielle magnetische Spannung

$$dV = H dl \cos \alpha, \quad (4.16)$$

die auch als Skalarprodukt geschrieben werden kann:

$$dV = \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (4.17)$$

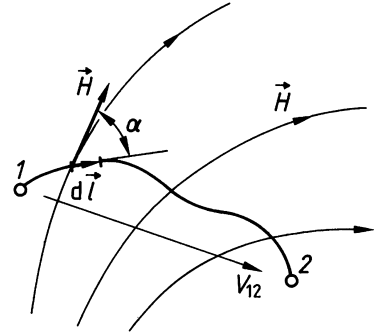


Bild 4.8: Magnetische Spannung V_{12} als Wegintegral der magnetischen Feldstärke \vec{H}

Summiert man alle differentiellen Teilspannungen dV entlang eines Weges l zwischen den Feldpunkten 1 und 2 (Bild 4.8), erhält man die *Definitionsgleichung für die magnetische Spannung*:

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (4.18)$$

Die magnetische Spannung V ist wie die elektrische Spannung U eine *skalare Feldgröße*. Ihre Einheit ist das Ampere (A). Da die magnetische Spannung V wie die elektrische Spannung U Richtungscharakter hat, ist auch sie eine *Zählpfeilgröße*. Ihr Zählpfeil weist gemäß Bild 4.8 in Integrationsrichtung, also von der unteren Grenze zur oberen Grenze des Integrals in Gl. (4.18).

Da das \vec{H} -Feld ein Wirbelfeld ist, ist die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten nicht unabhängig von der Wahl des Integrationsweges l (siehe Abschnitt 4.5).

4.1.3.2 Durchflutungssatz

In Abschnitt 4.1.3.1 wurde für das Beispiel der Ringspule gezeigt, dass die *magnetische Umlaufspannung* \dot{V} gleich der Summe der von diesem Umlauf eingeschlossenen Ströme ist. Diese Aussage ist einer der wichtigsten Sätze für das Magnetfeld, der Durchflutungssatz. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen Magnetfeld und elektrischem Strömungsfeld:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \Theta \quad (4.19)$$

Das *Wegintegral der magnetischen Feldstärke \vec{H} längs eines geschlossenen Weges l ist gleich der elektrischen Durchflutung Θ durch die Fläche A , die vom Weg l umrandet wird* (Bild 4.9).

Der *geschlossene* Integrationsweg wird durch einen *Kreis im Integralzeichen* gekennzeichnet. Die Ströme, deren *Zählpfeile* vom gewählten Integrationsumlauf $d\vec{l}$ *rechtswendig* umschlossen werden, sind mit *positivem*, die *linkswendig* umschlossenen mit *negativem Vorzeichen* in der Stromsumme zu berücksichtigen. Beispielsweise lautet der Durchflutungssatz für den in Bild 4.9 dargestellten Umlauf $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = \Theta$.

Ist die Summe der Ströme als elektrische Durchflutung Θ vorgegeben, so ist das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ *rechtswendig* um den Zählpfeil für Θ zu bilden.

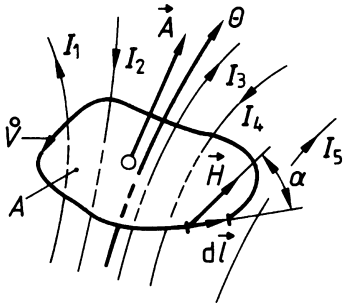


Bild 4.9: Zur Definition der magnetischen Umlaufspannung \hat{V}

Beispiel 4.3: Magnetfeld in einer Ringspule

Für die in Beispiel 4.2 betrachtete Ringspule nach Bild 4.7 sind die Beträge der magnetischen Feldstärke H und der magnetischen Flussdichte B am Innen- und Außenrand des Feldes zu bestimmen. Die Durchflutung sei $\Theta = 5000$ A und der Durchmesser des Spulenquerschnitts betrage $d_q = 3$ cm.

Mit den in Beispiel 4.2 angegebenen Daten ist die Länge des Umlaufs am Innenrand $l_i = \pi(20 \text{ cm} - 3 \text{ cm}) = 53,4$ cm und am Außenrand $l_a = \pi(20 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 72,3$ cm. Da H längs der Wege l_i und l_a jeweils konstant ist und die Integrationsrichtung $d\vec{l}$ in Richtung von \vec{H} gewählt wird, vereinfacht sich Gl. (4.19) zu

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H \cdot dl = Hl = \Theta,$$

sodass man die magnetischen Feldstärken

$$H_i = \Theta/l_i = 5 \text{ kA}/(53,4 \text{ cm}) = 9,36 \text{ kA/m},$$

$$H_a = \Theta/l_a = 5 \text{ kA}/(72,3 \text{ cm}) = 6,92 \text{ kA/m}$$

und nach Gl. (4.13) mit $\mu = \mu_0 = 1,26 \mu\text{H/m}$ die magnetischen Flussdichten

$$B_i = \mu_0 H_i = (1,26 \mu\text{H/m}) \cdot 9,35 \text{ kA/m} = 11,8 \text{ mT},$$

$$B_a = \mu_0 H_a = (1,26 \mu\text{H/m}) \cdot 6,91 \text{ kA/m} = 8,7 \text{ mT}$$

erhält.

Die Abweichungen von der magnetischen Flussdichte $B = 10$ mT in der Feldmittellinie (nach Beispiel 4.2) sind schon deutlich. Trotzdem kann man in solchen Anordnungen häufig mit mittleren Werten rechnen.

Die Gültigkeit des Durchflutungssatzes kann für beliebige Räume experimentell, für homogene Räume ($\mu = \text{const}$) auch analytisch mit Hilfe des *Gesetzes von Biot-Savart* nachgewiesen werden.

Wesentlich ist die Aussage, dass lediglich diejenigen Ströme den Wert des Umlaufintegrals bestimmen, die innerhalb des Integrationsumlaufs fließen. Das darf aber nicht dahingehend missverstanden werden, dass die Ströme außerhalb des Umlaufs das Feld nicht beeinflussen würden!

Beispielsweise beeinflusst der nicht durch die Fläche A fließende Strom I_5 in Bild 4.9 durchaus das magnetische Feld im Bereich der Fläche A , nicht aber den Wert des Umlaufintegrals $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ entlang des Weges l um A . Dieser Wert wird ausschließlich durch die eingeschlossene elektrische Durchflutung ($I_1 - I_2 + I_3 - I_4$) bestimmt.

Fließen die Ströme in räumlich ausgedehnten Leitern (Strömungsgebieten), auf die sie sich mit beliebigen Stromdichten \vec{J} verteilen, so muss die vom Umlaufintegral eingeschlossene Fläche in infinitesimal kleine Flächenelemente $d\vec{A}$ unterteilt werden, über die jeweils die Stromdichte \vec{J} als konstant angenommen werden kann. Dann ergibt sich mit Gl. (4.6) der Durchflutungssatz Gl. (4.19) in der verallgemeinerten Form

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \Theta. \quad (4.20)$$

Die *Integrationsrichtung* $d\vec{l}$ und damit die Richtung des Zählpfeils der magnetischen Umlaufspannung $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ist *rechtswendig* zu den Flächenvektoren $d\vec{A}$ und damit *rechtswendig* um den Zählpfeil für Θ festgelegt (Bild 4.9), da definitionsgemäß die Richtung der Flächenvektoren $d\vec{A}$ die Richtung des Zählpfeils von Θ bestimmt.

Bei der Anwendung des Durchflutungssatzes sind zwei Arten von Aufgabenstellungen zu unterscheiden:

1. Kennt man den Feldverlauf, d. h. ist die Ortsfunktion der magnetischen Feldstärke \vec{H} gegeben, so lässt sich mit Gl. (4.19) die elektrische Durchflutung Θ bestimmen.
2. Soll bei gegebener Durchflutung Θ die magnetische Feldstärke \vec{H} als Ortsfunktion berechnet werden, können unüberwindliche Schwierigkeiten auftreten, da der Durchflutungssatz nur eine Aussage über das Integral der magnetischen Feldstärke $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ liefert, nicht aber darüber, wie groß diese in den einzelnen Feldpunkten entlang des Integrationsweges ist.

Der Durchflutungssatz lässt sich nur in einfachen Feldanordnungen, in denen der *räumliche Feldverlauf qualitativ bekannt und hochsymmetrisch* ist, nach \vec{H} auflösen.

Bei der Ringspule in Bild 4.7 ist z. B. nur der Betrag der magnetische Feldstärke unbekannt. Aus Symmetriegründen müssen die Feldlinien als konzentrische Kreise durch das Innere der Ringspule verlaufen, entlang denen H konstant ist. Deshalb lässt sich das Integral $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ in das Produkt Hl überführen. Dadurch kann der Durchflutungssatz nach der magnetischen Feldstärke \vec{H} aufgelöst werden, wie Beispiel 4.3 zeigt.

Der Durchflutungssatz gilt allgemein. Es ist völlig gleichgültig, wie die elektrischen Strömungen innerhalb des magnetischen Kreises *örtlich verteilt* sind. Für Spulen gilt der Satz z. B. sowohl bei der Ringspule nach Bild 4.7 mit ihren über die ganze geschlossene Feldlänge verteilten Windungen als auch bei Feldern entsprechend den Bildern 4.2 bis 4.4, in denen Windungen konzentriert über Teillängen der Felder angeordnet sind.

Der Durchflutungssatz gilt für *beliebige Räume* mit *beliebigen Stoffen* sowie für *beliebige Umlaufwege*. Man braucht nicht unbedingt entlang einer Feldlinie zu integrieren, sondern kann jeden beliebigen Integrationsweg wählen; er muss lediglich *geschlossen* sein. Bei praktischen Rechnungen wird der Integrationsweg so gewählt, dass sich der *geringste Rechenaufwand* ergibt.

Im Felddbild der Spule in Bild 4.10 sind mehrere durch dickere Striche hervorgehobene Integrationswege dargestellt. Der Integrationsweg 1 fällt mit einer Feldlinie zusammen, die eine

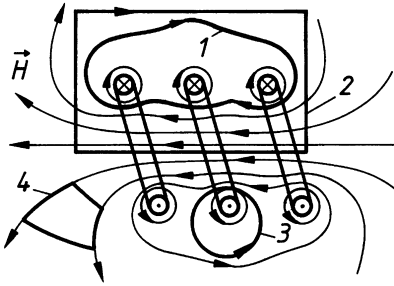


Bild 4.10: Feldlinienbild der magnetischen Feldstärke \vec{H} einer stromdurchflossenen Spule mit verschiedenen geschlossenen Wegen zur Bildung der magnetischen Umlaufspannung

Durchflutung dreier Windungen umschließt. Das Umlaufintegral $\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{l}$ entlang dieses Weges liefert den Wert der eingeschlossenen Durchflutung $\Theta = 3I$. Der Integrationsweg 2, der nicht entlang einer Feldlinie verläuft, führt zum gleichen Ergebnis $\oint_2 \vec{H} \cdot d\vec{l} = 3I$, da er auch mit drei Strömen verkettet ist. Das Umlaufintegral über den Weg 3 liefert $\oint_3 \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$, da nur die Durchflutung einer Windung eingeschlossen wird. Die magnetische Umlaufspannung über Integrationsweg 4 ist null, da keine Durchflutung eingeschlossen wird ($\oint_4 \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$).

Beispiel 4.4: Magnetfeld außerhalb eines langen, geraden Leiters

Die magnetische Feldstärke \vec{H} außerhalb eines geraden, unendlich langen, stromdurchflossenen Leiters mit rundem Querschnitt ist herzuleiten.

Die Aufgabe kann mit dem Durchflutungssatz gelöst werden. Wegen der geometrischen und elektrischen Zylindersymmetrie der Anordnung und wegen des Wirbelcharakters des magnetischen Feldes muss ein solcher Leiter ein zylindersymmetrisches Feld erzeugen, das durch konzentrische Feldlinien um den Leiter gemäß Bild 4.2a beschrieben wird.

Zur quantitativen Beschreibung der Feldgrößen wird ein Zylinderkoordinatensystem gewählt, dessen z -Achse in der Leiterachse liegt. Die Richtung der z -Achse wird willkürlich in die Zeichnungsebene hinein weisend angenommen, in die auch der Zählpfeil des Stroms I weist. Der qualitative Feldverlauf läßt sich nun mathematisch konkret beschreiben als

$$\vec{H} = H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi.$$

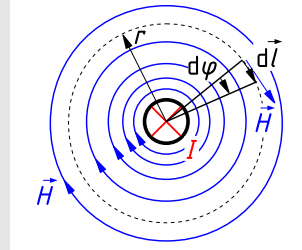
Das heißt, dass das \vec{H} -Feld in jedem Feldpunkt nur eine Komponente in Richtung der φ -Achse hat, deren Wert nur von der r -Koordinate abhängen kann. Als Integrationsweg wird eine \vec{H} -Feldlinie gewählt, also ein konzentrischer Kreis mit dem Radius r um den Leiter. Der Integrationsweg wird in Richtung der φ -Achse durchlaufen, in Bild 4.11 also im Uhrzeigersinn. Dann gilt konkret $d\vec{l} = r d\varphi = r d\varphi \vec{e}_\varphi$. Der vollständige Umlauf um den Leiter wird beschrieben durch die Integrationsgrenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$.

Der Zählpfeil von Θ ist dem Integrationsweg rechtswendig zugeordnet, weist also in Richtung der z -Achse und stimmt somit mit der Richtung des Zählpfeils von I überein. Also gilt $\Theta = I$.

Damit liefert der Durchflutungssatz

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{e}_\varphi = \Theta = I. \quad (4.21)$$

Bild 4.11: Feldlinienbild der magnetischen Feldstärke \vec{H} außerhalb eines stromdurchflossenen, langen, geraden Leiters



$H_\varphi(r)$ und r sind auf dem Integrationsweg konstant und können daher vor das Integral gezogen werden. Nach den Regeln der Vektorrechnung ergibt das Produkt eines Einheitsvektors mit sich selbst immer eins. Also gilt auch $\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1$. Daraus folgt

$$H_\varphi(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi = I. \quad (4.22)$$

Der Wert des Integrals ist 2π . Gl. (4.22) lässt sich nach $H_\varphi(r)$ auflösen und man erhält das gesuchte Ergebnis:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \sim \frac{1}{r} \quad (4.23)$$

Der Betrag der magnetischen Feldstärke fällt außerhalb des Leiters also umgekehrt proportional zum Abstand r von der Leiterachse ab.

Das Beispiel 4.4 zeigt, wie man in einfachen, hochsymmetrischen Anordnungen trotz der integralen Aussage des Durchflutungssatzes den Feldvektor \vec{H} als Ortsfunktion bestimmen kann. Voraussetzung für den Lösungsansatz ist allerdings die Kenntnis des qualitativen Feldverlaufes.

Beispiel 4.5: Magnetfeld innerhalb eines langen, geraden Leiters

Das \vec{H} -Feld im Inneren eines geraden, unendlich langen Leiters mit kreisförmigem Querschnitt gemäß Bild 4.12 ist herzuleiten.

Für Gleichstrom und Wechselstrom niedriger Frequenz kann eine näherungsweise homogene Verteilung des Stroms I über den Leiterquerschnitt $A_q = \pi r_0^2$ angenommen werden. Der Zählpfeil von I weise wie in Beispiel 4.4 in die Zeichnungsebene hinein. Mittels des wieder gewählten Zylinderkoordinatensystems gilt dann

$$\vec{J} = J_z \vec{e}_z = \frac{I}{\pi r_0^2} \vec{e}_z.$$

Aus Symmetriegründen müssen die \vec{H} -Feldlinien auch im Inneren des Leiters konzentrische Kreise bilden. Somit lässt sich der Durchflutungssatz gemäß Beispiel 4.4 auch für den Innenraum des Leiters anwenden, nun allerdings in Form von Gl. (4.20).

Als Integrationsweg l wird wieder eine Feldlinie mit dem Radius $0 \leq r \leq r_0$ gewählt, als Umlaufsinn wieder die Richtung der φ -Achse (Bild 4.12).

Die Durchflutung muss hier durch Integration der Stromdichte über die vom Integrationsweg eingeschlossene Fläche berechnet werden.

Wegen der rechtswendigen Zuordnung der $d\vec{A}$ zu den $d\vec{l}$ gilt hier $d\vec{A} = dA \vec{e}_z$.

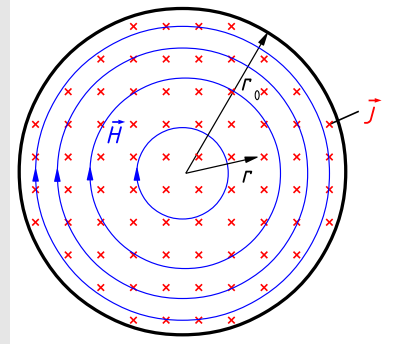


Bild 4.12: Feldlinienbild der magnetischen Feldstärke \vec{H} im Inneren eines stromdurchflossenen, unendlich langen, geraden Leiters

Daraus folgt

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_\varphi(r) 2\pi r = \int_A \vec{J} d\vec{A} = \int_A J_z \vec{e}_z \cdot dA \vec{e}_z = \int_A \frac{I}{r_0^2 \pi} \vec{e}_z \cdot dA \vec{e}_z. \quad (4.24)$$

Es gilt $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$. Die Konstante $J_z = I/(r_0^2 \pi)$ kann vor das Integral gezogen werden. Damit reduziert sich das rechte Integral auf $\int dA = \pi r^2$, also die Fläche innerhalb des Integrationsweges. Damit folgt aus Gl. (4.24)

$$H_\varphi(r) 2\pi r = \frac{I}{r_0^2 \pi} \pi r^2.$$

Diese Gleichung läßt sich nach $H_\varphi(r)$ auflösen und man erhält das gesuchte Ergebnis

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r_0^2} r \vec{e}_\varphi \sim r. \quad (4.25)$$

Der Betrag der magnetischen Feldstärke steigt innerhalb des Leiters also proportional zum Abstand r von der Leiterachse an.

Beispiel 4.6: Magnetische Umlaufspannungen

Es ist zu beweisen, dass im magnetischen Feld eines unendlich langen, geraden Leiters auch für die in Bild 4.13 skizzierten Umlaufwege der Durchflutungssatz erfüllt ist.

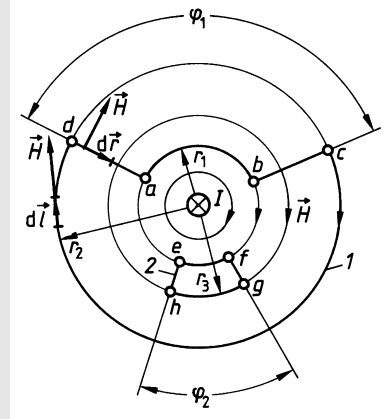
Bildet man das Umlaufintegral nach Gl. (4.19) entlang des Umlaufs 1 (Punkte a-b-c-d-a), so lässt sich dieses als Summe von vier Teilintegralen darstellen:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l} + \int_b^c \vec{H} d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} d\vec{l} + \int_d^a \vec{H} d\vec{l} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} \quad (4.26)$$

Im 1. und 3. Abschnitt weist $d\vec{l}$ in Richtung der magnetischen Feldstärke \vec{H} , sodass $\vec{H} d\vec{l}$ als Produkt zweier Skalare $H dl$ geschrieben werden kann mit $dl = r d\varphi$.

Im 2. und 4. Abschnitt steht \vec{H} senkrecht auf $d\vec{l} = d\vec{r}$, sodass $H dr \cos \alpha = 0$ gilt.

Bild 4.13: Feldlinienbild der magnetischen Feldstärke \vec{H} eines vom Strom I durchflossenen, unendlich langen, geraden Leiters mit zwei verschiedenen Wegen zur Berechnung der magnetischen Umlaufspannungen



Mit der so bestimmten Umlaufspannung

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_0^{\varphi_1} H r d\varphi + \int_{\varphi_1}^{2\pi} H r d\varphi \quad (4.27)$$

und dem in Beispiel 4.4 ermittelten Ergebnis $H = I/(2\pi r)$ ergibt sich

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{I}{2\pi} \varphi_1 + \frac{I}{2\pi} (2\pi - \varphi_1) = I, \quad (4.28)$$

d. h. für den Umlauf 1 ist der Durchflutungssatz erfüllt. Nach ähnlichen Überlegungen ergibt sich für den Umlauf 2 (Punkte e-f-g-h-e) der Ausdruck

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{I}{2\pi} \varphi_2 - \frac{I}{2\pi} \varphi_2 = 0, \quad (4.29)$$

der ebenfalls den Durchflutungssatz erfüllt: Der Umlauf 2 umfasst keinen Strom, d. h. die eingeschlossene elektrische Durchflutung ist null.

Beispiel 4.7: Durchflutungen bei einem Dreiphasentransformator

In Bild 4.14a ist ein verzweigter Eisenkreis skizziert, wie er z. B. beim Dreiphasentransformator verwendet wird.

Die Schenkel 1, 2, 3 werden von den Wicklungen U , V , W in gleicher Umlaufrichtung umschlungen. Dementsprechend sind die Zählpfeilrichtungen (durch Kreuze bzw. Punkte dargestellt) für die Ströme in den Spulen in Bild 4.14a eingetragen. In den drei Wicklungen fließen die Ströme

$$i_U = 0,4 \text{ A} \sin[\omega t], \quad (4.30)$$

$$i_V = 0,4 \text{ A} \sin[\omega t - (2\pi/3)], \quad (4.31)$$

$$i_W = 0,4 \text{ A} \sin[\omega t - 2(2\pi/3)]. \quad (4.32)$$

ω ist die Kreisfrequenz der sinusförmigen Wechselströme. Die Windungszahl jeder der drei

Wicklungen beträgt $N_U = N_V = N_W = 1200$.

Für einen Zeitpunkt entsprechend $\omega t = \pi/2$ sind die Augenblickswerte der *Fensterdurchflutungen* zu berechnen.

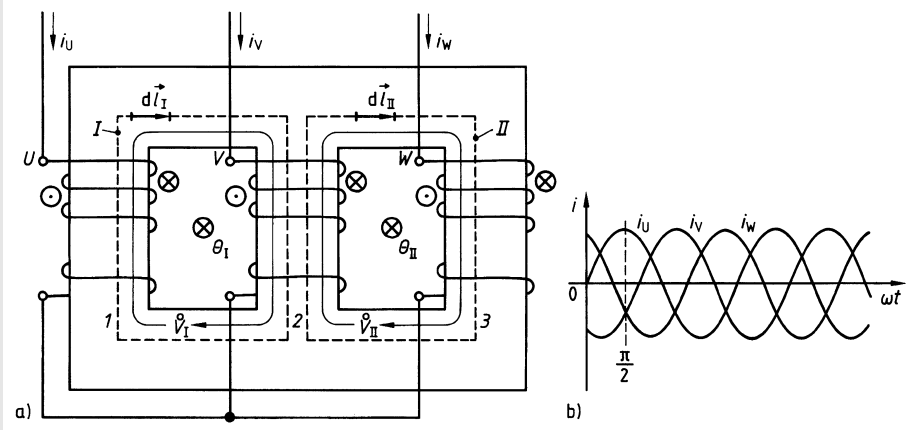


Bild 4.14: Magnetischer Eisenkreis eines Dreiphasentransformators (a) und Zeitverlauf der Ströme i_U , i_V , i_W in den 3 Wicklungen (b)

In den beiden durch den Kern gebildeten Fenstern werden (willkürlich) gleiche Zählpfeilrichtungen für die elektrischen Durchflutungen Θ_I und Θ_{II} gewählt (siehe Bild 4.14a). Damit sind auch die Integrationsrichtungen für die Umlaufintegrale $\oint \vec{H} d\vec{l}$ und damit die Zählpfeilrichtungen der magnetischen Umlaufspannungen \dot{V} (rechtswendig zur Zählpfeilrichtung für Θ) bei beiden Fenstern in gleicher Umlaufrichtung festgelegt.

Die Augenblickswerte der Spulenströme betragen für $\omega t = \pi/2$ (siehe Bild 4.14b)

$$i_U = 0,4 \text{ A} \sin 90^\circ = +0,4 \text{ A}, \quad (4.33)$$

$$i_V = 0,4 \text{ A} \sin (-30^\circ) = -0,2 \text{ A}, \quad (4.34)$$

$$i_W = 0,4 \text{ A} \sin 150^\circ = -0,2 \text{ A}. \quad (4.35)$$

Unter Beachtung der Vorzeichen dieser Stromwerte und ihrer Zählpfeilrichtungen bezüglich der Zählpfeilrichtungen für die elektrischen Durchflutungen Θ ergibt sich nach Gl. (4.6)

$$\Theta_I = \sum_{\text{Fenster I}} i = +N_U i_U - N_V i_V = 1200 \cdot 0,4 \text{ A} - 1200(-0,2 \text{ A}) = +720 \text{ A}, \quad (4.36)$$

$$\Theta_{II} = \sum_{\text{Fenster II}} i = +N_V i_V - N_W i_W = 1200(-0,2 \text{ A}) - 1200(-0,2 \text{ A}) = 0. \quad (4.37)$$

Die elektrische Durchflutung im Umlauf I (Fenster I) ist positiv, d. h. zum Zeitpunkt entsprechend $\omega t = \pi/2$ strömt eine positive Ladungsmenge in Richtung des Zählpfeils für Θ_I durch den Umlauf I. Damit bildet sich das \vec{H} -Feld rechtswendig um das Fenster I aus, liegt also in der Integrationsrichtung $d\vec{l}_I$, sodass die magnetische Umlaufspannung $\dot{V}_I = \oint \vec{H} d\vec{l}_I$ positiv ist.

Die elektrische Durchflutung im Umlauf II (Fenster II) ist null, d. h. zum betrachteten Zeitpunkt strömt eine positive Ladungsmenge entsprechend $i_V N_V$ der Wicklung V entgegen der Zählpfeilrichtung Θ_{II} und eine gleich große positive Ladungsmenge entsprechend $i_W N_W$ der Wicklung W in Richtung der Zählpfeilrichtung für Θ_{II} durch den Umlauf II. Die magnetische Umlaufspannung $\dot{V} = \oint \vec{H} d\vec{l}_{II}$ ist damit auch null ($\oint \vec{H} d\vec{l}_{II} = \Theta_{II} = 0$). Das bedeutet allerdings nicht, dass auch das Feld an den Orten dieses Umlaufs, also in den Schenkeln 2 und 3, null ist.

4.1.3.3 Magnetischer Fluss

Die resultierende Wirkung des magnetischen Feldes, wie z. B. die Erzeugung elektrischer Spannungen, ist außer von Betrag und Richtung der Flussdichte \vec{B} auch von der Größe und Lage der Fläche abhängig, die an der Wirkung beteiligt ist.

Um Größe und räumliche Lage (Richtung) einer Fläche zu beschreiben, muss auch für diese ein Vektor eingeführt werden. Analog zu den Erläuterungen zur Berechnung der integralen Größe Strom I aus der Stromdichte \vec{J} in Abschnitt 3.2.2 stellt man sich das magnetische Feld in einzelne „Flussröhren“ unterteilt vor, die parallel zu den Feldlinien verlaufen und deren Querschnitte dA_q so klein sind, dass das Feld über dA_q als homogen, d. h. $B = \text{const}$ angenommen werden kann. Dann lässt sich für einen solchen infinitesimal kleinen Querschnitt dA_q , der senkrecht zur Röhrenlängsachse und damit zur Flussdichte \vec{B} steht, eine infinitesimale Größe definieren, die als *differenzieller magnetischer Fluss*

$$d\Phi = B dA_q \quad (4.38)$$

bezeichnet wird (Bild 4.15).

Für eine allgemeine Beschreibung stellt man sich vor, die Flussröhre durchdringe in beliebigem Winkel α eine im Raum liegende Fläche A . Das dabei von der Flussröhre auf der Fläche A abgegrenzte Flächenelement dA kann bei einem infinitesimal kleinen Röhrenquerschnitt dA_q auch bei nichtebener Fläche A immer als eben angenommen werden. Es ist eindeutig durch einen Winkel α , unter dem es zum Röhrenquerschnitt dA_q liegt, zu beschreiben. Mathematisch geschieht dies durch einen Vektor $d\vec{A}$, der senkrecht auf dem Flächenelement dA steht und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ist. Man erkennt aus Bild 4.15, dass das zu einer Flussröhre gehörige Flächenelement dA von der Fläche A um so größer wird, je flacher die Flussröhre die Fläche A schneidet:

$$dA = \frac{dA_q}{\cos \alpha} \quad (4.39)$$

Der differenzielle Fluss $d\Phi$ durch das Flächenelement dA ist unabhängig von dessen Winkellage α zur Querschnittsfläche dA_q gleich dem „Röhrenfluss“ nach Gl. (4.38). Daher ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (4.39) in Gl. (4.38) der differenzielle magnetische Fluss

$$d\Phi = B dA \cos \alpha \quad (4.40)$$

durch ein Flächenelement dA , dessen Normalenvektor $d\vec{A}$ in einem beliebigen Winkel α zur Flussdichte \vec{B} steht. Gl. (4.40) kann kompakt als Skalarprodukt dargestellt werden:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (4.41)$$

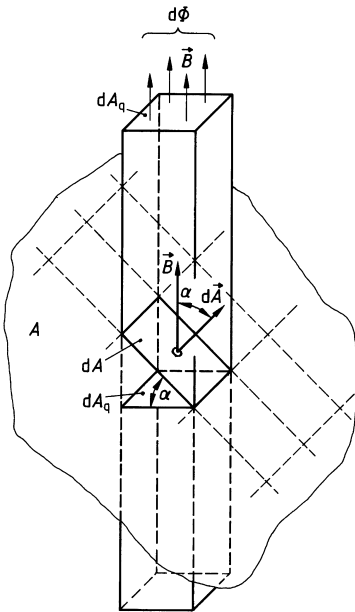


Bild 4.15: Zur Definition des differenziellen magnetischen Flusses $d\Phi$ als Skalarprodukt $d\vec{A} \cdot \vec{B}$ aus Flächen- und Flussdichtevektor

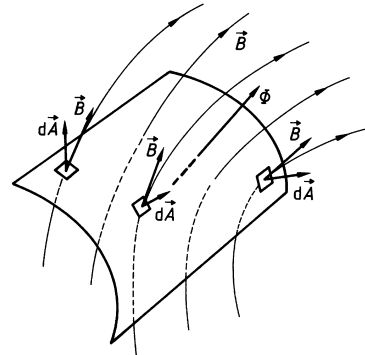


Bild 4.16: Magnetischer Fluss $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ als Flächenintegral der magnetischen Flussdichte

Ist der magnetische Fluss Φ eines beliebigen (auch inhomogenen) magnetischen Feldes durch eine beliebige (auch nichtebene) Fläche A zu berechnen, so wird die Fläche in infinitesimal kleine Flächenelemente dA unterteilt. Dann werden gemäß Bild 4.16 die Teilflüsse $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$ durch diese Flächenelemente nach Gl. (4.41) berechnet. Die Integration aller Teilflüsse $d\Phi$ ergibt den *magnetischen Fluss* durch die Fläche A :

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{4.42}$$

Werden *ebene Flächen in homogenen Feldern* betrachtet, d.h. tritt durch alle Punkte einer Fläche A die magnetische Flussdichte \vec{B} mit gleichem Betrag B und gleichem Winkel α zur Flächennormalen \vec{A} , kann B vor das Integral gezogen werden. Dann gilt

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \alpha. \tag{4.43}$$

Die SI-Einheit des magnetischen Flusses ist das *Weber* (Wb):

$$[\Phi] = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs} \tag{4.44}$$

Beispiel 4.8: Magnetischer Fluss eines langen, geraden Leiters

In Bild 4.17 ist das Feld eines unendlich langen, geraden Leiters skizziert, wie es in Beispiel 4.4 berechnet wurde.

Der magnetische Fluss Φ durch die in Bild 4.17 eingezeichnete Fläche $A = b \cdot l$, in deren Ebene auch die Mittellinie des Leiters liegt, soll berechnet werden.

Die \vec{B} -Feldlinien sind konzentrische Kreise um den stromdurchflossenen Leiter und schneiden daher die Fläche A in einem rechten Winkel. In jedem Punkt der Fläche A haben damit die Flächenvektoren $d\vec{A}$ und die Flussdichte \vec{B} die gleiche Richtung ($\alpha = 0$) senkrecht zur Fläche A . Der magnetische Fluss Φ durch die Fläche A ist daher nach Gl. (4.42)

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B dA. \quad (4.45)$$

Es ist positiv, wenn der Flächenvektor $d\vec{A}$, wie in Bild 4.17 willkürlich angenommen, nach obenweisend angetragen wird.

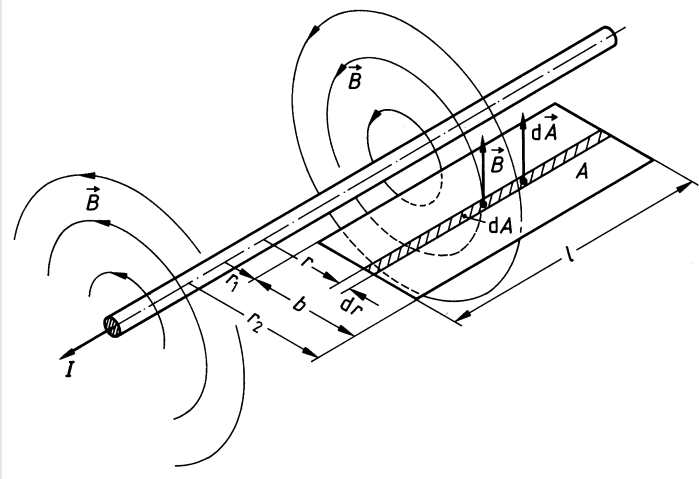


Bild 4.17: Zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ , der von einem stromdurchflossenen, langen, geraden Leiter in einer Fläche A erzeugt wird

In Beispiel 4.4 wurde der Betrag der magnetischen Feldstärke $H = I/(2\pi r)$ berechnet. Im Luftraum mit $\mu = \mu_0$ ist also der Betrag der magnetischen Flussdichte $B = \mu_0 H$ eine Funktion von r . In der Fläche A müssen damit die Flächenelemente, über die B konstant angenommen werden darf, in radialer Richtung eine infinitesimal kleine Ausdehnung haben. Sie lassen sich z. B. als $dA = l dr$ beschreiben. (Bei konstantem r ändert sich B über l nicht.) Setzt man diese Werte in Gl. (4.45) ein, ergibt sich

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{I}{2\pi r} l dr = \mu_0 \frac{I}{2\pi} l \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.46)$$

Analog zur skalaren Größe $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$ ist auch die vorzeichenbehaftete skalare Größe $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ eine *Zählpfeilgröße*. Der Zählpfeil für Φ weist immer in Richtung der Flächenvektoren $d\vec{A}$ in Gl. (4.42).

Die in Bild 4.16 skizzierte gewölbte Fläche A kann nicht durch einen einzigen Flächenvektor \vec{A} beschrieben werden, sondern nur durch die Gesamtheit der Flächenelementvektoren $d\vec{A}$, die in unterschiedliche Richtungen weisen. Dennoch erhält die Fläche A durch die Richtungen der Vektoren $d\vec{A}$ eine eindeutige Orientierung (Vorder- und Rückseite). Der Zählpfeil für Φ weist von der Rück- zur Vorderseite der Fläche A . In Bild 4.16 ist der Zählpfeil Φ daher von links unten nach rechts oben durch die Fläche weisend eingetragen.

Da die Orientierung einer Fläche zunächst willkürlich gewählt werden kann, ergibt sich auch die Richtung des Zählpfeils für den magnetischen Fluss durch diese Fläche willkürlich. Das Vorzeichen des nach Gl. (4.42) bzw. (4.43) berechneten magnetischen Flusses ergibt sich in Abhängigkeit von der gewählten Orientierung und damit des Zählpfeils für Φ positiv oder negativ.

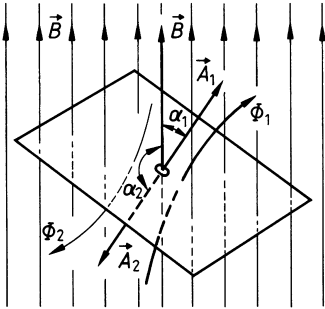


Bild 4.18: Zur Richtungsdefinition für den Zählpfeil des magnetischen Flusses Φ

Wählt man beispielsweise in Bild 4.18 den Flächenvektor \vec{A}_1 und damit den Zählpfeil Φ_1 nach oben weisend, ergibt sich bei dem vorgegebenen \vec{B} -Feld nach Gl. (4.43) der magnetische Fluss $\Phi_1 = A_1 B \cos \alpha_1$ positiv. Wählt man die Richtung des Flächenvektors \vec{A}_2 und damit des zugehörigen Zählpfeils Φ_2 nach unten weisend, ergibt sich bei demselben \vec{B} -Feld nach Gl. (4.43) der magnetische Fluss $\Phi_2 = A_2 B \cos \alpha_2 = A_2 B \cos(\pi - \alpha_1)$ negativ, wie es für eine Zählpfeilgröße nicht anders zu erwarten ist.

Beispiel 4.9: Ruhende Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

In dem in Bild 4.19a skizzierten homogenen magnetischen Feld mit der magnetischen Flussdichte $B = 0,5 \text{ T}$ zwischen den Polen eines Dauermagneten befindet sich eine Drahtschleife mit der Länge $l = 10 \text{ cm}$ und der Breite $b = 5 \text{ cm}$ in einer Ebene, die um den Winkel $\alpha = 30^\circ$ gegenüber den Polebenen geneigt ist. Die Drahtschleife soll als Linienleiter (Leiterdurchmesser vernachlässigbar klein) betrachtet werden, d. h. die eingeschlossene Fläche ist durch die Mittellinie des Leiters eindeutig bestimmt.

Der magnetische Fluss Φ durch die Drahtschleife ist zu bestimmen.

Die Drahtschleife begrenzt eine ebene Fläche, deren Flächeninhalt durch einen Flächenvektor \vec{A} mit dem Betrag $A = bl$ beschrieben werden kann. Der Vektor \vec{A} senkrecht zur Fläche wird, wie in Bild 4.19a skizziert, (willkürlich) nach unten gerichtet angenommen.

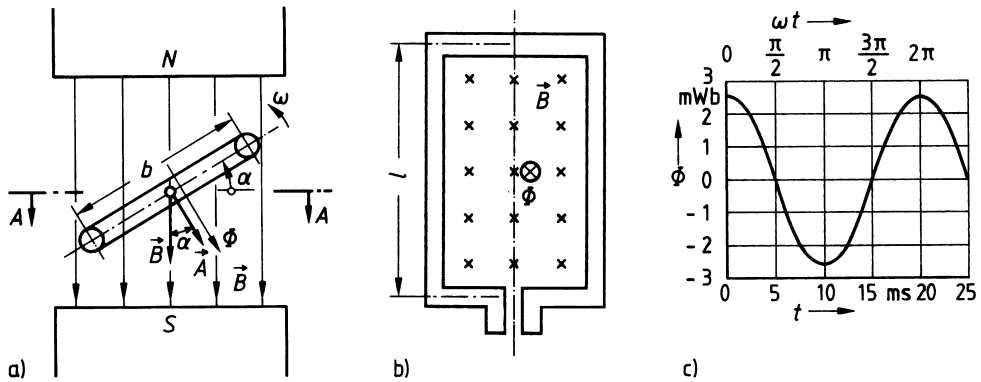


Bild 4.19: Drehende Drahtschleife in einem zeitinvarianten, homogenen Magnetfeld

- Längsschnitt durch den Feldraum mit begrenzenden Polen
- Querschnitt A – A
- Zeitverlauf des magnetischen Flusses Φ durch die mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Drahtschleife

Da in dem homogenen Feld in jedem Punkt der Fläche A die Flussdichte \vec{B} denselben Betrag B und dieselbe Winkellage α gegenüber dem Flächenvektor \vec{A} hat, kann der magnetische Fluss Φ nach Gl. (4.43) berechnet werden:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = 0,5 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ = 2,16 \text{ mWb} \quad (4.47)$$

Der magnetische Fluss ergibt sich als positiver Zahlenwert für den in Richtung von \vec{A} einzutragenden Zählpfeil für Φ .

Beispiel 4.10: Drehende Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

In Beispiel 4.9 wird eine im Magnetfeld *stillstehende* Drahtschleife betrachtet. Bei sonst unveränderter Anordnung soll sich die Drahtschleife nun mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot 50/\text{s}$ um ihre Längsachse drehen. Zur Zeit $t = 0$ liege die Schleifenfläche parallel zu den Polflächen.

Der magnetische Fluss $\Phi(t)$ durch die Drahtschleife ist zu berechnen.

Infolge der Drehung der Drahtschleife ergibt sich der ihre räumliche Lage in Bild 4.19a beschreibende Winkel α als Zeitfunktion $\alpha = \omega t$. Der Flächenvektor \vec{A} und damit der Zählpfeil Φ werden wie in Bild 4.19a eingetragen. Sie ändern ihre Lage *relativ zur betrachteten Drahtschleife* nicht, auch wenn diese gedreht wird. Damit ändert sich aber der Winkel α zwischen Flussdichte- und Flächenvektor zeitlich und der magnetische Fluss ergibt sich nach Gl. (4.43) als Zeitfunktion

$$\Phi(t) = \vec{A} \cdot \vec{B} = 0,5 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot \cos \left(2\pi \cdot 50 \frac{t}{\text{s}} \right) = 2,5 \text{ mWb} \cdot \cos \left(2\pi \cdot 50 \frac{t}{\text{s}} \right). \quad (4.48)$$

Die Zeitfunktion für den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ ist in Bild 4.19c dargestellt.

In den Abschnitten $t = 0$ bis 5 ms; 15 ms bis 25 ms usw., in denen Φ positive Werte annimmt, stimmt die Wirkungsrichtung des magnetischen Feldes auf die Drahtschleife mit der Richtung des eingetragenen Zählpfeils für Φ überein, in den Abschnitten $t = 5$ ms bis 15 ms; 25 ms bis 35 ms usw., in denen Φ negative Werte hat, ist die Wirkungsrichtung dagegen umgekehrt zu der durch den Zählpfeil beschriebenen Richtung.

Auf die Bedeutung der so beschriebenen Wirkungsrichtung, z.B. für die Polarität der induzierten Spannung, wird in den Abschnitten 4.3.1.2 und 4.3.1.3 insbesondere in den Beispielen 4.21 bis 4.23 eingegangen.

Abschließend soll noch eine Eigenheit des magnetischen Feldes erläutert werden, die anschaulich bereits aus den Bildern 4.2 bis 4.3 folgt. In diesen Bildern kann man sich jede Feldlinie als Mittellinie aneinander grenzender Flussröhren vorstellen, die *ohne Anfang und Ende* die sie verursachende Ladungsströmung umwirbeln.

Quellen des Feldes mit dort beginnenden Feldlinien, wie etwa im elektrostatischen \vec{D} -Feld (Abschnitt 3.3) gibt es im Flussdichtefeld \vec{B} nicht.

Zwischen dem Flussdichtefeld \vec{B} und dem *stationären* elektrischen Strömungsfeld \vec{J} besteht eine Analogie. Der magnetische Fluss Φ ist das Integral der Skalarprodukte aus dem quellenfreien \vec{B} -Feld und den Flächenvektoren $d\vec{A}$. Der elektrische Strom I ist das Integral der Skalarprodukte aus dem quellenfreien stationären Stromdichtefeld \vec{J} und den Flächenvektoren $d\vec{A}$. Der magnetische Fluss Φ bzw. der Strom I können sich in Knoten nur so verzweigen, dass an jeder Stelle des geschlossenen Kreises die Summe der in den parallelen Zweigen auftretenden Teilflüsse bzw. Teilströme gleich bleibt. Diese Quellenfreiheit des \vec{B} -Feldes und des magnetischen Flusses Φ wird durch die 3. Maxwellsche Gleichung (4.151) in Abschnitt 4.5 beschrieben.

4.1.3.4 Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

In Abschnitt 4.1.2.2 ist für die Ringspule der Zusammenhang zwischen $\Theta = NI$ und B mittels Gl. (4.4) beschrieben. Unter der Voraussetzung, dass die mit der mittleren Spulenlänge l berechnete Flussdichte $B = \mu NI/l = \mu \Theta/l$ über die Windungsfläche A_q der Ringspule konstant angenommen werden kann, beträgt der Fluss Φ in der Ringspule

$$\Phi = B A_q = \Theta \frac{\mu A_q}{l}. \quad (4.49)$$

Der im *magnetischen Kreis* auftretende Fluss Φ ist proportional seiner Ursache, der Durchflutung Θ , und einem Faktor, der nur vom Material und der Geometrie des magnetischen Kreises abhängt. Analog zur in der Gleichstromtechnik gültigen Beziehung $I = UG$, welche über den elektrischen Leitwert $G = 1/R$ die Verknüpfung von Ursache (Spannung U) und Wirkung (Strom I) im elektrischen Kreis beschreibt (Abschnitt 2.1.1), wird die Größe

$$\Lambda = \frac{\mu A}{l}$$

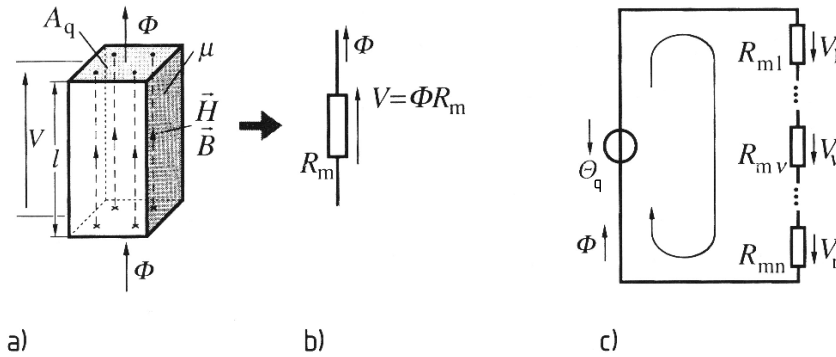
als *magnetischer Leitwert* der Ringspule bezeichnet. Der für den speziellen Fall der Ringspule gezeigte Zusammenhang lässt sich zum *Hopkinsonschen Gesetz*

$$\Phi = \Theta \Lambda = \frac{\Theta}{R_m} \quad (4.50)$$

verallgemeinern, das auch als „*Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises*“ bezeichnet wird.

Die elektrische Durchflutung Θ treibt in einem magnetischen Kreis einen magnetischen Fluss Φ an, dessen Betrag vom magnetischen Leitwert Λ bzw. *magnetischen Widerstand* (der auch als *Reluktanz* bezeichnet wird) R_m des Kreises abhängig ist. Diesen Umstand kann man nutzen, um *magnetische Ersatzschaltbilder* (wie in Bild 4.20) zu erstellen. In solchen Ersatzschaltbildern spielt eine Durchflutung die Rolle einer äußeren antreibenden Kraft (Magnetomotorische Kraft, MMK), die einer induzierten Spannung (EMK) im elektrischen Stromkreis entspricht.

Eine Durchflutung $\Theta > 0$ bewirkt einen magnetischen Fluss $\Phi > 0$ in Richtung ihres Zählpfeils. Diese Richtungszuordnung passt nicht zu der üblichen Betrachtungsweise elektrischer Stromkreise, in denen Spannungsquellen durch ihre Quellenspannung U_q beschrieben werden und bei $U_q > 0$ einen Strom $I > 0$ *entgegen* der Richtung ihres Zählpfeils bewirken. Um diesen Unterschied zu beseitigen, kann die *Quellendurchflutung* Θ_q entsprechend einer magnetischen Quellenspannung eingeführt werden, die den selben Zahlenwert wie Θ , jedoch die umgekehrte Zählpfeilrichtung und einen anderen physikalischen Charakter hat (Bild 4.20).



Feld	Ursache	Wirkung	Verbindende Größen		
elektrischer Stromkreis	Quellenspannung U_q	Strom I	Widerstand R	Leitwert G	Leitfähigkeit κ
magnetischer Kreis	Quellendurchflutung Θ_q	magn. Fluss Φ	magnetischer Widerstand R_m	magnetischer Leitwert Λ	Permeabilität μ

Bild 4.20: Realer Abschnitt eines magnetischen Kreises (a)
 Magnetisches Ersatzschaltzeichen des Abschnitts (b)
 Magnetisches Ersatzschaltbild eines geschlossenen magnetischen Kreises (c)
 Analogie zwischen den integralen elektrischen und magnetischen Größen (d)

Häufig empfiehlt es sich, einen geschlossenen magnetischen Kreis in n Teilabschnitte zu zerlegen, in denen jeweils der Feldverlauf als näherungsweise *homogen* angenommen werden kann, sodass die magnetischen Teilwiderstände $R_{m\nu}$ ähnlich wie bei der Ringspule berechnet werden können.

Ist l_ν die Länge, A_ν die Fläche und μ_ν die Permeabilität eines solchen ν -ten Teilabschnitts (Bild 4.20a), ergibt sich für diesen der magnetische Teilwiderstand

$$R_{m\nu} = \frac{1}{\Lambda_\nu} = \frac{l_\nu}{A_\nu \mu_\nu} . \tag{4.51}$$

Besteht der geschlossene magnetische Kreis aus n hintereinandergeschalteten Teilabschnitten, ist der magnetische Kreiswiderstand

$$R_m = \sum_{\nu=1}^n R_{m\nu} \quad (4.52)$$

die Summe aller magnetischen Teilwiderstände. Setzt man diese Summe in Gl. (4.50) ein ($\Phi R_m = \Theta$) und ersetzt die Durchflutung Θ durch Gl. (4.19), erkennt man durch Vergleich dieses Ausdruckes

$$\Phi \sum_{\nu=1}^n R_{m\nu} = \Theta = \oint \vec{H} \, d\vec{l} \quad (4.53)$$

mit Gl. (4.26), dass sich das Umlaufintegral $\oint \vec{H} \, d\vec{l}$ auch als Summe der magnetischen Teilspannungen V_ν deuten lässt (Bild 4.20c):

$$\Theta = \Phi \sum_{\nu=1}^n R_{m\nu} = \dot{V} = \sum_{\nu=1}^n V_\nu \quad (4.54)$$

Diese Gleichung ähnelt der Spannungsgleichung einer elektrischen Spannungsquelle, die mit einer Reihenschaltung elektrischer Widerstände belastet wird. Die Spannungsgleichung für den unverzweigten magnetischen Kreis

$$\sum V_\nu = \Theta \quad (4.55)$$

besagt, dass über den geschlossenen Umlauf die Summe aller magnetischen Spannungen gleich der elektrischen Durchflutung ist.

Obwohl diese Analogiebetrachtungen sehr anschaulich sind, ist ihre Anwendung bei der quantitativen Lösung praktischer Aufgabenstellungen nur selten möglich. Dies liegt daran, dass im Gegensatz zu elektrischen Stromkreisen die Widerstände $R_{m\nu}$ in den am häufigsten vorkommenden magnetischen Kreisen aus ferromagnetischen Materialien nicht konstant sind, sondern vom Fluss Φ abhängen (Abschnitt 4.2), also nichtlinear sind.

Sollen dagegen Fluss- oder magnetische Spannungsverteilungen lediglich qualitativ *abgeschätzt* werden, können die gezeigten Analogien im Zusammenhang mit der Strom- bzw. Spannungsteilerregel durchaus nützlich sein. Wie für elektrische Kreise gelten auch für magnetische folgende Regeln:

Bei *Reihenschaltungen magnetischer Widerstände* $R_{m\nu}$, in denen der gleiche magnetische Fluss $\Phi = V_1/R_{m1} = V_2/R_{m2} = \dots$ auftritt, sind die magnetischen Spannungen V_ν proportional den magnetischen Widerständen $R_{m\nu}$, an denen sie auftreten (*magnetische Spannungsteilerregel*):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_{m1}}{R_{m2}} \quad (4.56)$$

Bei *Parallelschaltungen magnetischer Widerstände* $R_{m\nu}$ an der gleichen magnetischen Spannung $V = \Phi_1 R_{m1} = \Phi_2 R_{m2} = \dots$ sind die magnetischen Flüsse Φ_ν umgekehrt proportional den Widerständen $R_{m\nu}$, in denen sie auftreten (*magnetische Stromteilerregel*):

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}} = \frac{A_1}{A_2} \quad (4.57)$$

4.1.4 Überlagerung magnetischer Felder

Soll das von mehreren stromdurchflossenen Leitern bewirkte magnetische Feld bestimmt werden, kann diese Aufgabe häufig dadurch erleichtert werden, dass man zunächst die Felder aller Einzelleiter und durch deren *Überlagerung* das gesuchte *resultierende Feld* ermittelt. Die in einem Feldpunkt für jeden Einzelleiter berechneten Feldvektoren werden also geometrisch addiert. Dieses Verfahren ist (wie alle Überlagerungsverfahren) aber nur in *linearen Anordnungen* zulässig, d. h. in solchen Räumen, in denen die Permeabilität μ von der magnetischen Flussdichte unabhängig ist. Für Anordnungen, die ferromagnetische Stoffe enthalten, ist dieses Verfahren also prinzipiell nicht anwendbar.

Als einfaches Beispiel mit großer praktischer Bedeutung wird das Feld von zwei geraden, parallelen Leitern nach Bild 4.21b betrachtet. Diese Anordnung liegt überall dort vor, wo Hin- und Rückleitung eines Stromkreises parallel verlaufen (z. B. bei Freileitungen und Sammelschienen). Daher wird angenommen, dass die beiden Leiter in entgegengesetzter Richtung vom gleichen Strom I durchflossen sind. In der Leiterumgebung sollen sich keine ferromagnetischen Stoffe befinden.

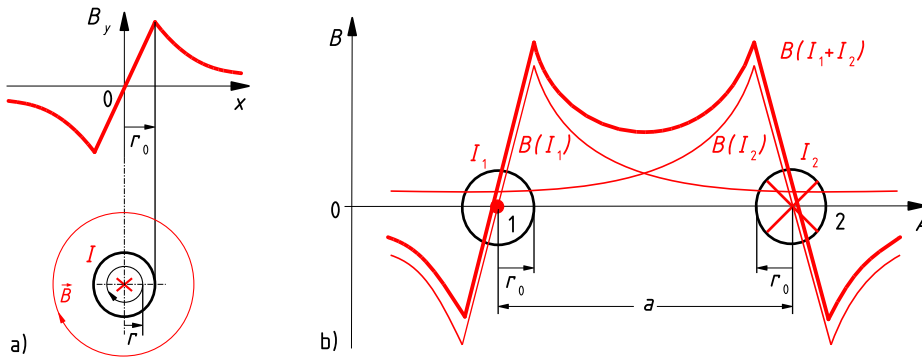


Bild 4.21: Verlauf der Komponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} , die orthogonal auf der Ebene steht, in der die Mittellinien der unendlich langen, geraden Leiter liegen bei
 a) einem stromdurchflossenen Einzelleiter,
 b) in entgegengesetzter Richtung von gleich großen Strömen $I_1 = I_2$ durchflossenen parallel zueinander liegenden Leitern

Für einen einzelnen unendlich langen geraden Leiter mit kreisförmigem Querschnitt ist das Feld der magnetischen Feldstärke \vec{H} in den Beispielen 4.4 und 4.5 berechnet worden. In Luft, Isolationsmaterialien und Kupfer hat μ_r praktisch den gleichen Wert 1. Daher ergibt sich mit Gl. (4.23) bzw. (4.25) in Beispiel 4.4 bzw. 4.5 der Betrag der magnetischen Flussdichte $B = \mu H$ außerhalb des Leiters

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sim \frac{1}{r}$$

und innerhalb des Leiters

$$B_i = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_0^2} \sim r.$$

Die \vec{B} -Feldlinien sind konzentrische Kreise, wie in den Bildern 4.11 und 4.12 dargestellt. In einer Schnittebene, die die Leiterachse enthält, hat \vec{B} in jedem Punkt nur eine Komponente, die senkrecht auf diese Ebene steht. Legt man die x-Achse senkrecht zur Leiterachse in diese Ebene und die y-Achse rechwendig senkrecht zur x-Achse und zur Leiterachse, kann man die y-Komponente von \vec{B} wie in Bild 4.21a darstellen.

Für die Doppelleitung nach Bild 4.21b lässt sich das resultierende Feld durch Überlagerung der Felder der Einzelleiter bestimmen. Hier wird nur das Feld in der Ebene betrachtet, in der die Mittellinien der Leiter 1 und 2 liegen. In Bild 4.21b sind die zur Schnittebene orthogonalen Komponenten der magnetischen Flussdichten $\vec{B}(I_1)$ und $\vec{B}(I_2)$ der Einzelfelder, die von den Leiterströmen I_1 bzw. I_2 erzeugt werden, unter Beachtung der unterschiedlichen Stromrichtungen aufgetragen. Die magnetische Flussdichte \vec{B} weist nach oben, wenn die orthogonale Komponente von \vec{B} positiv, und nach unten, wenn diese Komponente von \vec{B} negativ ist.

Das resultierende Feld $B(I_1, I_2)$ in der Schnittebene kann somit durch algebraische Addition der Kurven $B(I_1)$ und $B(I_2)$ ermittelt werden und ergibt die in Bild 4.21b dick ausgezogene Kurve. Zwischen den Leitern addieren sich die Einzelfelder zu einem verstärkten, nach oben gerichteten resultierenden Feld. Außerhalb der Leiter subtrahieren sich die Einzelfelder zu einem abgeschwächten, nach unten gerichteten resultierenden Feld.

Beispiel 4.11: Überlagerung der Magnetfelder dreier paralleler Leiter

Für die Umgebung der in Bild 4.22a skizzierten Leiteranordnung eines Dreiphasensystems soll das magnetische Feld berechnet werden. Die Leiter liegen in Luft ($\mu = \mu_0$) in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit 20 cm Seitenlänge. Sie verlaufen parallel zueinander und können als unendlich lang angenommen werden.

Zur Demonstration des grundsätzlichen Rechengangs soll die magnetische Flussdichte \vec{B} in den Punkten A, B und C für denjenigen Zeitpunkt bestimmt werden, zu dem die Augenblickswerte der Ströme für die eingezeichneten Stromzählpfeile (alle drei weisen in die Bildebene hinein) $I_1 = -100$ A und $I_2 = I_3 = +50$ A betragen.

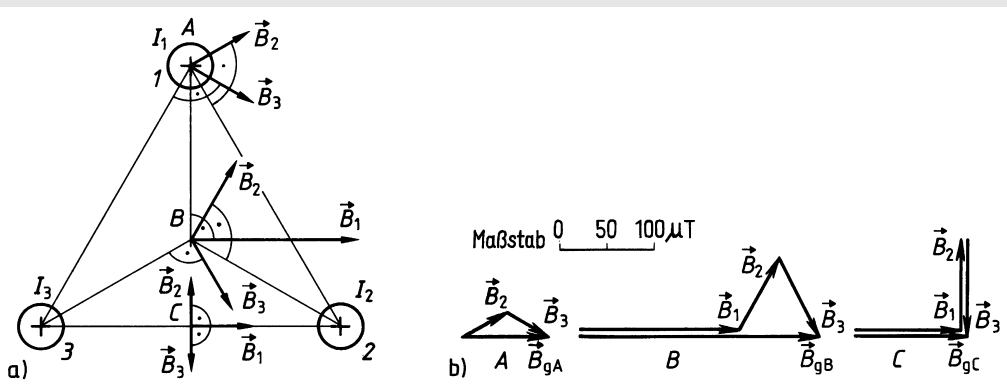


Bild 4.22: Überlagerung der magnetischen Felder stromdurchflossener Einzelleiter
 a) in den Punkten A, B und C bewirkte magnetische Flussdichte (Beträge sind nicht maßstäblich gezeichnet) der Einzelleiter 1, 2 und 3,
 b) geometrische Addition der Einzel-Flussdichten für die Punkte A, B, C

Punkt A liegt in der Mitte von Leiter 1, sodass hier vom Strom I_1 keine magnetische Flussdichte erregt wird ($B_1 = 0$). Die Leiter 2 und 3 sind $r_{A2} = r_{A3} = r_A = 20$ cm entfernt, sodass sie mit $B = \mu H$ je die Beträge der magnetischen Flussdichte

$$B_2 = B_3 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_A} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}) 50 \text{ A}}{2\pi \cdot 20 \text{ cm}} = 50 \mu\text{T}$$

erzeugen. Da diese magnetischen Flussdichten nicht gleich gerichtet sind, müssen sie ihrer Richtung entsprechend vektoriell addiert werden. Das ist grafisch in Bild 4.22b durchgeführt. Die magnetische Flussdichte \vec{B}_2 liegt senkrecht zur Verbindungslinie A–2, rechtswendig um I_2 (Bild 4.22a), \vec{B}_3 liegt senkrecht zu A–3, rechtswendig um I_3 . Mit dem in Bild 4.22b angegebenen Maßstab ergibt sich der Betrag der resultierenden magnetischen Flussdichte $B_{gA} = 87 \mu\text{T}$.

Punkt B hat zu den drei Leitern die gleiche Entfernung $r_{B1} = r_{B2} = r_{B3} = r_B = 20 \text{ cm}/\sqrt{3} = 11,6$ cm. Der Strom I_1 erzeugt gemäß Gl. (4.10) an der Stelle B den Betrag der magnetischen Flussdichte

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_B} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}) 100 \text{ A}}{2\pi \cdot 11,6 \text{ cm}} = 172 \mu\text{T},$$

während B_2 und B_3 infolge der halb so großen Ströme $I_2 = I_3 = 50$ A nur halb so groß sind ($B_2 = B_3 = 0,5 B_1 = 86 \mu\text{T}$).

Bei der in Bild 4.22b skizzierten Überlagerung der drei magnetischen Flussdichten ist zu beachten, dass \vec{B}_2 und \vec{B}_3 rechtswendig der Stromdichte \vec{J} , also den Zählpfeilen für I_2 und I_3 , \vec{B}_1 aber linkswendig dem Zählpfeil für I_1 zuzuordnen ist, da I_2 und I_3 mit positivem, I_1 aber negativem Zahlenwert angegeben ist. Als Ergebnis liefert die grafische Addition $B_{gB} = 258 \mu\text{T}$.

In **Punkt C** tritt nur die magnetische Flussdichte \vec{B}_1 auf, verursacht durch I_1 im Leiter 1, da sich die gleich großen Teilflussdichten B_2 und B_3 aufheben. In ähnlichen Rechnungen wie vorher erhält man $B_1 = 116 \mu\text{T}$ und $B_2 = B_3 = 100 \mu\text{T}$. Der Betrag der resultierenden magnetischen Flussdichte ist $B_{gC} = B_1 = 116 \mu\text{T}$.

Die grafische Ermittlung überlagerter Felder ist auch in den Bildern 4.62 und 4.63 gezeigt.

4.1.5 Magnetisches Feld in Materie

In Materie bildet sich das Magnetfeld anders aus als im Vakuum. Da als Ursache des Magnetfeldes bewegte Ladungen angesehen werden, müssen in der Materie Ladungsbewegungen stattfinden, die ein – der Materie eigenes – zusätzliches Magnetfeld erzeugen. Für die hier interessierende makroskopische Beschreibung des Feldes kann auf die Erklärung der komplizierten Vorgänge auf atomarer Ebene verzichtet werden. Es genügt die einfache Modellvorstellung, dass sich im Inneren der Materie mikrokosmische Kreisströme Δi ausbilden, die jeweils ein zu ihrer Kreisbahn senkrecht stehendes Elementarfeld $\Delta \vec{B}$ verursachen (Bild 4.23). Da selbst diese grobe Modellvorstellung als Grundlage einer quantitativen Berechnung zu kompliziert ist, begnügt man sich in den Ingenieurwissenschaften damit, wie schon in Abschnitt 4.1.2.3 beschrieben, das resultierende Elementarfeld \vec{B} über die relative Permeabilität μ_r zu berücksichtigen.

4.1.5.1 Verhalten von Materie im Magnetfeld

Hinsichtlich ihres magnetischen Verhaltens kann Materie aus der in der Praxis interessierenden makroskopischen Sicht in die im Folgenden beschriebenen Gruppen unterteilt werden. Dabei wird auf die oben erwähnte Modellvorstellung Bezug genommen, nach der in Materie elementare Kreisströme Δi auftreten. Die von ihnen erregten *Elementarfelder* $\Delta \vec{B}$ sind im unmagnetisierten Zustand so unregelmäßig orientiert (Bild 4.23a), dass kein resultierendes Feld nach außen in Erscheinung tritt.

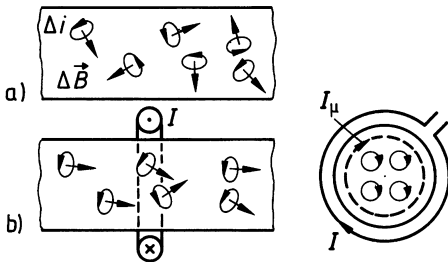


Bild 4.23: Zur Modellvorstellung innerer Elementarfelder $\Delta \vec{B}$ in Materie

a) unregelmäßig orientiert ohne äußere Erregung,

b) regelmäßig orientiert bei äußerer Erregung durch den makroskopischen Strom I

I_μ resultierender Kreisstrom der mikroskopischen Elementarströme Δi

Bleibt in einer Materie die *regellose Orientierung* der Elementarfelder auch dann erhalten, wenn in ihr ein von außen eingepprägtes magnetisches Feld auftritt, spricht man von einem *magnetisch neutralen Stoff*, für den die relative Permeabilität $\mu_r = 1$ ist, z. B. Luft.

In magnetisch nicht neutralen Stoffen orientieren sich die Elementarströme Δi unter Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes in einer Richtung (Bild 4.23b), d. h. es bildet sich eine resultierende innere Erregung I_μ aus, die ein zusätzliches, inneres Magnetfeld erzeugt, das sich dem äußeren überlagert.

In *diamagnetischen Stoffen* wirken die inneren Erregungen dem äußeren Feld entgegen und schwächen dieses ($\mu_r < 1$). Die bekannten diamagnetischen Stoffe bilden aber nur ein äußerst geringes Gegenfeld aus (z. B. Wismut: $\mu_r = 1 - 0,16 \cdot 10^{-3}$). Für diamagnetische Stoffe hat die relative Permeabilität μ_r *unabhängig von* B bzw. H einen *konstanten* Wert; die Stoffe sind also magnetisch linear.

Materie, in der die innere Erregung *verstärkend* das äußere Feld verstärkt, unterteilt man in zwei Gruppen: *Paramagnetische Stoffe* zeigen wie die diamagnetischen nur eine äußerst schwache, allerdings verstärkende Wirkung auf das äußere Feld ($\mu_r > 1$) (z. B. Palladium: $\mu_r = 1 + 0,78 \cdot 10^{-3}$). Auch für paramagnetische Stoffe ist μ_r eine *konstante* Größe, die nicht von B bzw. H abhängt; sie sind also magnetisch ebenfalls linear.

In *ferromagnetischen Stoffen* treten sehr *große verstärkende* innere Erregungen auf (μ_r bis ca. 10^5), die aber mehr oder weniger stark *abhängig sind von der magnetischen Feldstärke* innerhalb des Stoffes. Die relative Permeabilität $\mu_r = f(H)$ ist für ferromagnetische Stoffe also keine Konstante, sondern eine Funktion der magnetischen Feldstärke H . Außerdem fallen die einmal durch ein äußeres Feld in eine bestimmte Richtung orientierten Elementarströme und die von ihnen verursachten Elementarfelder nach Verschwinden des äußeren Feldes nicht vollständig wieder in ihre regellose Ausgangslage zurück, d. h. es bleibt ein der Materie eigenes Feld bei diesen Stoffen zurück. Je nachdem, in welcher Stärke das Eigenfeld bestehen bleibt, unterscheidet man *weichmagnetische Stoffe* und *hartmagnetische Stoffe*.

4.1.5.2 Brechung magnetischer Feldlinien an Grenzflächen

Tritt ein magnetisches Feld durch die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Permeabilität, so ändern \vec{B} und \vec{H} beim Übertritt i. a. ihren Betrag und ihre Richtung.

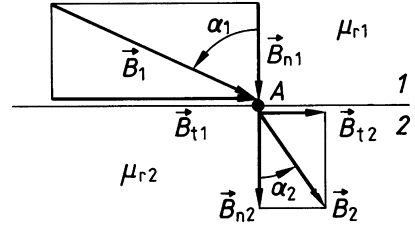


Bild 4.24: Brechung einer magnetischen Feldlinie an der Grenzfläche zwischen Medien unterschiedlicher Permeabilität

Betrachtet wird die Umgebung eines Punktes A in der Grenzfläche zwischen zwei Materialien 1 und 2 mit den relativen Permeabilitäten μ_{r1} bzw. μ_{r2} gemäß Bild 4.24. Die magnetischen Flussdichtevektoren \vec{B}_1 bzw. \vec{B}_2 auf den beiden Seiten der Grenzfläche sind jeweils in ihre Normalkomponenten \vec{B}_{n1} bzw. \vec{B}_{n2} und ihre Tangentialkomponenten \vec{B}_{t1} bzw. \vec{B}_{t2} bezüglich der Grenzfläche zerlegt dargestellt.

Aus der Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte folgt

$$\vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2} = \vec{B}_n. \quad (4.58)$$

In der Grenzfläche existiert keine elektrische Durchflutung. Daraus folgt mit dem Durchflutungssatz

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \text{oder} \quad \frac{B_{t1}}{\mu_{r1} \mu_0} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2} \mu_0}. \quad (4.59)$$

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Flussdichte B_{t1} und B_{t2} verhalten sich also wie die relativen Permeabilitäten der Materialien:

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad (4.60)$$

Mit dem *Einfallswinkel* α_1 und den *Ausfallwinkel* α_2 der magnetischen Feldlinien nach Bild 4.24 folgt

$$\tan \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_n}; \quad \tan \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_n}.$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (4.60) das *Brechungsgesetz für magnetische Feldlinien an Grenzflächen*

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}. \quad (4.61)$$

Hat beispielsweise das Medium 1 eine sehr große relative Permeabilität μ_{r1} (z. B. Eisen), das Medium 2 dagegen eine kleine relative Permeabilität μ_{r2} (z. B. Luft), so ist auch der Winkel α_1 sehr viel größer als der Winkel α_2 . Da Eisen eine um mehrere Zehnerpotenzen größere Permeabilität als Luft aufweist, ist α_2 meist sehr klein.

Daraus folgt, dass die magnetischen Feldlinien in der Regel aus Eisen *fast senkrecht in die Luft* austreten.

4.2 Magnetisches Feld in Ferromagnetika

In diesem Abschnitt werden Anordnungen behandelt, in denen das magnetische Feld hauptsächlich in ferromagnetischen Materialien (kurz als „Eisen“ bezeichnet) verläuft.

Die gute magnetische Leitfähigkeit ferromagnetischer Materialien wird dazu genutzt, den magnetischen Fluss so zu leiten, wie es für bestimmte Anwendungen besonders vorteilhaft ist.

In solchen „Eisenkreisen“ interessieren von den vektoriellen (\vec{H} , \vec{B}) und skalaren (Θ , Φ , Ψ) magnetischen Feldgrößen in vielen Fällen nur die Beträge, was die Berechnung stark vereinfacht. Daher wird in diesem Abschnitt in der Regel nur mit den Beträgen dieser Größen argumentiert.

Die Genauigkeit der unter Verwendung der hier vorgestellten Verfahren ermittelten Rechenergebnisse sollte nicht überschätzt werden, da sie auf stark vereinfachenden Annahmen beruhen. In der Regel ist daher bei Endergebnissen die Angabe von Zahlenwerten mit mehr als zwei signifikanten Ziffern nicht sinnvoll, da sonst eine nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht würde.

4.2.1 Ferromagnetische Eigenschaften

Die auffallendsten Kennzeichen ferromagnetischer Werkstoffe sind die extreme Verstärkung der magnetischen Flussdichte B und die Abhängigkeit dieser Wirkung vom Wert der magnetischen Feldstärke H . Dieses quantitativ wie auch qualitativ gegenüber dem der paramagnetischen Materie unterschiedliche Verhalten erklärt sich aus dem grundsätzlich anderen magnetischen Wirkungsmechanismus im atomaren bzw. molekularen Bereich.

Der Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke H und magnetischer Flussdichte B wird bestimmt durch die Art des ferromagnetischen Materials und seine *Vorgeschichte*, d. h. durch den Magnetisierungszustand, der zuletzt eingestellt war. Außerdem wird dieser Zusammenhang von der Temperatur und eventuell vorhandenen mechanischen Spannungen innerhalb des Materials beeinflusst.

Die Magnetisierungsvorgänge in Ferromagnetika sind äußerst kompliziert. Daher werden sie für praktische Anwendungen nicht analytisch auf die Vorgänge in der Mikrostruktur zurückgeführt, sondern über die experimentell aufgenommene Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B von der magnetischen Feldstärke H beschrieben. Dabei kann die Abhängigkeit der magnetischen Materialeigenschaften von der Vorgeschichte oftmals vernachlässigt werden (Abschnitt 4.2.1.2). Die so ermittelte Funktion $B = f(H)$ wird meist grafisch dargestellt und den Berechnungen zugrundegelegt. Für den Einsatz in Programmen zur numerischen Feldberechnung muss eine grafisch vorliegende Funktion $B = f(H)$ tabelliert oder durch einen analytischen Ausdruck approximiert werden.

Die Permeabilität μ oder die relative Permeabilität $\mu_r = \mu/\mu_0$ kann aus dem experimentell aufgenommenen Zusammenhang $B = f(H)$ über $\mu = B/H$ bzw. $\mu_r = B/(\mu_0 H)$ als Funktion der magnetischen Feldstärke $\mu_r = f(H)$ oder auch der magnetischen Flussdichte $\mu_r = f(B)$ berechnet und dargestellt werden.

4.2.1.1 Hystereseschleife

Wird in den Innenraum der Toroidspule nach Bild 4.7 ein ferromagnetischer Kern eingebracht bzw. die Spule um einen ferromagnetischen Ring gewickelt und speist man diese mit einem nach Richtung und Betrag einstellbaren Erregerstrom I , so lässt sich die zur Mittellinie der Spule parallele Komponente der magnetischen Flussdichte B in Abhängigkeit von der Feldstärke $H = NI/l$ ermitteln.

Die experimentell aufgenommenen Kurven $B = f(H)$ zeigen grundsätzlich den in Bild 4.25 dargestellten Verlauf mit folgenden typischen Eigenschaften:

- Die Flussdichte B im Ferromagnetikum ist *wesentlich* größer als sie bei gleicher magnetischer Feldstärke H in Luft auftreten würde.
- Die Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B von der magnetischen Feldstärke H ist stark *nichtlinear*.
- Die Abhängigkeit $B = f(H)$ ist *nicht eindeutig*. Bei ansteigender magnetischer Feldstärke H werden (für gleiche H -Werte) kleinere Flussdichtewerte B ermittelt als bei fallender.

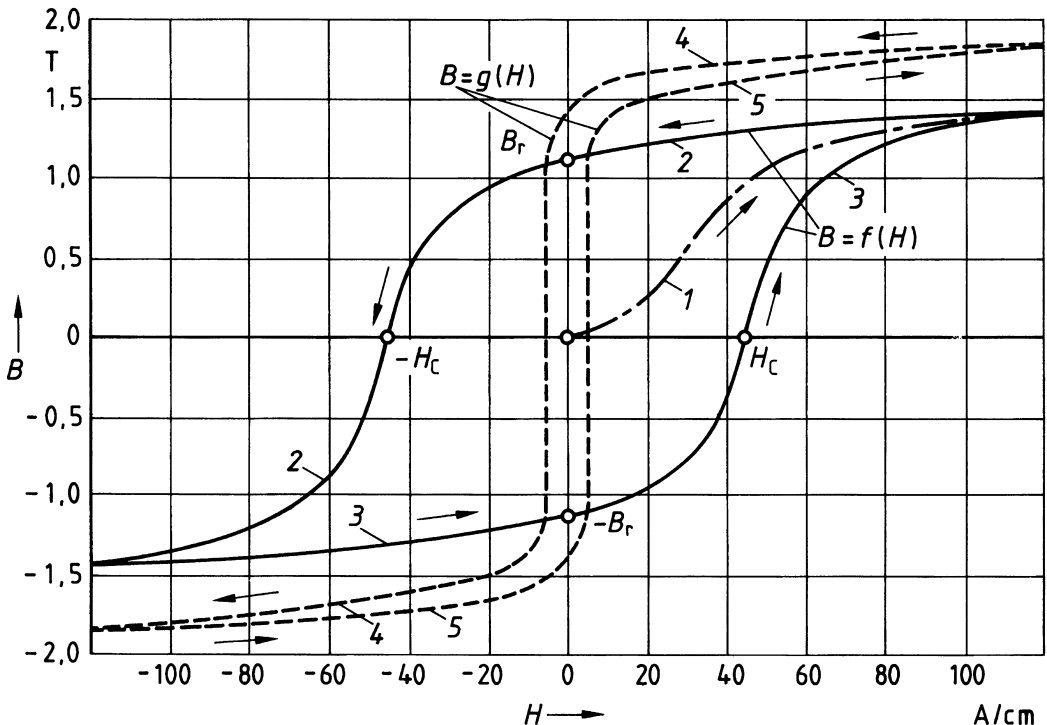


Bild 4.25: Hystereseschleifen $B = f(H)$ einer magnetisch harten (2, 3) und $B = g(H)$ einer magnetisch weichen (4, 5) Eisensorte
 Neukurve der harten Eisensorte (1);
 B_r Remanenzflussdichte; H_c Koerzitivfeldstärke

Wird ein bestimmtes Ferromagnetikum (hier Eisen) vom völlig unmagnetisierten Zustand ausgehend aufmagnetisiert, gilt bei $I = 0$ und damit $H = 0$ auch $B = 0$. Mit zunehmendem H steigt B nach einer Kurve an, die als *Neukurve* (Kurve 1 in Bild 4.25) bezeichnet wird.

Wird (im hier betrachteten Beispiel bei etwa $H = 120 \text{ A/cm}$, $B = 1,4 \text{ T}$) die Feldstärke H zunächst verringert und danach in umgekehrter Richtung wieder erhöht, nimmt die magnetische Flussdichte B nicht nach der Neukurve 1, sondern nach dem Zweig 2 der durchgezogenen Kurve $B = f(H)$ ab (im in Bild 4.25 betrachteten Beispiel bis $H = -120 \text{ A/cm}$, $B = -1,4 \text{ T}$).

Steigt von diesem Punkt, dem *Umkehrpunkt*, ausgehend, die magnetische Feldstärke H wieder an, so steigt die magnetische Flussdichte B nicht wieder auf dem Zweig 2, sondern auf dem Zweig 3 der durchgezogenen Kurve in Bild 4.25 an, bis der positive Umkehrpunkt (hier bei $H = 120 \text{ A/cm}$, $B = 1,4 \text{ T}$) wieder erreicht ist.

Ein entsprechend bei einer anderen Eisensorte aufgenommener Verlauf $B = g(H)$ ist in Bild 4.25 als gestrichelte Kurve mit den Zweigen 4 und 5 skizziert.

Das beschriebene Experiment zeigt, dass bei der Magnetisierung von Ferromagnetika zu einer bestimmten magnetischen Feldstärke H unterschiedliche Flussdichtewerte B gehören. Der Unterschied zwischen den zu einem H -Wert gehörenden B -Werten – der Abstand zwischen dem auf- und dem absteigenden Zweig der Kurve $B = f(H)$ – ist einerseits abhängig vom Material und zum anderen davon, bis zu welchen maximalen Flussdichtewerten (Umkehrpunkten) die Magnetisierung erfolgt ist, was durch Bild 4.26) verdeutlicht werden soll.

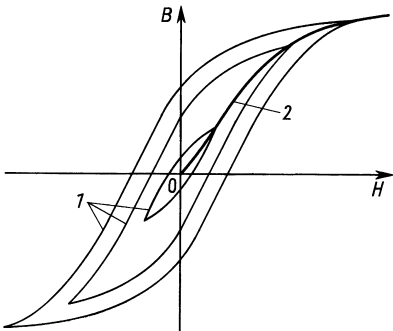


Bild 4.26: Hystereseschleifen (1) und Magnetisierungskurve (2) eines bestimmten Ferromagnetikums

Die in den Bildern 4.25 und 4.26 dargestellten zyklischen Magnetisierungsverläufe werden als *Hystereseschleifen* bezeichnet.

Ferromagnetika mit schmaler Hystereseschleife nennt man *magnetisch weich*, solche mit breiter Schleife *magnetisch hart*, da sie sich nur mit größerem Aufwand ummagnetisieren lassen.

Gekennzeichnet ist die Breite der Hystereseschleifen durch die *Koerzitivfeldstärke* H_c bei der magnetischen Flussdichte $B = 0$ und die *Remanenzflussdichte* B_r , die beim Abschalten des erregenden Stroms ($H = 0$) verbleibt (Bild 4.25).

Die von einer Hystereseschleife eingeschlossene Fläche A_H ist proportional der Feldenergie, die pro *Ummagnetisierungszyklus* in dem Ferromagnetikum in Wärme umgesetzt wird. Diese *Hystereseverlustenergie* wird bei der Ummagnetisierung der magnetischen Elementardipole in der Mikrostruktur dem Magnetfeld entzogen und durch Reibung in Wärme umgewandelt (vergleiche Abschnitt 4.3.2.1, letzter Absatz).

4.2.1.2 Magnetisierungskurve

Bei schmalen Hystereseschleifen, wie sie z. B. für Ferromagnetika gelten, die für Wechselstrommagnetisierung geeignet sind, wird den Berechnungen in der Regel nicht die vollständige Hystereseschleife, sondern eine *mittlere Kommutierungskurve* zugrunde gelegt. Diese als Kommutierungs- oder *Magnetisierungskurve* bezeichnete Funktion ist die *Verbindungsline aller Umkehrpunkte* der bis zu unterschiedlichen maximalen magnetischen Flussdichten aufgenommenen Hystereseschleifen (Kurve 2 in Bild 4.26).

In Bild 4.27 sind Magnetisierungskurven für verschiedene technisch wichtige, magnetisch weiche Werkstoffe dargestellt. Alle Kurven zeigen den für ferromagnetische Stoffe typischen Verlauf, den Übergang in die *Sättigung*. Die magnetische Flussdichte B steigt mit zunehmender Feldstärke H von $H = 0$ aus zunächst steil an und geht dann mit einer mehr oder weniger scharf ausgeprägten Krümmung in einen extrem flachen Anstieg über, der sich asymptotisch einer Tangente mit der Steigung $dB/dH = \mu_0$ nähert. Der Bereich des kleiner werdenden *Anstiegs* der Kurve $B = f(H)$ wird als *Sättigungsbereich* bezeichnet. Man sagt, das Ferromagnetikum komme in die Sättigung oder sei gesättigt.

Das „Sättigungsknie“ liegt bei den meisten Eisensorten zwischen etwa 1,0 T und 1,5 T. Im darüber liegenden Bereich erfordert eine Vergrößerung von B eine unverhältnismäßig große Steigerung von H und damit der elektrischen Durchflutung. Daher werden magnetische Flussdichten in höheren Sättigungsbereichen möglichst vermieden.

Beispiel 4.12: Magnetisierung von Elektrolech

Für einen Ringkern aus Elektrolech (Material I in Bild 4.27) mit dem mittleren Durchmesser $d_{\text{mi}} = 20 \text{ cm}$ sollen verschiedene Magnetisierungszustände berechnet werden.

- a) Wie groß müssen die elektrischen Durchflutungen Θ_1 bzw. Θ_2 sein, wenn die magnetischen Flussdichten $B_1 = 0,9 \text{ T}$ bzw. $B_2 = 1,8 \text{ T} = 2 B_1$ erzeugt werden sollen?

Für $B_1 = 0,9 \text{ T}$ ist nach der Magnetisierungskurve in Bild 4.27 die magnetische Feldstärke $H_1 = 2,0 \text{ A/cm}$ erforderlich, für $B_2 = 1,8 \text{ T}$ jedoch $H_2 = 160 \text{ A/cm}$. Aus der mittleren Länge $l = \pi d_{\text{mi}} = \pi \cdot 20 \text{ cm} = 62,8 \text{ cm}$ der Feldlinien folgen die erforderlichen elektrischen Durchflutungen:

$$\Theta_1 = H_1 l = (2,0 \text{ A/cm}) \cdot 62,8 \text{ cm} = 126 \text{ A}$$

$$\Theta_2 = H_2 l = (160 \text{ A/cm}) \cdot 62,8 \text{ cm} = 10.050 \text{ A}$$

Hier zeigt sich der typische Einfluss der Sättigung, infolge der die doppelte magnetische Flussdichte die rund 80-fache elektrische Durchflutung erfordert.

- b) Welche relativen Permeabilitäten μ_{r1} und μ_{r2} hat das Elektrolech in den beiden Magnetisierungsfällen? Mit Gl. (4.13) und Gl. (4.14) erhält man:

$$\mu_{r1} = \frac{B_1}{\mu_0 H_1} = \frac{0,9 \text{ T}}{(1,257 \mu\text{H/m}) 2,0 \text{ A/cm}} = 3580$$

$$\mu_{r2} = \frac{B_2}{\mu_0 H_2} = \frac{1,8 \text{ T}}{(1,257 \mu\text{H/m}) 160 \text{ A/cm}} = 89,5$$

Beispiel 4.12 zeigt die starke Abhängigkeit der Permeabilität von der magnetischen Feldstärke.

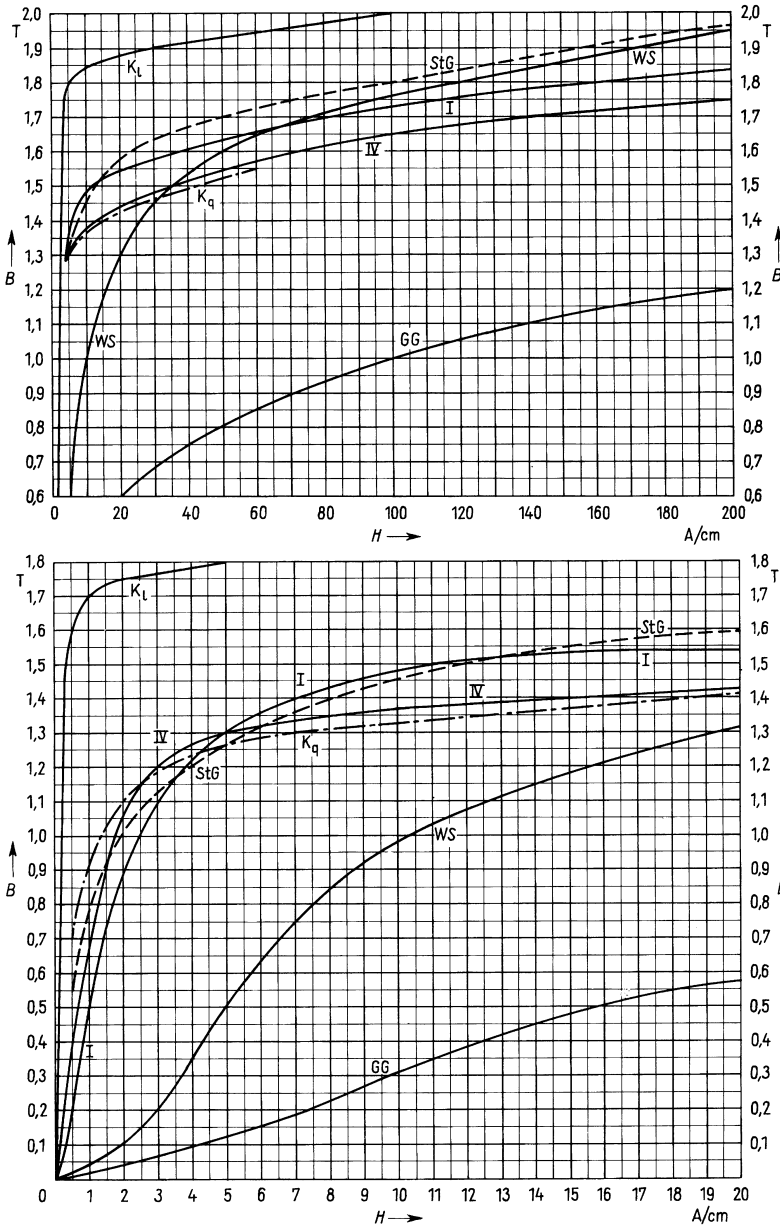


Bild 4.27: Magnetisierungskurven von magnetisch weichen Werkstoffen
 I und IV Elektroblech unterschiedlicher Magnetisierungs- und Verlusteigenschaften (Blechsorten hoher Sättigungsflussdichten haben hohe spezifische Ummagnetisierungsverlustleistungen und umgekehrt);
 K_L kaltgewalztes, kornorientiertes Blech in Walzrichtung,
 K_q dasselbe, quer zur Walzrichtung magnetisiert;
 GG Grauguss, StG Stahlguss, WS Walzstahl

Beispiel 4.13: Magnetfeld in einem Eisenring

Zwei Leiter mit den Strömen $I_1 = 100 \text{ A}$ und $I_2 = 200 \text{ A}$ sind gemäß Bild 4.28 durch einen Stahlgussring mit der konstanten Querschnittsfläche A und dem mittleren Durchmesser $d_{\text{mi}} = 10 \text{ cm}$ geführt.

Wie groß ist die magnetische Flussdichte im Ring?

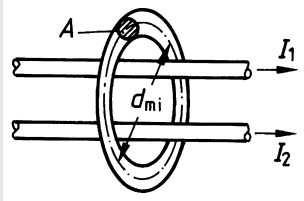


Bild 4.28: Zur Berechnung des Magnetfeldes in einem Eisenring um zwei stromdurchflossene Leiter

Da die Permeabilität des Eisens sehr groß ist gegenüber der der Luft ($\mu_{\text{rFe}} \gg 1$), konzentriert sich der magnetische Fluss im Stahlgussring. Im Ring stellt sich eine über dem Ringumfang näherungsweise konstante magnetische Flussdichte B und damit auch näherungsweise konstante magnetische Feldstärke H ein, obwohl die elektrische Durchflutung $\Theta = I_1 + I_2$ nicht symmetrisch zum Ringmittelpunkt liegt.

Damit gilt für den mittleren Umfang des Stahlgussrings nach dem Durchflutungssatz

$$\oint \vec{H} \, d\vec{l} = H \pi d_{\text{mi}} = \Theta = I_1 + I_2,$$

aus dem sich die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I_1 + I_2}{\pi d_{\text{mi}}} = \frac{(100 + 200) \text{ A}}{\pi \cdot 10 \text{ cm}} = 9,55 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

ergibt.

Aus der Magnetisierungskurve für Stahlguss in Bild 4.27 folgt die magnetische Flussdichte $B = f(H = 9,55 \text{ A/cm}) = 1,44 \text{ T}$.

Um zu zeigen, dass bei der hier vorliegenden Nichtlinearität das Verfahren der Überlagerung der Einzelfelder nicht zulässig ist, werden die Einzelflussdichten, die *jeweils für nur einen der beiden Ströme I_1 oder I_2* auftreten würden, bestimmt. Analog zu obigem Rechengang ergeben sich

$$H(I_1) = \frac{I_1}{\pi d_{\text{mi}}} = \frac{100 \text{ A}}{\pi \cdot 10 \text{ cm}} = 3,18 \frac{\text{A}}{\text{cm}} \quad \text{und} \quad B(I_1) = 1,14 \text{ T},$$

$$H(I_2) = \frac{I_2}{\pi d_{\text{mi}}} = \frac{200 \text{ A}}{\pi \cdot 10 \text{ cm}} = 6,36 \frac{\text{A}}{\text{cm}} \quad \text{und} \quad B(I_2) = 1,33 \text{ T}.$$

Die Summe der Teilflussdichten $B(I_1) + B(I_2) = 2,47 \text{ T}$ ist also wesentlich größer als die sich tatsächlich einstellende magnetische Flussdichte $B(I_1 + I_2) = 1,44 \text{ T}$, die nur aus der resultierenden Durchflutung berechnet werden darf.

4.2.1.3 Permeabilität und Suszeptibilität

Aus der in den letzten Abschnitten beschriebenen Abhängigkeit $B = f(H)$ ergibt sich, dass bei ferromagnetischen Stoffen auch die Permeabilität $\mu = B/H$ sowohl von der magnetischen Feldstärke als auch von der jeweiligen Vorgeschichte des Magnetwerkstoffs abhängig ist.

Für praktische Rechnungen wird die Permeabilität $\mu = \mu_0 \mu_r = B/H$ als Quotient aus der magnetischen Flussdichte B und der magnetischen Feldstärke H üblicherweise nicht aus der Hystereseschleife, sondern aus der Magnetisierungskurve berechnet und ist somit eine *eindeutige* Funktion von H oder B . Da die magnetische Feldkonstante μ_0 unabhängig von H ist, wird meist die *relative Permeabilität*

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = f(H) \quad (4.62)$$

berechnet und als Funktion von H dargestellt. Ihr für Eisen typischer Verlauf ist in Bild 4.29 skizziert.

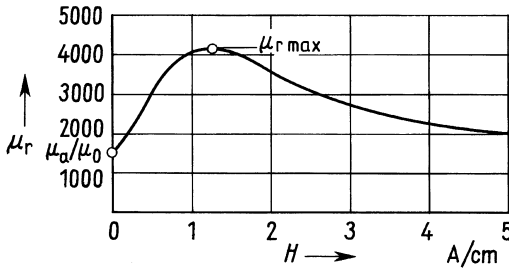


Bild 4.29: Permeabilitätskurve von Elektroblech nach der Magnetisierungskurve I in Bild 4.27

μ_a Anfangspermeabilität

μ_{rmax} maximale relative Permeabilität

Der Maximalwert μ_{rmax} der relativen Permeabilität liegt abhängig von der Eisensorte in der Größenordnung von 5000.

Praktische Bedeutung hat auch eine *Wechselmagnetisierung* im Bereich ΔB um eine zeitlich konstante *Vormagnetisierung* B_A , die den *Arbeitspunkt* A bestimmt. Die dabei durchlaufenen Magnetisierungszustände werden durch eine lanzettenförmige Kurve beschrieben, wie sie in Bild 4.30b schematisch dargestellt ist.

Die Steigung der Geraden durch die beiden Umkehrpunkte beschreibt näherungsweise dieses Magnetisierungsverhalten und wird als *reversible Permeabilität* bezeichnet (Bild 4.30b):

$$\mu_{rev} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (4.63)$$

Die reversible Permeabilität unterscheidet sich von der *differenziellen Permeabilität*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH}, \quad (4.64)$$

die die *Steigung der Magnetisierungskurve* bezogen auf einen bestimmten Arbeitspunkt A angibt. Die Unterschiede zwischen der reversiblen Permeabilität μ_{rev} , der differenziellen Permeabilität μ_d und der Permeabilität μ sind in Bild 4.30 dargestellt.

Die reversible und die differenzielle Permeabilität sind keine relativen Permeabilitäten vergleichbar μ_r , sondern Permeabilitäten entsprechend $\mu = \mu_r \mu_0$. Ebenso wird die Anfangspermeabilität μ_a im Allgemeinen nicht als relative Permeabilität $\mu_{ra} = \mu_a / \mu_0$ angegeben.

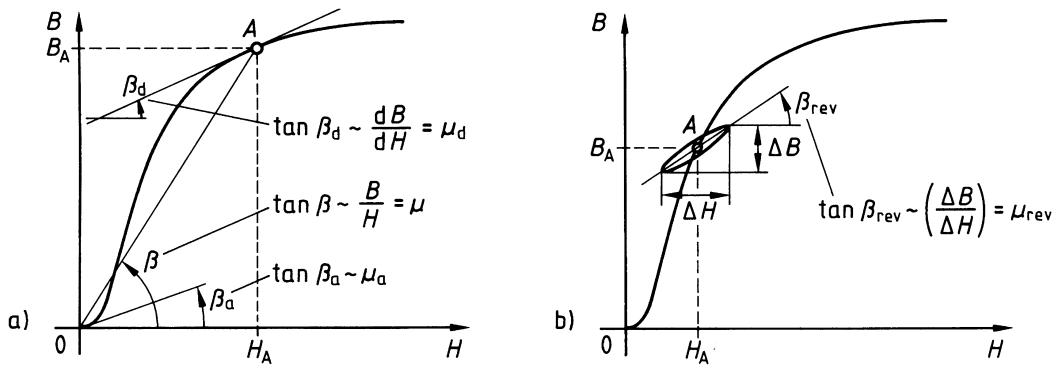


Bild 4.30: Grafische Darstellung der Permeabilitätsdefinitionen

- a) Permeabilität μ ; differentielle Permeabilität $\mu_d = dB/dH$ und Anfangspermeabilität μ_a
- b) reversible Permeabilität $\mu_{rev} = \Delta B/\Delta H$ (zum anschaulichen Vergleich der μ -Definitionen ist eine lanzettenförmige Magnetisierungsschleife nicht maßstabsgerecht vergrößert um die Magnetisierungskurve gezeichnet statt korrekt zwischen die Äste einer Hystereseschleife [Mün87])

Die relative Permeabilität μ_r hat den Charakter einer *Verstärkungszahl* für ein in Materie bewirktes Magnetfeld, da sie für das Vakuum zu $\mu_r = 1$ definiert ist. Dieser Verstärkungseffekt kommt durch eine *innere Feldstärke* \vec{H}_{Fe} des Ferromagnetikums zustande, die zusätzlich zu der aus dem äußeren Erregerstrom I berechneten *äußeren Feldstärke* \vec{H} auftritt. Beide lassen sich zu einer resultierenden Feldstärke ($\vec{H} + \vec{H}_{Fe}$) zusammenfassen. Wollte man mit dieser resultierenden magnetischen Feldstärke die in der Materie bewirkte magnetische Flussdichte \vec{B} berechnen, müsste dafür die relative Permeabilität $\mu_r = 1$ zugrunde gelegt werden, da der Materialeinfluss über \vec{H}_{Fe} bereits in der resultierenden Feldstärke ($\vec{H} + \vec{H}_{Fe}$) berücksichtigt ist. Für die magnetische Flussdichte gilt dann

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}_{Fe}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{H}_{Fe} = \vec{B}_0 + \vec{J}. \quad (4.65)$$

Darin ist \vec{B} die magnetische Flussdichte, die in der Materie von der magnetischen Feldstärke \vec{H} verursacht wird, die ihrerseits durch einen äußeren Strom hervorgerufen wird. Sie kann aufgefasst werden als Summe einer von der *äußeren magnetischen Feldstärke* \vec{H} verursachten magnetischen Flussdichtekomponente \vec{B}_0 und einer von der *inneren magnetischen Feldstärke* \vec{H}_{Fe} verursachten magnetischen Flussdichtekomponente \vec{J} , die als *magnetische Polarisation* bezeichnet wird [Fro94].

Bild 4.31 zeigt den prinzipiellen Verlauf der Beträge der drei magnetischen Flussdichten $\mu_0 H$, J und B für Ferromagnetika. Zur Kennzeichnung der qualitativen Unterschiede ist der quantitative Einfluss von $\mu_0 H$ übertrieben groß dargestellt. Mit praktischen Werten würde die Gerade $\mu_0 H$ nahezu auf der H -Achse verlaufen.

Auch bei sehr großen magnetischen Feldstärken H steigt B immer noch, da mit der äußeren Feldstärke H auch ihr direkter Beitrag $\mu_0 H$ zur magnetischen Flussdichte zunimmt. Mit zunehmendem H nähert sich B immer mehr der gestrichelten, mit μ_0 ansteigenden Geraden in

Bild 4.31. Demgegenüber strebt die magnetische Polarisation J einem Grenzwert zu, bei dem der mögliche Feldbeitrag durch die innere Erregung des Ferromagnetikums erreicht ist.

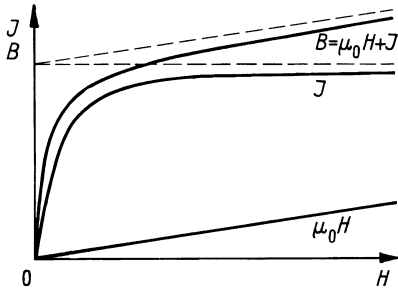


Bild 4.31: Beträge der magnetischen Flussdichten B , B_0 und der magnetischen Polarisation J gemäß Gl. (4.65), abhängig vom Betrag der magnetischen Feldstärke H (gestrichelte Geraden: Asymptoten zu B und J)

Aus der für die magnetischen Flussdichten aufgestellten Gl.(4.65) geht hervor, dass die magnetische Polarisation \vec{J} wie die magnetische Flussdichte \vec{B} Vektorcharakter hat. Wird die magnetische Polarisation \vec{J} in Abhängigkeit von der vom äußeren Strom I bewirkten Feldstärke \vec{H} dargestellt, so kann man unter Verwendung einer weiteren Werkstoffgröße χ_m auch

$$\vec{J} = \chi_m \mu_0 \vec{H}$$

schreiben und erhält dann für Gl. (4.65)

$$\vec{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad \text{also} \quad \mu_r = 1 + \chi_m. \quad (4.66)$$

Die Werkstoffgröße χ_m wird *Suszeptibilität* genannt. Sie stellt die Verbindung zwischen Gl. (4.13) und Gl. (4.65) her.

4.2.1.4 Dauermagnete

Wie in Abschnitt 4.2.1.1, insbesondere in Bild 4.25, gezeigt, bleibt in ferromagnetischen Stoffen grundsätzlich nach dem Abschalten des erregenden Stroms, also bei $H = 0$, noch eine Remanenzflussdichte B_r bestehen. Dauermagnete, auch *Permanentmagnete* genannt, sind metallische oder keramische Magnetwerkstoffe, bei denen dieser Remanenzzustand, in den sie durch eine einmalig aufgebrachte äußere Magnetisierung versetzt wurden, besonders ausgeprägt ist. Die äußere Magnetisierung wird im Allgemeinen durch die elektrische Durchflutung einer Spule realisiert. Für Dauermagnete eignen sich insbesondere Werkstoffe, die neben ausreichender Remanenz auch eine große Koerzitivfeldstärke H_c haben, damit merkliche entmagnetisierende Wirkungen erst bei möglichst großen magnetischen Gegenfeldstärken auftreten. Dauermagnetwerkstoffe mit großer technischer Bedeutung (z. B. für die Elektromobilität) sind insbesondere Legierungen aus Neodym-Eisen-Bor (Nd Fe B).

4.2.2 Berechnung des magnetischen Feldes in Eisenkreisen

Die geschlossene Berechnung inhomogener magnetischer Felder ist im allgemeinen Fall schwierig bis unmöglich, da der Durchflutungssatz zunächst nur den Wert des *Wegintegrals* der magnetischen Feldstärke liefert. Man kann daher nur Aufgaben lösen, bei denen der *qualitative Feldverlauf* bekannt ist, sodass der Durchflutungssatz nach der magnetischen Feldstärke aufgelöst werden kann. Diese Einschränkung ist aber oft bedeutungslos, da in der Mehrzahl der praktischen Aufgabenstellungen *magnetische Kreise* behandelt werden, die sich durch folgende Merkmale auszeichnen und als *Eisenkreise* bezeichnet werden:

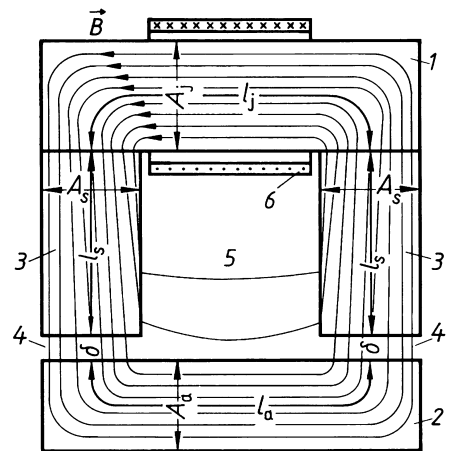
- Die magnetischen Feldlinien verlaufen zum weit überwiegenden Teil ihrer Länge in ferromagnetischem Material (das kurz als „Eisen“ bezeichnet wird) und nur zu einem sehr geringen Anteil in magnetisch neutralem Material (das kurz als „Luft“ bezeichnet wird).
- Der Eisenkreis läßt sich in einzelne Abschnitte einteilen, die jeweils aus magnetisch homogenem Material bestehen und meist eine konstante Querschnittsfläche aufweisen.
- Die Ortsabhängigkeit des Betrages der magnetischen Flussdichte B in einer beliebigen Fläche im Eisen, die senkrecht von den \vec{B} -Feldlinien durchsetzt wird, ist vernachlässigbar. In jeder solchen Querschnittsfläche kann also näherungsweise ein homogenes B -Feld angenommen werden.
- Der in Luftstrecken parallel zu den Eisenwegen auftretende magnetische Fluss ist vernachlässigbar klein.
- Die Bereiche, in denen das Magnetfeld in Luft verläuft (Luftspalte), werden durch *ebene Flächen A (Polflächen)* begrenzt, die *parallel* zueinander liegen und relativ zu ihrer Flächenausdehnung einen geringen Abstand haben. Dann kann zwischen den Polflächen ein näherungsweise homogenes Feld mit der magnetischen Flussdichte $B = \Phi/A$ angenommen werden.

4.2.2.1 Magnetische Streuung und Randverzerrung

Ist das Feld für einen bestimmten Eisenkreis zu berechnen, muss zunächst abgeschätzt werden, ob die oben genannten Voraussetzungen zutreffen. Dieses wird im Folgenden an einem aus Eisen- und Luftstrecken bestehenden Eisenkreis nach Bild 4.32 erläutert.

Bild 4.32: Typischer Eisenkreis

- 1 Joch
 - 2 Anker
 - 3 Schenkel (Pole)
 - 4 Luftspalt
 - 5 Fenster
 - 6 Erregerspule
- l_j, l_s, l_a Längen der Eisenwege
 A_j, A_s, A_a Eisenquerschnitte für Joch, Schenkel und Anker
 δ Luftspaltlänge
 $A_L = A_s$ Luftspaltquerschnitt



Wird der Fluss Φ in diesem Kreis durch einen Strom in der um das Joch 1 gewickelten Spule erzeugt, so verteilt er sich nicht, wie bei der Spule nach Bild 4.4a, symmetrisch zur Spulennachse im Raum. Vielmehr hat er den in Bild 4.32 grob schematisch angegebenen, durch die Form der Eisenteile bestimmten Verlauf.

Parallel zum Fluss über die *Luftspalte* 4 der Länge δ und den Anker 2 breitet sich nur ein relativ kleiner Teilfluss durch die das Eisen umgebende Luft aus, hauptsächlich durch das Fenster 5 zwischen den Schenkeln 3.

Die Größe der beiden Teilflüsse durch Luftspalt und *Anker* einerseits und das Fenster andererseits ist nach Abschnitt 4.1.3.4 durch das Verhältnis der magnetischen Widerstände beider Wege bestimmt.

Ist der durch den Anker 2 gehende Teil des Flusses für den beabsichtigten Zweck nutzbar, z. B. für die Kräfte auf diesen Anker, so wird er als *Nutzfluss* bezeichnet. Der durch die Luft neben dem beabsichtigten Weg „vorbeistreuende“ Teil des Flusses heißt *Streufloss*.

Überschlägig kann man die Anteile von magnetischem Nutz- und Streufloss aus dem magnetischen Widerstandsverhältnis der zugehörigen Wege nach Abschnitt 4.1.3.4 abschätzen. Dabei stellt man fest, dass merkliche Streuflüsse erst bei Sättigung des Eisens auftreten. Daher kann der Streufloss bei der Berechnung von Eisenkreisen häufig vernachlässigt werden.

Bei genauer Betrachtung des magnetischen Feldes in Luftspalten kann dieses nicht als homogen aufgefasst werden. Abhängig vom Verhältnis der Luftspaltlänge δ zur Breite b der Polflächen ergibt sich eine *Feldaufweitung* zum Rand des Luftspaltes hin ähnlich Bild 4.33.

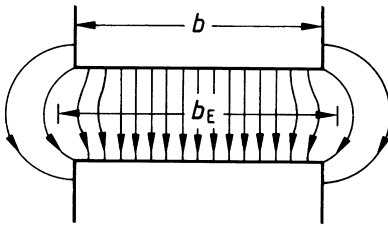


Bild 4.33: Randverzerrung des magnetischen Feldes im Luftspalt zwischen zwei Polflächen der Breite b mit eingezeichneter Ersatzluftspaltbreite b_E

Diese Feldverzerrung wird bei Berechnungen häufig dadurch berücksichtigt, dass eine *Ersatzluftspaltfläche* A_E eingeführt wird mit der in Bild 4.33 eingezeichneten Ersatzbreite

$$b_E = b(1 + K_L). \quad (4.67)$$

Die Ersatzbreite b_E bzw. der Faktor K_L ist in Abhängigkeit vom Verhältnis Luftspaltlänge δ zu Polbreite b abzuschätzen. Bei auch in der Tiefe begrenzten Polflächen ist zusätzlich ein Korrekturfaktor für diese Dimension anzusetzen. Da Luftspalte in magnetischen Kreisen in sehr vielen Anwendungsfällen möglichst klein ausgeführt werden, kann man in den meisten dieser Fälle die Randverzerrung des Feldes außer Acht lassen und für den Luftspaltquerschnitt die begrenzende Polfläche annehmen.

4.2.2.2 Berechnung der elektrischen Durchflutung

Praktisch ausgeführte Eisenkreise lassen sich nach den zu Anfang des Abschnitts 4.2.2 angeführten Erläuterungen in einzelne Abschnitte unterteilen, die jeweils homogen aus Eisen oder magnetisch neutralem Stoff bestehen. Innerhalb jedes Abschnitts kann das Feld wenigstens näherungsweise als homogen angesehen werden, wodurch eine Berechnung in vielen Fällen erst ermöglicht wird.

Bild 4.32 zeigt das Schema eines magnetischen Kreises, bei dem die elektrische Durchflutung über stromdurchflossene Spulen um das Joch 1 oder die beiden Schenkel 3 erzeugt werden kann. Vernachlässigt man die Krümmung der Feldlinien im Eisen, die von innen nach außen abnehmende Feldstärke und den durch das Fenster des Kreises gehenden Streufloss, kann man das Feld als *abschnittsweise* homogen annehmen.

Lässt man den Streufluss unberücksichtigt, so ist es bei einem unverzweigten Kreis unbedeutend, wo die Durchflutung räumlich angeordnet ist. Da Streuung in der Praxis aber unvermeidbar ist, legt man die Durchflutung möglichst nahe an diejenige Stelle, wo das stärkste Feld gewünscht wird, z. B. in die Nähe des Luftspaltes.

Bei der Berechnung von Eisenkreisen sind nach der Art der Lösungswege zwei Arten von Aufgabenstellungen zu unterscheiden:

1. Bei gegebenem Fluss Φ ist die für seine Erzeugung erforderliche elektrische Durchflutung Θ zu berechnen.
2. Bei gegebener elektrischer Durchflutung Θ ist der von ihr bewirkte Fluss Φ zu bestimmen.

Die 2. Art der Aufgabenstellung lässt direkte Lösungen nur unter der vereinfachenden Annahme einer konstanten Permeabilität zu, was aber im Allgemeinen auf zu ungenaue Ergebnisse führt. Genauere Ergebnisse erhält man mit Hilfe von Iterations- oder Interpolationsverfahren, die das Problem auf die 1. Art der Aufgabenstellung zurückführen, der somit eine grundlegende Bedeutung zukommt.

Zur Berechnung eines *unverzweigten* Eisenkreises sei für einen bestimmten Querschnitt A der Fluss Φ gegeben. Unter den oben genannten Voraussetzungen tritt dieser Fluss Φ dann auch in allen anderen Abschnitten ν mit den Querschnitten A_ν auf.

Im Eisenkreis nach Bild 4.32 ergeben sich also mit den jeweiligen Querschnitten die magnetischen Flussdichten für das Joch $B_j = \Phi/A_j$, die Schenkel $B_s = \Phi/A_s$, den Anker $B_a = \Phi/A_a$ und die Luftspalte $B_L = \Phi/A_L$.

Für die berechneten magnetischen Flussdichten B_ν werden dann aus der für das vorliegende Material gültigen Magnetisierungskurve (Bild 4.27) die zugehörigen Werte der magnetischen Feldstärke $H_\nu = f(B_\nu)$ ermittelt. In Luftspalten gilt $H_L = B_L/\mu_0$.

Sind die magnetischen Feldstärken H_ν in den einzelnen Abschnitten ν bekannt, so können aus ihnen mit den *mittleren Längen* (in Bild 4.32 l_a , δ , l_s und l_j) die für die einzelnen Abschnitte benötigten *magnetischen Spannungen* $V_\nu = H_\nu l_\nu$ berechnet werden. Da abschnittsweise Homogenität des magnetischen Feldes angenommen wird, kann Hl statt $\vec{H} \cdot \vec{l}$ gesetzt werden, weil Feldstärke \vec{H}_ν und Wegvektor \vec{l}_ν in jedem Abschnitt gleiche Richtung haben und H_ν über l_ν konstant ist. Die Addition der einzelnen Spannungen V_ν des magnetischen Kreises ergibt dann nach dem Durchflutungssatz Gl. (4.19) in der Form der Gl. (4.54) die erforderliche elektrische Durchflutung Θ .

In der Anordnung nach Bild 4.32 ist also die Summe der magnetischen Teilspannungen

$$\dot{V} = \sum Hl = H_a l_a + 2H_L \delta + 2H_s l_s + H_j l_j = \Theta. \quad (4.68)$$

Zusammenfassend sind im Folgenden die für die Rechnung (die zweckmäßigerweise in Tabellenform durchgeführt wird) benötigten Gleichungen noch einmal zusammengestellt:

Für jeden Abschnitt ν der insgesamt n Abschnitte eines magnetischen Kreises erhält man mit dem Querschnitt A_ν und dem Fluss Φ die magnetische Flussdichte

$$B_\nu = \frac{\Phi}{A_\nu} \quad (4.69)$$

und für diese aus der Magnetisierungskurve (Bild 4.27) bzw. aus $H_L = B_L/\mu_0$ die zugehörige magnetische Feldstärke $H_\nu = f(B_\nu)$, aus der sich die magnetische Spannung

$$V_\nu = H_\nu l_\nu \quad (4.70)$$

ergibt. Die elektrische Durchflutung in einem Kreis aus n Abschnitten ist

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^n V_\nu. \quad (4.71)$$

Ist die Streuung nicht vernachlässigbar, muss ihr Wert gemäß Abschnitt 4.2.2.1 abgeschätzt und in den Flüssen der betroffenen Abschnitte des Kreises berücksichtigt werden. Dann ergeben sich unterschiedliche Flüsse Φ_ν in den Abschnitten, sodass die magnetischen Flussdichten $B_\nu = \Phi_\nu/A_\nu$ in diesen Abschnitten nach Gl. (4.69) mit Φ_ν berechnet werden müssen.

Eine Besonderheit stellen *Dauermagnetkreise* dar, für die Gl. (4.71) mit $\Theta = 0$ erfüllt ist, da für mindestens einen der ν Abschnitte in Gl. (4.70) $H_\nu < 0$ eingesetzt werden muss [Fro94].

Beispiel 4.14: Magnetfeld in einem Eisenring mit Luftspalt

Ein Stahlgussring mit dem mittleren Ringdurchmesser $d_{\text{mi}} = 15 \text{ cm}$ und dem konstanten Eisenquerschnitt $A = 4 \text{ cm}^2$ ist an einer Stelle geschlitzt, sodass ein Luftspalt mit dem gleichen Querschnitt A und der Länge $\delta = 1 \text{ mm}$ vorhanden ist. Im Ring soll der Fluss $\Phi = 0,46 \text{ mWb}$ auftreten. Die Streuung und die Aufweitung des Feldes im Luftspalt sollen vernachlässigt werden.

Wie groß muss die elektrische Durchflutung Θ sein?

Die Ergebnisse der Rechnungen mit Gl. (4.69) bis (4.71) sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt, ausgehend von der in Eisen und Luftspalt gleichen magnetischen Flussdichte

$$B = \Phi/A = 0,46 \text{ mWb}/(4 \text{ cm}^2) = 1,15 \text{ Wb/m}^2 = 1,15 \text{ T}$$

und der mittleren Eisenlänge

$$l = \pi d_{\text{mi}} - \delta = \pi \cdot 15 \text{ cm} - 0,1 \text{ cm} = 47,0 \text{ cm}.$$

Tabelle 4.1: Berechnung der erforderlichen Durchflutung für einen Eisenkreis mit Luftspalt nach Beispiel 4.14

Werkstoff	Flussdichte B in T	Feldstärke H in A/cm	Weglänge l in cm	magnetische Spannung V in A
Stahlguss	1,15	3,3	47,0	155
Luft	1,15	9150	0,1	915
				$\Theta = 1070 \text{ A}$

Beispiel 4.14 zeigt, dass der Luftspalt trotz seiner relativ kleinen Länge eine wesentlich größere magnetische Spannung erfordert als der vom gleichen Fluss durchsetzte Eisenweg. Diese Eigenschaft ist typisch für Eisenkreise mit Luftspalt. Für überschlägige Berechnungen reicht es oft sogar aus, die magnetischen Spannungen im Eisen gegenüber denen im Luftspalt zu vernachlässigen.

Beispiel 4.15: Elektromagnet

Im Bild 4.34 ist der magnetische Kreis eines Hubmagneten mit seinen Abmessungen skizziert. In allen Abschnitten liegen rechteckige Querschnitte der Dicke $d = 80$ mm vor. Schenkel s und Joch j sind aus Elektrolech nach Kurve I in Bild 4.27 geschichtet, der Anker a ist aus Grauguss gefertigt.

Die für die Luftspaltflussdichte $B_L = 0,9$ T erforderliche elektrische Durchflutung Θ soll berechnet werden. Dabei soll ein Streufluss, d. h. ein Teilfluss, der gemäß Bild 4.32 zwischen den Schenkeln s verläuft, von 15 % des Jochflusses Φ_j angenommen werden. Zur Vereinfachung der Rechnung wird dieser Streufluss nicht als kontinuierlich über die Schenkellänge, sondern als konzentriert in unmittelbarer Luftspaltnähe aus dem Schenkel abzweigend betrachtet.

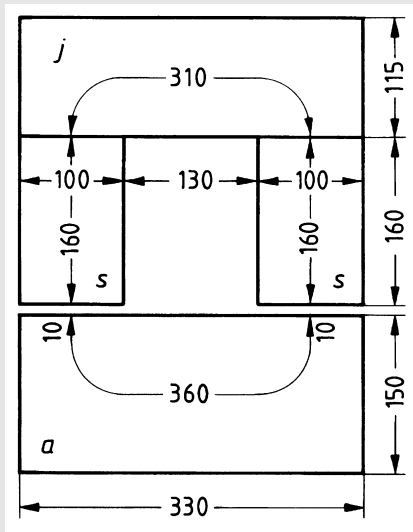


Bild 4.34: Magnetischer Kreis eines Elektromagneten (alle Maße in mm)

Aus der geforderten magnetischen Flussdichte $B_L = 0,9$ T im Luftspalt mit der Fläche $A_L = 10 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 80 \text{ m}^2$ ergibt sich der magnetische Fluss im Luftspalt

$$\Phi_L = B_L A_L = 0,9 \text{ T } 80 \text{ cm}^2 = 7,2 \text{ mWb} .$$

Im Anker a tritt der gleiche magnetische Fluss

$$\Phi_a = \Phi_L = 7,2 \text{ mWb}$$

auf. Unter Berücksichtigung der Streuung in Joch und Schenkel ergibt sich der magnetische Fluss

$$\Phi_j = \Phi_s = \Phi_L / 0,85 = 7,2 \text{ mWb} / 0,85 = 8,5 \text{ mWb} .$$

Diese Werte werden in die Fluss-Spalte in Tabelle 4.2 eingetragen. Die weitere Rechnung erfolgt nach den Gln. (4.69) bis (4.71).

Schließlich erhält man die für den Kreis notwendige elektrische Durchflutung $\Theta = 15280$ A.

Tabelle 4.2: Magnetische Dimensionierung des Elektromagneten in Beispiel 4.15

Abschnitt	Werkstoff	Fluss	Querschnitt		Feldstärke	Weglänge	magnetische Spannung V in A
		Φ in mWb	A in cm^2	B in T	H in A/cm	l in cm	
Anker	Grauguss	7,2	120	0,6	20	36	720
Luftspalt	Luft	7,2	80	0,9	7200	2×1	14400
Schenkel	Elektrobl.	8,5	80	1,06	2,8	2×16	90
Joch	Elektrobl.	8,5	92	0,925	2,2	31	70
							$\Theta = 15280 \text{ A}$

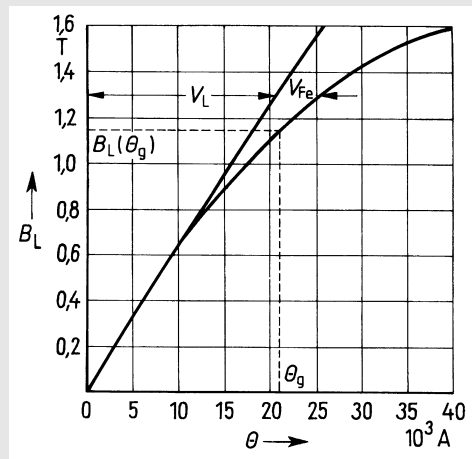
In praktisch ausgeführten Eisenkreisen tritt häufig aus konstruktiven Gründen zwischen *Joch* und *Schenkel* eine *Stoßfuge* auf (überlappt geschichtete Bleche), die in einem über Erfahrungswerte bestimmten *Ersatzluftspalt* in der Rechnung berücksichtigt wird. Infolge seiner geringen Länge (0,01 mm bis 0,1 mm) wird er in Fällen, in denen weitere wesentlich größere Luftspalte δ im Kreis auftreten, wie im Beispiel 4.15 zwischen Schenkel und Anker, häufig vernachlässigt.

Beispiel 4.16: Magnetisierungskennlinie bei einem Eisenkreis mit Luftspalt

Durch wiederholtes Durchrechnen des magnetischen Kreises aus Beispiel 4.15 mit unterschiedlichen magnetischen Flussdichten soll seine Magnetisierungskennlinie $B_L = f(\Theta)$ für Luftspaltflussdichten B_L zwischen 0 und 1,6 T errechnet werden.

In analog zu Tabelle 4.2 durchgeführten Rechnungen des gegebenen magnetischen Kreises wird für verschiedene angenommene Werte der Luftspaltflussdichte B_{L1}, B_{L2}, \dots jeweils die zugehörige elektrische Durchflutung $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ bestimmt. Die so gewonnene Funktion $B_L = f(\Theta)$ ergibt grafisch dargestellt die untere Kurve in Bild 4.35.

Bild 4.35: Luftspaltflussdichte B_L in Abhängigkeit von der elektrischen Durchflutung Θ
 V_L Durchflutungsanteil für die Luftspaltstrecke
 V_{Fe} Durchflutungsanteil für die Eisenstrecke



Wegen der zunehmenden Eisensättigung verläuft die Kurve mit steigender elektrischer Durchflutung immer flacher.

Den Einfluss von Luft und Eisen erkennt man mit Hilfe der in Bild 4.35 eingetragenen Geraden, die den Durchflutungsanteil für den magnetischen Fluss im Luftspalt beschreibt. Der durch die Gerade begrenzte Anteil V_L gibt die zum Erreichen der jeweiligen magnetischen Flussdichte notwendige magnetische Spannung für den Luftspalt an, der horizontale

Abstand V_{Fe} zwischen beiden Kurven die magnetische Spannung für das Eisen. Bei geringen Flussdichten wird der weitaus größte Durchflutungsanteil für die Luftstrecke benötigt, während der Einfluss des Eisens mit zunehmender Sättigung immer mehr in Erscheinung tritt.

Der für kleine magnetische Flussdichten geringe Eiseneinfluss gestattet häufig Näherungsrechnungen, in denen der Einfluss des Eisens vernachlässigt wird, d. h. die magnetische Luftspaltspannung wird gleich der elektrischen Durchflutung gesetzt (magnetische Spannung des Eisens wird gleich null angenommen). Aus der so aufgestellten *linearen Gleichung* kann die Luftspaltspannung direkt berechnet werden.

Beispiel 4.17: Ermittlung der Luftspaltflussdichte

Für einen bzgl. Abmessungen und Material gegebenen magnetischen Kreis soll bei gegebener elektrischer Durchflutung Θ_g die sich einstellende Luftspaltflussdichte $B_L(\Theta_g)$ bestimmt werden.

Es werden verschiedene Luftspaltflussdichten angenommen und die dafür erforderlichen Durchflutungen, wie in Beispiel 4.16 erläutert, berechnet. Mit diesen Werten wird die Magnetisierungskennlinie $B_L = f(\Theta)$ des magnetischen Kreises gezeichnet (Bild 4.35). Aus dieser Kurve wird die zu Θ_g gehörige Luftspaltflussdichte $B_L(\Theta_g)$ aufgesucht, wie dies in Bild 4.35 gestrichelt eingezeichnet ist.

Beispiel 4.18: Dimensionierung eines verzweigten Eisenkreises

Für einen Eisenkreis mit drei Schenkeln gemäß Bild 4.36, von denen der linke die magnetisierende Wicklung trägt, sollen die Flüsse Φ_1 und Φ_3 in den beiden äußeren Schenkeln und die notwendige elektrische Durchflutung Θ_1 in der Wicklung auf Schenkel 1 berechnet werden, sodass im mittleren Schenkel der Fluss $\Phi_2 = 3 \text{ mWb}$ auftritt. Der ferromagnetische Kern ist aus Elektrolech gemäß den Kurven IV in Bild 4.27 aufgebaut und hat die Dicke $d = 60 \text{ mm}$. Die Streuung soll vernachlässigt werden.

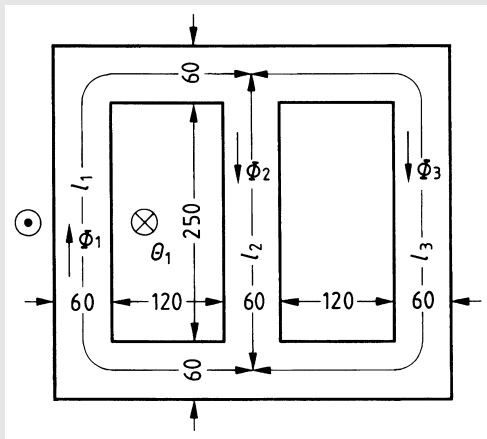


Bild 4.36: Verzweigter Eisenkreis mit einer Wicklung (alle Maße in mm)

Da der Fluss von der Durchflutung auf dem linken Schenkel erzeugt wird, tritt in diesem der gesamte Fluss $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ auf, der sich auf die beiden Schenkel 2 und 3 verteilt.

Die Teilflüsse verhalten sich umgekehrt wie die magnetischen Widerstände. Mit Gl. (4.51)

folgt aus Gl. (4.57)

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{l_3/(\mu_{r3} \mu_0 A_3)}{l_2/(\mu_{r2} \mu_0 A_2)} \quad \text{oder} \quad \frac{\Phi_2 l_2}{\mu_{r2} \mu_0 A_2} = \frac{\Phi_3 l_3}{\mu_{r3} \mu_0 A_3} \quad \text{oder} \quad H_2 l_2 = H_3 l_3. \quad (4.72)$$

Die magnetischen Spannungen Hl an parallelen Zweigen sind gleich (Abschnitt 4.1.3.4).

Mit den Abmessungen des Kerns ergeben sich die Querschnitte $A_1 = A_2 = A_3 = 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2$ und Längen $l_1 = l_3 = 67 \text{ cm}$ und $l_2 = 31 \text{ cm}$. Hiermit und mit dem geforderten Fluss $\Phi_2 = 3 \text{ mWb}$ ergibt sich für den mittleren Schenkel 2

$$B_2 = \Phi_2/A_2 = 3 \text{ mWb}/(36 \text{ cm}^2) = 833 \text{ mT}$$

und aus der Magnetisierungskurve IV in Bild 4.27

$$H_2 = f(B_2 = 833 \text{ mT}) = 1,3 \text{ A/cm}.$$

Daraus folgt für den äußeren Schenkel 3 nach Gl. (4.72)

$$H_3 = H_2 l_2/l_3 = (1,3 \text{ A/cm}) \cdot 31 \text{ cm}/(67 \text{ cm}) = 0,6 \text{ A/cm}$$

und damit aus der Magnetisierungskurve IV

$$B_3 = f(H_3 = 0,6 \text{ A/cm}) = 450 \text{ mT}.$$

Mit dem Querschnitt A_3 ergibt sich der magnetische Fluss

$$\Phi_3 = B_3 A_3 = 450 \text{ mT} \cdot 36 \text{ cm}^2 = 1,62 \text{ mWb}.$$

Die Summe der magnetischen Flüsse in den Schenkeln 2 und 3 ergibt den magnetischen Fluss

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 3 \text{ mWb} + 1,62 \text{ mWb} = 4,62 \text{ mWb}$$

in Schenkel 1.

Für die Berechnung der erforderlichen elektrischen Durchflutung müssen die magnetischen Spannungen über Schenkel 1 und 2 oder 1 und 3 addiert werden.

In Tabelle 4.3 wird die Durchflutung $\Theta_1 = \mathring{V} = V_1 + V_2 = 340 \text{ A}$ berechnet.

Tabelle 4.3: Berechnung der elektrischen Durchflutung für Beispiel 4.18 (Werkstoff Elektrolech)

Abschnitt	Φ in mWb	A in cm^2	B in T	H in A/cm	l in cm	V in A
Schenkel 1	4,62	36	1,28	4,5	67	300
Schenkel 2	3	36	0,83	1,3	31	40
						$\Theta_1 = 340 \text{ A}$

4.3 Wirkungen im magnetischen Feld

Die große praktische Bedeutung des magnetischen Feldes beruht darauf, dass sich mit geringem Energieaufwand äußerst intensive Felder erzeugen lassen, die eine wirtschaftliche Energieumwandlung von elektrischer Energie in mechanische und umgekehrt ermöglichen.

So kann man sich heute die großen Generatoren und Motoren der Energietechnik nur auf der Basis des magnetischen Feldes vorstellen. Energieumformer, die das elektrostatische Feld nutzen, z. B. *Van-de-Graaf-Generatoren* oder rein elektrisch angetriebene mikroelektronische Motoren haben nur für Sonderfälle in der Laboranwendung Bedeutung.

Die Grundgesetze, nach denen Energieumwandlungen im magnetischen Feld ablaufen, sind das Induktionsgesetz, maßgebend für die Erzeugung von Spannungen, und die die Kraftwirkung beschreibenden Gesetze, abgeleitet aus der Lorentz-Kraft und dem Energieerhaltungssatz.

4.3.1 Spannungserzeugung im magnetischen Feld, elektrisches Wirbelfeld

Pauschal heißt es oft, durch die zeitliche Änderung eines Magnetfeldes werde eine elektrische Spannung induziert. Dabei bleibt unklar, welche Größe des Magnetfeldes sich zeitlich ändert und wo die Spannung induziert wird.

Bei diesen zeitlichen Änderungen lassen sich die Bewegung eines Leiters im zeitinvarianten Magnetfeld (Bild 4.37a) und die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte \vec{B} bei ruhendem Leiter unterscheiden (Bild 4.37b).

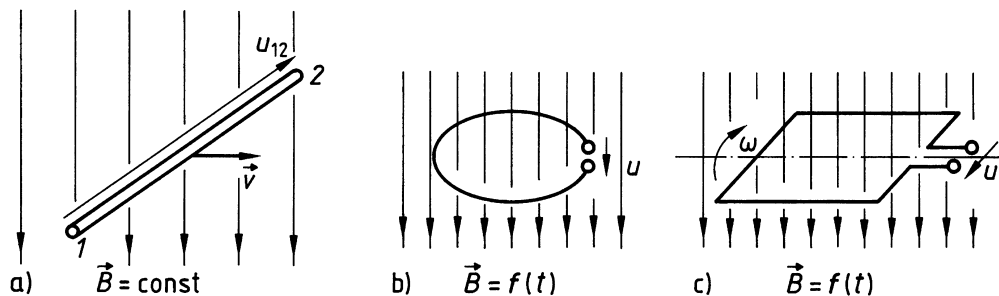


Bild 4.37: Verschiedene Arten der Spannungsinduktion

- bewegter Leiter im zeitlich konstanten Magnetfeld
- ruhende Leiterschleife im zeitvarianten Magnetfeld
- bewegte Leiterschleife im zeitvarianten Magnetfeld

Die dabei induzierte Spannung u lässt sich im ersten Fall als zwischen zwei Punkten des bewegten Leiters, im zweiten Fall als in einem den ruhenden Leiter einbeziehenden geschlossenen Umlauf auftretend beschreiben. Selbstverständlich gibt es Kombinationen beider Grenzfälle, wie in Bild 4.37c dargestellt.

4.3.1.1 Induktionswirkung im bewegten Leiter

Zur Erläuterung der Spannungserzeugung in Leitern, die sich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld bewegen, wird ein gerader Leiter L betrachtet, der gemäß Bild 4.38a mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} durch ein homogenes, zeitlich konstantes \vec{B} -Feld bewegt wird. Die Längsachse des Leiters und die beiden Vektoren \vec{v} und \vec{B} sollen jeweils senkrecht zueinander stehen. Zwei Punkte 1 und 2 auf dem Leiter mit dem Abstand l sind gleitend mit zwei ruhenden Schienen K elektrisch leitfähig verbunden, über die die Spannung des bewegten Leiters von einem ruhenden Standpunkt aus gemessen werden kann.

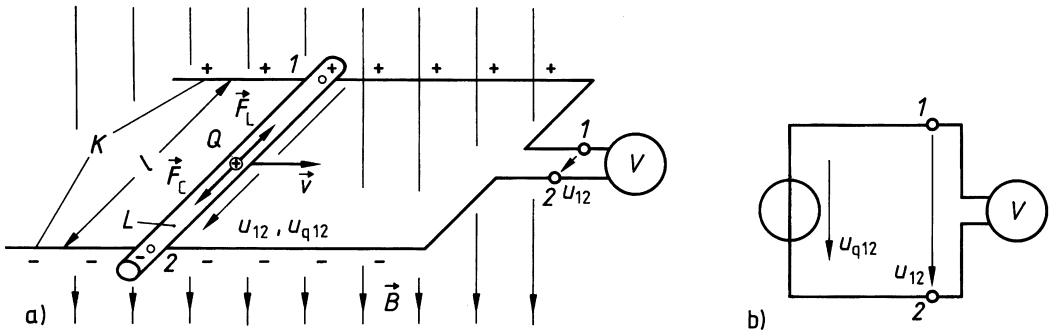


Bild 4.38: Bewegter Leiter im zeitlich konstanten Magnetfeld
 a) auf Kontaktschienen K gleitender gerader Leiter L
 b) elektrische Ersatzschaltung der Anordnung nach a)

Auf die freien Ladungsträger im Leiter mit der Ladung Q , die mit ihm im Magnetfeld bewegt werden, wirkt die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{4.73}$$

in Längsrichtung des Leiters. Infolge dieser Kraft verschieben sich freie positive Ladungen zum Punkt 1 bzw. freie negative zum Punkt 2 des Leiters. Dadurch wird ein Leiterende positiv gegenüber dem anderen aufgeladen. Diese *Polladungen* rufen ein elektrisches Feld \vec{E} hervor, dessen Feldlinien auf der positiven Polladung (höheres Potenzial) beginnen und auf der negativen (niedrigeres Potenzial) enden. Dieses \vec{E} -Feld verursacht die *Coulomb-Kraft*

$$\vec{F}_C = Q\vec{E}, \tag{4.74}$$

die im Inneren des Leiters vom höheren (+) zum niedrigeren Potenzial (-) auf die in Bild 4.38a betrachteten positiven Ladungsträger wirkt. Die Coulomb-Kraft ist also der Lorentz-Kraft entgegengerichtet. Bei der angenommenen gleichförmigen Bewegung stellt sich ein *stationärer Gleichgewichtszustand* ein, in dem der Ladungsunterschied zwischen den Leiterenden gerade so groß ist, dass die Coulomb-Kraft betragsmäßig gleich der Lorentz-Kraft ist. Unter Beachtung der entgegengesetzten Wirkungsrichtungen beider Kräfte gilt für den Gleichgewichtszustand $\vec{F}_L = -\vec{F}_C$, also

$$Q(\vec{v} \times \vec{B}) = -Q\vec{E}. \tag{4.75}$$

Aus diesem Gleichgewichtszustand lässt sich die vom höheren zum niedrigeren elektrischen Potenzial wirkende elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.76)$$

ermitteln. Deren Integral über die Leiterlänge l ergibt die *in dem bewegten Leiter induzierte Spannung*

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

mit einem von 1 nach 2 weisenden Spannungszählpfeil. Dieser ist in Bild 4.38 aus den im nächsten Absatz erläuterten Gründen mit dem Kleinbuchstaben $u_{12} = U_{12}$ bezeichnet.

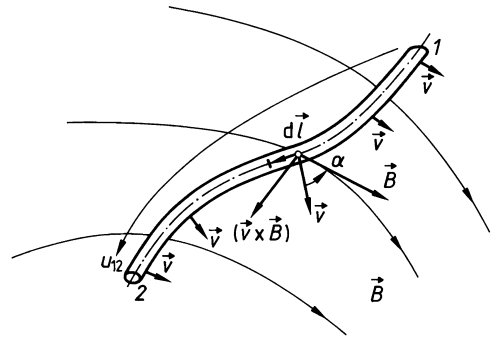


Bild 4.39: Richtungsdefinitionen zur Spannungsinduktion im bewegten Leiter nach Gl. (4.77)

Anhand von Bild 4.38 wurde zunächst der einfache Fall des mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} im zeitkonstanten homogenen Magnetfeld bewegten geraden Leiters betrachtet, in dem eine zeitlich konstante Spannung U_{12} induziert wird. Diese Betrachtungen gelten sinngemäß auch für Leiter beliebiger Geometrie wie in Bild 4.39, die mit beliebiger, also auch zeitvarianter Geschwindigkeit \vec{v} durch homogene oder inhomogene (aber zeitlich konstante) Magnetfelder bewegt werden. Die dabei im Leiter induzierte Spannung

$$u_{12} = \int_1^2 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (4.77)$$

wird dann im allgemeinen Fall auch zeitvariant sein. Daher wird eine induzierte Spannung allgemein mit dem Kleinbuchstaben u bezeichnet.

Da beim bewegten Leiter die *Induktionswirkung als in diesem lokalisiert* erklärt werden kann [Fro94], lässt er sich bei Vernachlässigung seines Widerstandes als ideale Spannungsquelle gemäß Bild 4.38b auffassen. Die in Bild 4.38a am bewegten Leiter eingetragene Spannung u_{12} entspricht der *Quellenspannung*

$$u_{q12} = \int_1^2 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}. \quad (4.78)$$

Mit Hilfe des Maschensatzes $\sum u = u_{q12} - u_{12} = 0$ kann auch die im *Leerlauf* auftretende *Klemmenspannung*

$$u_{12} = u_{q12} = \int_1^2 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (4.79)$$

dieser Spannungsquelle mittels des Induktionsvorgangs beschrieben werden.

Beispiel 4.19: Unipolarmaschine im Leerlauf

In Bild 4.40 ist schematisch eine Unipolarmaschine skizziert, die zur Erzeugung kleiner Gleichspannungen geeignet ist. Die Leiter L (die den Speichen eines Rades entsprechen) sind leitend zwischen Welle W und Radkranz K gespannt. Die induzierte Spannung wird über Kontakte S, die auf der Welle bzw. dem Radkranz schleifen, den Anschlussklemmen zugeführt.

Für eine solche Unipolarmaschine mit der Leiterlänge $r_a = 250 \text{ mm}$, der konstanten Drehzahl $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ und einem gemäß Bild 4.40 parallel zur Drehachse gerichteten homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 1,2 \text{ T}$ ist die Leerlaufspannung zu berechnen.

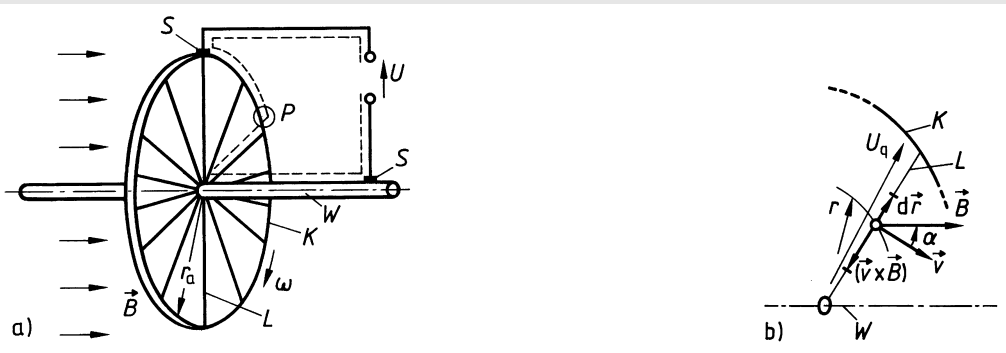


Bild 4.40: Prinzip der Unipolarmaschine (Barlowsches Rad)

- Rotation radial in einer Kreisscheibe angeordneter Leiter L in einem homogenen magnetischen Feld \vec{B} , das die Kreisscheibe senkrecht durchdringt, mit Spannungsabgriff über Bürsten S von der Welle W und dem am Kreisumfang angeordneten Radkranz K
- Einzelner Leiter L mit den auf ihn bezogenen Richtungen für Vektoren und Zählpfeil

In den parallel geschalteten Leitern zwischen Welle und Radkranz wird eine konstante Spannung U (bzw. Quellenspannung U_q) induziert.

Trägt man den Zählpfeil für U_q an den Leiter L von der Welle zum Radkranz weisend ein (Bild 4.40b), liegt die Integrationsrichtung, also der Wegvektor $d\vec{l} = d\vec{r}$, ebenfalls in dieser Richtung und damit parallel, aber entgegengesetzt zum Vektor $(\vec{v} \times \vec{B})$, wie aus Bild 4.40b zu erkennen ist.

Damit kann Gl. (4.78) in der skalaren Form

$$U_q = \int_W^K -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_W^K v B dr \quad (4.80)$$

geschrieben werden. Da die Leitergeschwindigkeit v bei konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 3000 \text{ min}^{-1} / (60 \text{ s/min}) = 100 \pi \text{ s}^{-1}$ zwar zeitlich, nicht aber über die Leiterlänge konstant ist, muss sie mit $v = \omega r$ in die Integration einbezogen werden. Damit ergibt sich aus Gl. (4.80) die Quellenspannung

$$U_q = \int_W^K \omega r B dr = \omega B \int_0^{r_a} r dr = \omega B \frac{r_a^2}{2} = 100 \pi \text{ s}^{-1} \cdot 1,2 \text{ T} \cdot \frac{(0,25 \text{ m})^2}{2} = 11,8 \text{ V} \quad (4.81)$$

mit einem positiven Zahlenwert, d. h. an der Welle stellt sich der Plus-, am Radkranz der Minuspol ein.

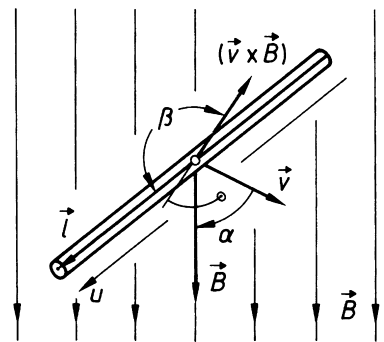
Diese sich aus der formalen Rechnung ergebende Polarität kann auch aus der ladungstrennenden Wirkung der Lorentz-Kraft \vec{F}_L auf die mit dem Leiter bewegten Ladungen gemäß Gl. (4.73) gefolgert werden.

Die in Bild 4.40a eingetragene Klemmenspannung U ergibt sich aus dem Maschensatz $\sum U = U_q - U = 0$ ebenfalls als positiver Wert

$$U = U_q = 11,8 \text{ V}.$$

In der Praxis treten häufig *gerade* Leiter auf, die in einem *homogenen* Magnetfeld bewegt werden. In solchen Fällen ist die im Leiter *induzierte elektrische Feldstärke* $\vec{v} \times \vec{B}$ nach Gl. (4.76) über die Leiterlänge l konstant, sodass die Integration nach Gl. (4.77) zu einer Multiplikation vereinfacht werden kann.

Bild 4.41: Spannung u , die in einem mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem homogenen Magnetfeld der zeitlich konstanten magnetischen Flussdichte \vec{B} bewegten geraden Leiter der Länge l induziert wird



Mit dem Winkel α zwischen Geschwindigkeit \vec{v} und magnetischer Flussdichte \vec{B} und dem Winkel β zwischen dem Vektor $(\vec{v} \times \vec{B})$ und der als Vektor beschriebenen Leiterlänge \vec{l} (Bild 4.41) gilt

$$u = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} = -(v B \sin \alpha) l \cos \beta. \quad (4.82)$$

Der Zählpfeil für u entlang des Leiters ist in der Richtung einzutragen, in die der Vektor \vec{l} weist.

Für den besonders einfachen, aber häufig auftretenden Fall, dass ein gerader Leiter mit der Länge l *rechtwinklig* zur Feldrichtung \vec{B} liegend mit der Geschwindigkeit \vec{v} *rechtwinklig* zur Längsachse l und zur Feldrichtung \vec{B} durch ein *homogenes* Feld bewegt wird, ergibt sich aus Gl. (4.82) mit $\alpha = 90^\circ$ und $\beta = 0^\circ$ oder $\beta = 180^\circ$ der Betrag der in ihm induzierten Spannung

$$u = vBl. \quad (4.83)$$

Alle hier angestellten Betrachtungen gelten auch, wenn der im Magnetfeld bewegte Leiter Teil eines geschlossenen Stromkreises ist, sodass die in ihm induzierte Spannung einen Strom zur Folge hat. Für diesen Fall modelliert man den stromdurchflossenen bewegten Leiter wie folgt als Ersatz-Spannungsquelle (Abschnitt 2.4.5.2):

Der bewegte Leiter wird zunächst als *widerstandslos* aufgefasst, sodass die in ihm induzierte Spannung wie oben beschrieben bestimmt werden kann. Der auftretende Strom kann dabei unberücksichtigt bleiben, da die Stromdichte \vec{J} im Inneren des idealen Leiters mit dem spezifischen Widerstand $\varrho = 0$ keinen Spannungsabfall bewirkt, der eine elektrische Feldstärke $\vec{E} = \varrho \vec{J}$ zur Folge hätte, die bei der Integration nach Gl. (4.77) berücksichtigt werden müsste.

Der Widerstand R des realen Leiters wird als Ersatzwiderstand mit dem idealen Leiter in Reihe geschaltet, sodass er lediglich den stromabhängigen Zusammenhang zwischen der im idealen Leiter induzierten Quellenspannung u_q und der Klemmenspannung u bestimmt.

Beispiel 4.20: Unipolarmaschine unter Last

Die in Beispiel 4.19 für den Leerlauf betrachtetete Unipolarmaschine wird mit einem Widerstand R_A belastet, sodass der Strom $I = 1000$ A fließt. Der Anker soll aus 100 zwischen Welle und Radkranz sternförmig angeordneten Leitern bestehen, die je den Widerstand $R_L = 50$ m Ω haben. Der Widerstand der Leitungen und Kontakte sei vernachlässigbar.

Die sich bei der Belastung einstellende Klemmenspannung U ist zu berechnen.

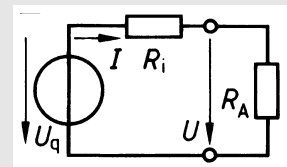


Bild 4.42: Mit dem Widerstand R_A belastete Ersatz-Spannungsquelle

Für die Berechnung der Klemmenspannung U wird die Unipolarmaschine durch eine Ersatz-Spannungsquelle gemäß Bild 4.42 beschrieben.

In der als ideal (d. h. widerstandslos angenommenen Unipolarmaschine) wird, wie in Beispiel 4.19 erläutert, die Quellenspannung $U_q = 11,8$ V induziert. Der mit der idealen Unipolarmaschine in Reihe geschaltete Widerstand der Leiter beträgt wegen der Parallelschaltung der 100 Leiter $R_i = 50$ m Ω /100 = 0,5 m Ω .

Mit Hilfe des Maschensatzes $\sum U = U_q - I R_i - U = 0$ ergibt sich die Klemmenspannung

$$U = U_q - I R_i = 11,8 \text{ V} - 1000 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ m}\Omega = 11,3 \text{ V}.$$

Grundsätzlich ist bei der Betrachtung der Induktionswirkung im bewegten stromdurchflossenen Leiter nach dem oben erläuterten Schema eine Beeinflussung des Magnetfeldes durch den Strom im Leiter zu berücksichtigen. In praktischen Fällen ist diese *Rückwirkung* des durch den Induktionsvorgang bewirkten Stroms auf das verursachende Magnetfeld häufig aber so gering, dass

sie vernachlässigt werden kann. Beeinflusst der durch den Induktionsvorgang hervorgerufene Strom I im Leiter das ursprüngliche (bei $I = 0$ auftretende) magnetische Feld in nicht mehr zu vernachlässigender Weise, muss die Induktionswirkung im bewegten stromdurchflossenen Leiter mit dem *resultierenden Feld* berechnet werden.

4.3.1.2 Induktionswirkung im zeitvarianten Magnetfeld

Die Spannungsinduktion, die auf der Bewegung eines Leiters im zeitlich konstanten Magnetfeld beruht, wurde in Abschnitt 4.3.1.1 erläutert. Im Folgenden wird gezeigt, dass auch in ruhenden Leiterschleifen eine Spannung induziert wird, wenn sich die magnetische Flussdichte zeitlich ändert. Die wesentlichen Merkmale dieser Art der Spannungsinduktion werden anhand der in Bild 4.43 dargestellten Anordnung erläutert.

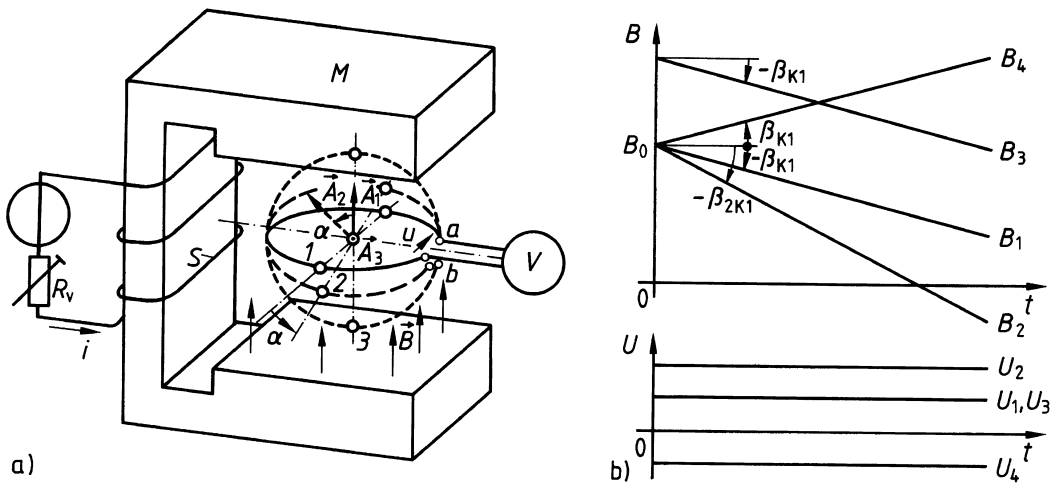


Bild 4.43: Spannungsinduktion bei ruhender Leiterschleife im zeitvarianten Magnetfeld
 a) Leiterschleife in Ebene 1, 2 und 3, die senkrecht, im Winkel $[(\pi/2) - \alpha]$ und parallel zur Flussdichteerichtung liegen
 b) zeitlicher Verlauf der magnetischen Flussdichte und der induzierten Spannung

Das zwischen den Polen eines Elektromagneten M nach Bild 4.43a bewirkte \vec{B} -Feld sei proportional zum erregenden Strom i in der Spule S. Zwischen den Polen ist eine *ruhende* Leiterschleife angeordnet. In der mit 1 bezeichneten Position des Bildes 4.43a liegt sie in einer Ebene rechtwinklig zur Richtung der magnetischen Flussdichte \vec{B} . Wird der Strom i und damit die magnetische Flussdichte zwischen den Polen nach der Zeitfunktion $B_1 = B_0 - K_1 t$ in Bild 4.43b linear mit der Zeit kleiner (z. B. dadurch, dass der Vorwiderstand R_v vergrößert wird), so wird vom an der Leiterschleife angeschlossenen Spannungsmesser eine konstante Spannung gemäß U_1 in Bild 4.43b angezeigt.

Durch Variieren der Versuchsbedingungen erhält man folgende Aussagen, die charakteristisch für die Induktionswirkung des zeitvarianten Feldes sind:

- a) Je schneller sich die magnetische Flussdichte B in der Leiterschleife mit der Zeit ändert, desto größer ist die in der Leiterschleife induzierte Spannung. Fällt z. B. die magnetische Flussdichte $B_1 = B_0 - K_1 t$ nach Kurve B_1 in Bild 4.43b, so zeigt der Spannungsmesser die Spannung U_1 an. Fällt die magnetische Flussdichte $B_2 = B_0 - 2 K_1 t$ nach Kurve B_2 in Bild 4.43b doppelt so schnell wie im Fall 1, so wird auch eine doppelt so große Spannung $U_2 = 2 U_1$ angezeigt wie im Fall 1.
- b) Die angezeigte Spannung ist nicht vom momentanen Wert B der magnetischen Flussdichte, sondern nur von deren Änderungsgeschwindigkeit dB/dt abhängig. Ändert sich z. B. die magnetische Flussdichte B_3 zeitlich ähnlich wie B_1 , d. h. verlaufen die Zeitfunktionen B_1 und B_3 parallel (Kurve B_1 und B_3 in Bild 4.43b), wird in beiden Fällen unabhängig vom jeweiligen Wert von B der gleiche Spannungswert $U_3 = U_1 = \text{const}$ angezeigt, da die Änderungsgeschwindigkeit in beiden Fällen die gleiche ist ($dB_3/dt = dB_1/dt = \text{const}$).
- c) Wird die Richtung der Flussdichteänderung (Vorzeichen der Steigung) umgekehrt, kehrt sich auch die Richtung der induzierten Spannung (Polarität) um. Wird z. B. die magnetische Flussdichte $B_4 = B_0 + K_1 t$ nach Kurve B_4 in Bild 4.43b von B_0 ausgehend nicht verkleinert, sondern vergrößert, so wird die Spannung $U_4 = -U_1$ angezeigt.
- d) Die angezeigte Spannung U ist außer von der Änderungsgeschwindigkeit dB/dt der magnetischen Flussdichte B auch noch von Lage und Größe der Fläche abhängig, die von der Leiterschleife in dem zeitvarianten Magnetfeld begrenzt wird. Die Leiterschleife in Bild 4.43a soll z. B. aus ihrer Stellung 1 in der Ebene rechtwinklig zu \vec{B} jeweils in eine Stellung 2 bzw. 3 gedreht sein, die um den Winkel α bzw. den Winkel $\pi/2$ gegenüber der ursprünglichen Lage gedreht ist. In allen drei Stellungen soll die magnetische Flussdichte $B_1 = B_0 - K_1 t$ jeweils mit gleicher Änderungsgeschwindigkeit K_1 nach Kurve B_1 in Bild 4.43b geändert werden. Die angezeigte Spannung ist dann in der Stellung 1 maximal $U_{1,1} = U_{\text{max}} = U_1$, in Stellung 3 ist sie $U_{1,3} = 0$ und in der Stellung 2 mit dem beliebigen Winkel α wird $U_{1,2} = U_1 \cos \alpha$ angezeigt.

Alle beschriebenen Beobachtungen werden quantitativ durch die Gleichung

$$u = -\frac{dB}{dt} A \cos \alpha \quad (4.84)$$

beschrieben, wenn dB/dt die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte, A die von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche und α der Winkel zwischen dem Flächenvektor \vec{A} (senkrecht auf der Ebene der Leiterschleife) und der magnetischen Flussdichte \vec{B} ist. Auch die beobachtete Polarität bzw. Spannungsrichtung wird mit Gl. (4.84) für alle Fälle richtig beschrieben, wenn der Zählpfeil der induzierten Spannung u an der Stelle, an der sie gemessen wird (im Beispiel in Bild 4.43a also zwischen den Klemmen a – b der Leiterschleife), rechtswendig dem Zählpfeil für den magnetischen Fluss Φ zugeordnet wird, der seinerseits gemäß Abschnitt 4.1.3.3 in Richtung des Flächenvektors \vec{A} weisend anzutragen ist.

Gl. (4.84) lässt sich entsprechend Gl. (4.43) auch als Skalarprodukt der Vektoren $(d\vec{B}/dt)$ und \vec{A} schreiben:

$$u = -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{A} \quad (4.85)$$

Ist das Feld innerhalb der Fläche A nicht homogen, muss das Skalarprodukt der Gl. (4.85) durch ein Integral ersetzt werden. Dies geschieht analog zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ bei inhomogenen Feldern nach dem Integral $\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ statt des Produktes $\vec{B} \cdot \vec{A}$.

Daraus folgt die allgemeingültige Gleichung für die von einem Magnetfeld mit zeitvarianter magnetischer Flussdichte \vec{B} in einer die Fläche A einschließenden Leiterschleife *induzierten Spannung*

$$u = - \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}. \quad (4.86)$$

Beispiel 4.21: Spannungsinduktion durch einen Mischstrom

In Bild 4.44a ist ein Transformator mit dem Kernquerschnitt $A_{\text{Fe}} = 100 \text{ cm}^2$ skizziert. Die Primärwicklung a wird von einem Mischstrom $i = I_0 + \hat{i}_1 \sin(\omega t)$ durchflossen, der im ungesättigten Eisenkern die magnetische Flussdichte

$$B = B_0 + B_1 \sin(\omega t) = 0,6 \text{ T} + 0,2 \text{ T} \sin\left(100 \pi \frac{t}{\text{s}}\right) \quad (4.87)$$

hervorruft (Bild 4.44b).

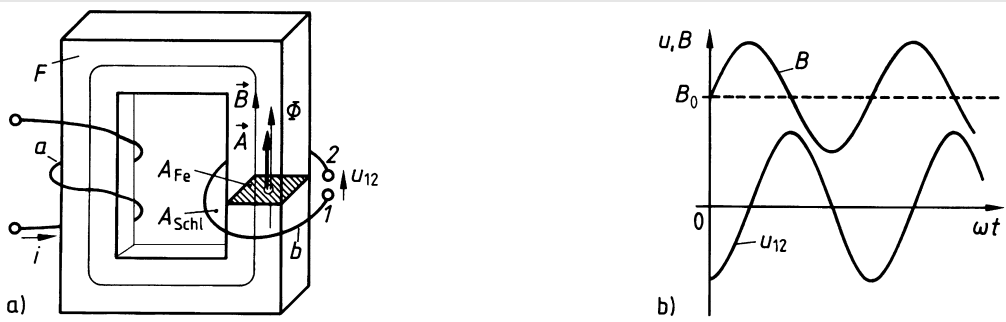


Bild 4.44: Spannung u_{12} , die in einer Leiterschleife um einen Eisenkern induziert wird
 a) Eisenkreis F mit Erregerwicklung a und Sekundärwicklung b
 b) zeitlicher Verlauf der magnetischen Flussdichte B im Eisenkreis und der induzierten Spannung u_{12}

Die in der Leiterschleife b (Sekundärwicklung) zwischen den Klemmen 1 und 2 auftretende Spannung ist zu berechnen.

Da der Strom i laut Aufgabenstellung nur mit positiven Werten gegeben ist, fließt er immer in Richtung des in Bild 4.44a eingezeichneten Stromzählpfeils für i , sodass diesem die Richtung der Flussdichtefeldlinien \vec{B} auch immer rechtswendig zugeordnet ist.

In Bild 4.44a ist für die Leiterschleife b der Sekundärseite der Flächenvektor \vec{A} und damit auch der Flusszählpfeil Φ nach obenweisend eingetragen. Dann muss der Zählpfeil für die induzierte Spannung u diesem Flusszählpfeil rechtswendig zugeordnet, also an den Klemmen der Leiterschleife b von 1 nach 2weisend, angetragen werden.

Der Wert dieser Spannung ergibt sich nach Gl. (4.86)

$$u_{12} = - \int_{A_{\text{Schl}}} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A} \quad (4.88)$$

durch Integration der Änderungsgeschwindigkeit der Flussdichte über die von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche A_{Schl} . Da das magnetische Feld praktisch nur im Eisen verläuft, liefert die Integration über den Flächenanteil $(A_{\text{Schl}} - A_{\text{Fe}})$ außerhalb des Eisenquerschnitts A_{Fe} keinen nennenswerten Beitrag zur induzierten Spannung u_{12} . Innerhalb des Eisens ist die magnetische Flussdichte \vec{B} über den Querschnitt A_{Fe} näherungsweise homogen. Daher kann das Integral in Gl. (4.88) auf die Fläche $A_{\text{Fe}} < A_{\text{Schl}}$ des Kernquerschnitts beschränkt und entsprechend Gl. (4.85) in ein Produkt überführt werden:

$$u_{12} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{A}_{\text{Fe}} \quad (4.89)$$

Eine weitere Vereinfachung der Rechnung kann im vorliegenden Beispiel dadurch erreicht werden, dass die Differenziation des Vektors \vec{B} in die Differenziation der skalaren Größe $\vec{B} \cdot \vec{A}$ in der Form

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{A}_{\text{Fe}} = \frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{A}_{\text{Fe}}) = \frac{d}{dt}(BA_{\text{Fe}} \cos \alpha) \quad (4.90)$$

überführt wird (α ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{B} und \vec{A}_{Fe}). Zeitlich ändert sich in dem Produkt $BA_{\text{Fe}} \cos \alpha$ nur der Betrag der magnetischen Flussdichte B entsprechend Gl. (4.87). Die Richtung von \vec{B} ist immer parallel zu \vec{A}_{Fe} , sodass $\cos \alpha = 1$ gilt. Damit folgt aus Gl. (4.89) die Spannung $u_{12} = -A_{\text{Fe}} dB/dt$ und nach Einsetzen der magnetischen Flussdichte B aus Gl. (4.87) die in der Leiterschleife induzierte Spannung (Bild 4.44b)

$$\begin{aligned} u_{12} &= -A_{\text{Fe}} \frac{d}{dt}[B_0 + B_1 \sin(\omega t)] = -A_{\text{Fe}} B_1 \omega \cos(\omega t) \\ &= -100 \text{ cm}^2 \cdot 0,2 \text{ T} \frac{100 \pi}{\text{s}} \cos\left(100 \pi \frac{t}{\text{s}}\right) = -0,628 \text{ V} \cos\left(100 \pi \frac{t}{\text{s}}\right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Das Beispiel zeigt, dass der Wert der induzierten Spannung u in jedem Augenblick t nur von der momentanen Änderungsgeschwindigkeit $d\vec{B}/dt$ der magnetischen Flussdichte \vec{B} abhängt, nicht aber von ihrem momentanen Wert.

Die Beschreibung des Induktionsvorgangs durch Gl. (4.86) hat den Vorteil, dass die Abhängigkeit der induzierten Spannung sowohl von der Betrags- als auch von der Richtungsänderung der Flussdichte \vec{B} klar zum Ausdruck kommt. Diesem Vorteil steht der Nachteil der unter Umständen aufwändigeren zeitlichen Differenziation eines Vektors gegenüber.

Die im Beispiel 4.21 gezeigte Möglichkeit der Umwandlung der Vektor- in die Skaldifferenziation kann nicht auf alle Aufgabenstellungen übertragen werden, da die Differenziation eines Vektors nach der Zeit wieder einen Vektor ergibt, dessen *Betrag und Richtung* unter Umständen zu berücksichtigen sind [Fro94].

Abgesehen von solchen Sonderfällen hat der in Beispiel 4.21 gezeigte Lösungsweg für praktische Rechnungen größte Bedeutung, sodass Gl. (4.85) bzw. (4.86) häufig von vornherein auf die skalare Differenziation zugeschnitten, also als $u = -(\vec{B} \cdot \vec{A})/dt$ angegeben wird, dann aber mit Gl. (4.43) in der Form $u = -d\Phi/dt$, die im folgenden Abschnitt behandelt wird.

4.3.1.3 Induktionsgesetz

Die durch ein zeitvariantes, homogenes Magnetfeld in einer ruhenden Leiterschleife induzierte Spannung kann, wie in Beispiel 4.21 gezeigt, nach Umformung der Gl. (4.85) als

$$u = -d(\vec{B} \cdot \vec{A})/dt$$

berechnet werden. Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung ist also gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$ in dieser Schleife ($u = -d\Phi/dt$).

Auch die in einem bewegten Leiter induzierte Spannung lässt sich über die Flussänderung beschreiben. Das soll am Beispiel der Anordnung in Bild 4.38a gezeigt werden:

Die zwischen den Klemmen 1 und 2 auftretende Spannung wurde mit Gl. (4.79) über die Induktionswirkung im bewegten Leiter L beschrieben. Liegen in der Anordnung der durch den Vektor \vec{l} beschriebene Leiter, seine Geschwindigkeit \vec{v} in Richtung der x-Achse und die magnetische Flussdichte \vec{B} rechtwinklig zueinander, so gilt $u_{12} = -Blv$. In dieser Gleichung lässt sich das Produkt lv mit $v = dx/dt$ auch als Flächenänderung $dA/dt = l dx/dt$ auffassen. Dadurch ist mit $u_{12} = -B(dA/dt) = -(BA)/dt$ und $BA = \Phi$ die induzierte Spannung $u_{12} = -d\Phi/dt$ auf die *Flussänderung* in der aus Kontaktschienen, Spannungsmesser und bewegtem Leiter bestehenden Leiterschleife zurückgeführt.

Auch das Vorzeichen der Spannung wird mit der Gleichung $u_{12} = -d\Phi/dt$ richtig beschrieben. Im Bild 4.38a ist der Flächenvektor \vec{A} und damit auch der Zählpfeil für den Fluss Φ nach unten weisend einzutragen, weil der Zählpfeil der Spannung u_{12} (an den Klemmen, an denen sie gemessen wird) rechtswendig diesem Zählpfeil für Φ zugeordnet sein muss. Für die eingezeichnete Richtung von \vec{B} ist der Fluss $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$ positiv (\vec{A} liegt in Richtung \vec{B}), seine zeitliche Änderung $d\Phi/dt$ aber negativ, da bei der gegebenen Geschwindigkeitsrichtung \vec{A} die Fläche A kleiner wird ($dA/dt < 0$). Für $d\Phi/dt < 0$ wird die Spannung $u_{12} = -d\Phi/dt > 0$, d. h. die Klemme 1 ist der positive und Klemme 2 der negative Pol, was mit dem Ergebnis nach Gl. (4.79) übereinstimmt.

Der an den obigen Beispielen erläuterte Zusammenhang ist verallgemeinerbar: Die in einem geschlossenen Umlauf (z. B. einer Leiterschleife) induzierte Spannung lässt sich mittels

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.92}$$

aus der zeitlichen Änderung des von diesem Umlauf eingeschlossenen magnetischen Flusses Φ berechnen [Fro94]. Die Gl. (4.92) wird als *Induktionsgesetz* bezeichnet.

Die zeitliche Änderung des Flusses Φ kann durch eine zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte \vec{B} , durch eine Bewegung von Leitern oder Leiterteilen im betrachteten Umlauf oder durch die Kombination beider verursacht werden.

In jedem Fall ist der *Zählpfeil* für die nach Gl. (4.92) bestimmte Spannung u an der Stelle, an der sie messbar in Erscheinung tritt (z. B. zwischen den Klemmen einer geöffneten Leiterschleife), *rechtswendig* zu dem Zählpfeil für den magnetischen Fluss Φ in der Schleife einzutragen.

Der Zählpfeil für Φ ist in der Richtung der Orientierung der vom Umlauf begrenzten Fläche einzutragen (siehe Abschnitt 4.1.3.3 zum Begriff der Orientierung).

Die mit Gl. (4.92) beschriebene, über einen Umlauf wirksame Spannung u wird als Umlaufspannung $\dot{\Phi} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ bezeichnet. Um dies zum Ausdruck zu bringen, kann sie entsprechend Gl. (3.36) als Wegintegral $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ geschrieben werden. So erhält man das *Induktionsgesetz* in der Form

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.93)$$

Beispiel 4.22: Spannungsinduktion in einer sich drehenden Leiterschleife

In einem homogenen, zeitinvarianten Magnetfeld der magnetischen Flussdichte \vec{B} dreht sich eine Leiterschleife gemäß Bild 4.45 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω .

Die in der Schleife induzierte Spannung u , die über Schleifringe abgegriffen wird, ist zu berechnen.

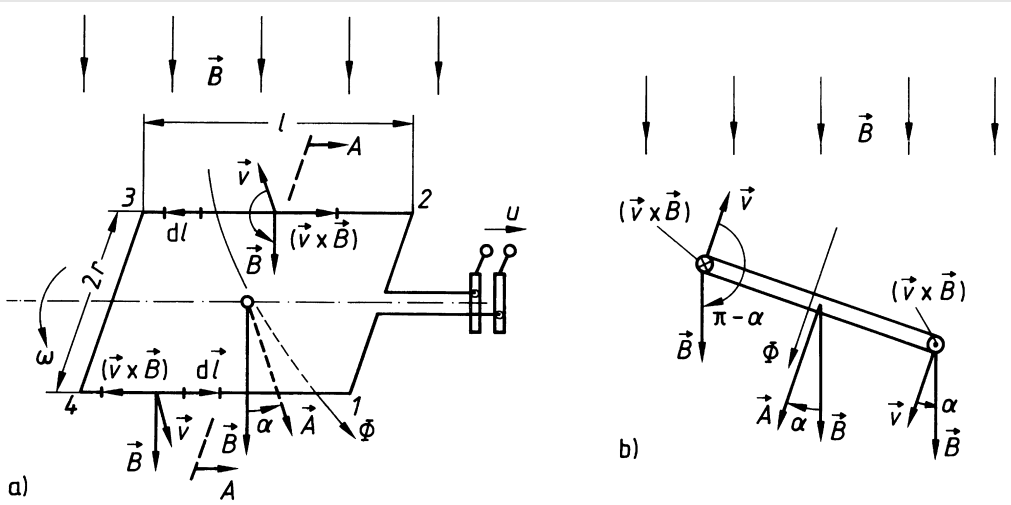


Bild 4.45: Mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Magnetfeld rotierende Leiterschleife (a) mit Querschnitt A – A durch die Leiterschleife (b)

Lösungsweg a) Die Richtung der von der Leiterschleife begrenzten ebenen Fläche $A = 2rl$ wird durch den senkrecht auf ihr stehenden Flächenvektor \vec{A} beschrieben. In Bild 4.45 ist seine Richtung willkürlich gewählt. Damit ist der Flusszählpfeil Φ auch in dieser Richtung festgelegt. Die Spannung u , die in dem als Leiterschleife realisierten Umlauf induziert wird, ist an den Schleifringen messbar. Ihr Zählpfeil muss rechtswendig zu dem Zählpfeil für Φ eingetragen werden. Für diese Spannung gilt Gl. (4.92), in der der Fluss Φ durch das Produkt der Vektoren \vec{A} und \vec{B} beschreibbar ist:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = -\frac{d}{dt}(AB \cos \alpha)$$

Die Fläche $A = 2rl$ und der Betrag der magnetischen Flussdichte B sind konstant.

Für den eingeschlossenen Winkel gilt $\alpha = \omega t$. Die induzierte Spannung ist also

$$u = -\frac{d}{dt}[AB \cos(\omega t)] = AB \omega \sin(\omega t). \quad (4.94)$$

Diese Spannung ist sinusförmig zeitveränderlich, weil der Fluss durch die Leiterschleife wegen ihrer Drehung mit konstanter Winkelschwindigkeit im homogenen Magnetfeld ebenfalls eine sinusförmige Zeitabhängigkeit aufweist (siehe Beispiel 4.10).

Lösungsweg b) Man kann die induzierte Spannung auch über die Bewegung einzelner Leiterstücke im Magnetfeld nach Gl. (4.77) berechnen: In den Breitseiten 1 bis 2 und 3 bis 4 der Leiterschleife wird keine Spannung induziert. Der Vektor $(\vec{v} \times \vec{B})$ ist immer quer zur Achse dieser Leiterstücke gerichtet, sodass die Spannung nach Gl. (4.77) über diese Abschnitte gleich null ist:

$$\int_1^2 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_3^4 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$$

In den Längsseiten 2 bis 3 und 4 bis 1 der Leiterschleife werden hingegen jeweils Spannungen nach Gl. (4.77) induziert, die nach Gl. (4.79) die Klemmenspannung

$$u = \int_2^3 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \int_4^1 -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (4.95)$$

an den Schleifringen ergeben.

Die Vektoren \vec{v} und \vec{B} treten in den beiden Leiterstücken 4 bis 1 bzw. 2 bis 3 mit unterschiedlichen Winkeln α bzw. $(\pi - \alpha)$ zueinander auf (Bild 4.45b), die gemäß $\alpha = \omega t$ zeitabhängig sind. Dadurch ist auch der Betrag des Vektors $(\vec{v} \times \vec{B})$ zeitabhängig. Seine Richtung liegt immer in Leiterlängsrichtung, bei positiven Betragswerten ($0 \leq \alpha < \pi$) entgegengesetzt, bei negativen Betragswerten ($\pi \leq \alpha < 2\pi$) in Richtung des Integrationsvektors $d\vec{l}$ (Bild 4.45b). Da \vec{B} über die Leiterlänge l konstant ist, lässt sich Gl. (4.95) vereinfachen zu

$$u = [vB \sin(\pi - \alpha)]l + [vB \sin \alpha]l = 2vBl \sin \alpha.$$

Daraus folgt mit der Leitergeschwindigkeit $v = r\omega$ die an den Schleifringen messbare Spannung

$$u = 2rlB\omega \sin(\omega t). \quad (4.96)$$

Da $2rl = A$ die Fläche der Leiterschleife ist, entspricht die Gl. (4.96) der Gl. (4.94). Die Rechnung über $(\vec{v} \times \vec{B})$ führt erwartungsgemäß zum gleichen Ergebnis wie die über $d\Phi/dt$.

Beispiel 4.22 ist typisch für viele praktische Aufgabenstellungen, bei denen sich die über Leiterbewegungen induzierten Spannungen auch über zeitliche Flussänderungen berechnen lassen. Man kann bei Aufgaben dieser Art allein nach Zweckmäßigkeit (d. h. minimalem Rechenaufwand) den Lösungsweg über $(\vec{v} \times \vec{B})$ oder über $d\Phi/dt$ wählen.

Beispiel 4.23: Spannungsinduktion bei zeitvariantem Magnetfeld

Die Leiterschleife aus Bild 4.45 soll sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Feld drehen, in dem sich die magnetische Flussdichte, wie in Bild 4.43b angegeben, zeitlich nach der Funktion $B = B_0 + K_1 t$ ändert.

Die an den Schleifringen auftretende Spannung u ist zu berechnen.

Hier wird die Spannung mit $d\Phi/dt$ gemäß Gl. (4.92) berechnet. Die Rechnung kann wie in Beispiel 4.22 bis zur ersten Gleichung durchgeführt werden, da bis dahin die konkrete Zeitabhängigkeit von B keine Rolle spielt. Allerdings darf die zeitliche Ableitung nicht mehr wie in Gl. (4.94) durchgeführt werden, da nun auch der Betrag von B zeitabhängig ist.

Unter Verwendung der Produktregel erhält man nun die Gleichung

$$u = -\frac{d}{dt}(A B \cos \alpha) = -A \left[\frac{dB}{dt} \cos \alpha + B \frac{d}{dt}(\cos \alpha) \right], \quad (4.97)$$

die nach Einsetzen der Ausdrücke $B = B_0 + K_1 t$ und $\alpha = \omega t$ die gesuchte Spannung ergibt:

$$u = A(B_0 + K_1 t) \omega \sin(\omega t) - AK_1 \cos(\omega t) \quad (4.98)$$

Beispiel 4.24: Unipolarmaschine im Leerlauf

Für die in Beispiel 4.19 behandelte Unipolarmaschine soll die induzierte Spannung über $d\Phi/dt$ berechnet werden.

Um in dieser Anordnung eine Flussänderung erfassen zu können, ist ein Kunstgriff sinnvoll: Man bezieht gedanklich einen Beobachtungsstandpunkt am Ende einer Speiche auf dem Radkranz, z. B. den Punkt P in Bild 4.40. Bei Drehung des Speichenrades ändert sich von diesem Standpunkt aus gesehen die Fläche, die von einem Umlauf von Punkt P über Speiche, Welle, Bürste, Spannungszählpfeil U , Bürste, Radkranz zurück zum Punkt P begrenzt wird, im Bereich des Kreissegmentes Bürste, Punkt P, Welle.

Über diese Flächenänderung

$$dA/dt = (r_a^2/2) d\varphi/dt = (r_a^2/2) \omega$$

lässt sich mit der zeitlich konstanten magnetischen Flussdichte \vec{B} senkrecht zu diesem Teil der Schleifenfläche auch eine Flussänderung

$$d\Phi/dt = B dA/dt = B \omega (r_a^2/2)$$

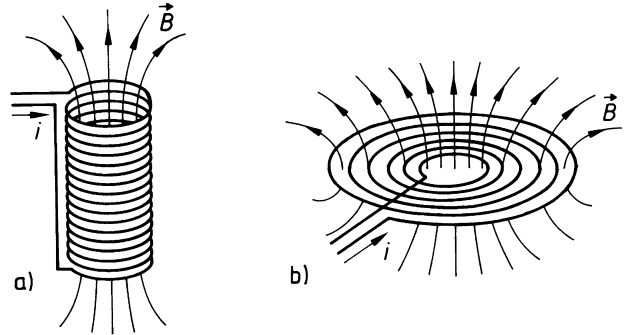
und damit eine Spannung berechnen, die der in Beispiel 4.19 entspricht.

Dieser Lösungsweg ist offensichtlich weniger anschaulich als der in Beispiel 4.19 über $(\vec{v} \times \vec{B})$ gezeigte.

Magnetischer Spulenfluss

Wird nicht, wie bisher, eine Leiterschleife betrachtet, die mit einem einzigen Umlauf die eingeschlossene Fläche beschreibt, sondern eine über mehrere Umläufe geführte, so gilt Gl. (4.92) sinngemäß. Im einfachsten Fall N dicht aneinanderliegender Einzelumläufe entsprechend den N Windungen einer konzentriert gewickelten Spule (Bild 4.46a) werden vom gesamten Umlauf N gleiche Flächen A eingeschlossen. In vielen praktisch relevanten Anordnungen wird jede dieser Windungen näherungsweise vom gleichen magnetischen Fluss Φ durchsetzt.

Bild 4.46: Extreme Spulenformen:
 (a) lange Spule mit vernachlässigbarer radialer Dicke und
 (b) kurze Spule mit radialer Wicklungsausdehnung



Wenn jede Windung näherungsweise mit dem gleichen Fluss $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ und damit der gleichen Flussänderung $d\Phi/dt$ verkettet ist, wird in jeder Windung näherungsweise die gleiche Umlaufspannung $u_\nu = -d\Phi/dt$ induziert und die gesamte in der Spule mit N Windungen induzierte Spannung ist

$$u = \sum_{\nu=1}^N u_\nu = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.99)$$

Sind die Flüsse Φ_ν nicht in allen Windungen näherungsweise gleich, wie in der in Bild 4.46b dargestellten Anordnung, sind auch die Teilspannungen $u_\nu = -d\Phi_\nu/dt$ der Windungen unterschiedlich, was bei der Summation

$$u = \sum_{\nu=1}^N u_\nu = -\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N \Phi_\nu \quad (4.100)$$

beachtet werden muss. Der *magnetische Spulenfluss* Ψ ist definiert als Summe aller magnetischen Windungsflüsse Φ_ν :

$$\Psi = \sum_{\nu=1}^N \Phi_\nu \quad (4.101)$$

Für den praktisch besonders wichtigen Fall der konzentriert gewickelten Spule gilt die Näherung

$$\Psi = N\Phi \quad (4.102)$$

mit dem Fluss Φ , der jede einzelne Windung der Wicklung durchsetzt.

Mit der Definition des Spulenflusses Ψ lautet das *Induktionsgesetz* in verallgemeinerter Form

$$u = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (4.103)$$

4.3.1.4 Selbstinduktionsspannung

Bisher wurde als Ursache der Spannungsinduktion in einer Leiterschleife ein sich ändernder *äußerer* magnetischer Fluss angenommen. In einer Leiterschleife (d. h. einer Masche eines Netzwerks, einer Windung oder Wicklung) wird eine Spannung aber auch dadurch induziert, dass ein in *ihr selbst* fließender Strom sich zeitlich ändert. Dadurch ändert sich auch der mit der Leiterschleife verkettete Fluss zeitlich, sodass zusätzlich zu dem Spannungsabfall über dem Wirkwiderstand der Leiterschleife eine Spannung als Folge der *Stromänderung* induziert wird. Diese induzierte Spannung bezeichnet man als *Selbstinduktionsspannung*.

Bild 4.47a zeigt eine Spannungsquelle, an die eine Spule mit N Windungen angeschlossen ist. Alle Wirkwiderstände des Stromkreises, also der der Spule und der Innenwiderstand der Quelle, sind zum Ersatzwiderstand R zusammengefasst.

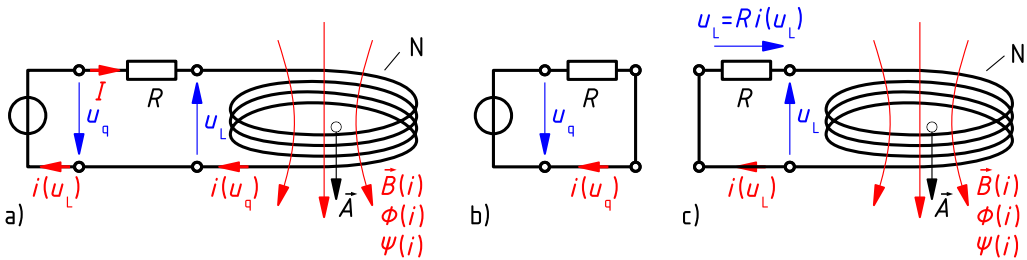


Bild 4.47: Zur Beschreibung der Selbstinduktion mit Hilfe des Überlagerungssatzes

- vollständige Masche aus Spannungsquelle, Spule und Widerstand
- Teilstrom $i(u_q)$, wenn u_L unwirksam ist
- Teilstrom $i(u_L)$, wenn u_q unwirksam ist

Die Quellenspannung $u_q > 0$ verursacht einen Strom $i > 0$ und dieser in der Spule eine magnetische Flussdichte $\vec{B}(i)$. Die Orientierung der Fläche der Spule wird durch den Vektor \vec{A} beschrieben, der dem Zählpfeil von i rechtswendig zuzuordnen ist. Die Zählpfeile für den magnetischen Fluss $\Phi(i)$ und den Spulenfluss $\Psi(i)$ sind ebenfalls in Richtung von \vec{A} einzutragen.

Der Strom $i > 0$ erzeugt ein Magnetfeld, das dem Zählpfeil von i rechtswendig zugeordnet ist und damit ein $\Phi > 0$ und ein $\Psi > 0$. Vereinfachend wird angenommen, dass alle Windungen mit dem gleichen Fluss Φ verkettet sind. Dann gilt $\Psi(i) = N\Phi(i)$.

Ändert sich der Strom i zeitlich (z. B. dadurch, dass die Spannung u_q oder der Widerstandswert R sich zeitlich ändert), so ändert sich auch der Spulenfluss $\Psi(i)$. In der Spule wird gemäß Gl. (4.103) die Spannung $u_L = -d\Psi(i)/dt$ induziert. Diese Selbstinduktionsspannung u_L ist zusätzlich zu der Quellenspannung u_q in der aus Spule, Spannungsquelle und Widerstand gebildeten Masche wirksam. Um die Abhängigkeit des Stroms i von *beiden* Spannungen zu untersuchen, wird dieser mit Hilfe des *Überlagerungssatzes* berechnet:

- Der von der Spannung u_q verursachte *Teilstrom* $i(u_q)$ wird berechnet, indem die Selbstinduktionsspannung u_L der als Spannungsquelle wirkenden Spule als unwirksam angenommen, also $u_L = 0$ gesetzt wird (Bild 4.47b). Daraus folgt der Teilstrom

$$i(u_q) = \frac{u_q}{R} > 0.$$

- b) Der durch die Selbstinduktionsspannung u_L verursachte *Teilstrom* $i(u_L)$ wird berechnet, indem die Spannung u_q der Spannungsquelle als unwirksam ($u_q = 0$) angenommen wird (Bild 4.47c). Die nun über den Widerstand R geschlossene Leiterschleife umfasst den zeitvarianten Spulenfluss $\Psi(i)$. Die in diesem Umlauf induzierte Selbstinduktionsspannung u_L tritt an den Klemmen der Spule und damit auch als Spannungsabfall $u_L = R i(u_L)$ am Widerstand R in Erscheinung. Sie wird nach Gl. (4.103) berechnet:

$$u_L = R i(u_L) = - \frac{d\Psi(i)}{dt}$$

Ihr Zählpfeil ist dem Zählpfeil des Spulenflusses $\Psi(i)$ rechtswendig zugeordnet (Bild 4.47c).

Die Selbstinduktionsspannung verursacht also einen Teilstrom

$$i(u_L) = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi(i)}{dt},$$

für den die in Bild 4.47c eingetragene Zählpfeilrichtung gilt.

Der sich tatsächlich im Kreis einstellende, den magnetischen Spulenfluss $\Psi(i)$ erzeugende Strom ergibt sich als Summe der beiden Teilströme nach a) und b) unter Beachtung der in Bild 4.47a, b und c eingetragenen Zählpfeilrichtungen der einzelnen Ströme als

$$i = i(u_q) + i(u_L) = \frac{u_q}{R} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi(i)}{dt}.$$

Wird der Strom i zeitlich größer, steigt auch der von ihm bewirkte Spulenfluss $\Psi(i)$ an. Dann ist die zeitliche Ableitung $d\Psi(i)/dt$ positiv, sodass die Selbstinduktionsspannung $u_L = -d\Psi(i)/dt$ und der durch sie verursachte Teilstrom $i(u_L)$ negativ werden. Der durch die Selbstinduktionsspannung u_L verursachte Teilstrom $i(u_L)$ fließt also *entgegen* der in Bild 4.47c bzw. a eingetragenen Zählpfeilrichtung, also entgegen der Richtung des größer werdenden Stroms i , *wirkt also dessen Ansteigen entgegen*.

Wird der Strom i zeitlich kleiner, wird auch der Spulenfluss $\Psi(i)$ kleiner und damit die zeitliche Ableitung $d\Psi(i)/dt$ negativ. Dann wird der Teilstrom $i(u_L)$ infolge der Selbstinduktionsspannung positiv, d. h. dieser Teilstrom fließt in Richtung seines Zählpfeils in Bild 4.47c bzw. 4.47a. Ein kleiner werdender Strom i hat also einen in gleicher Richtung fließenden Teilstrom $i(u_L)$ zur Folge, der somit dem Kleinerwerden des Stroms i entgegenwirkt.

In beiden Fällen wirkt also der durch die Selbstinduktionsspannung bewirkte Teilstrom seiner Ursache entgegen.

Allgemein gilt: Jede zeitliche Stromänderung bewirkt eine Selbstinduktionsspannung, die dieser Stromänderung entgegenwirkt, also den ursprünglichen Strom aufrechtzuerhalten versucht. (Primär gilt diese Aussage für den magnetischen Fluss, der über den Durchflutungssatz mit dem ihn erregenden Strom verknüpft ist. Sind mehrere Wicklungen mit einem Fluss verkettet, muss also die Summe der Ströme in allen Wicklungen betrachtet werden.)

Die obige Formulierung ist bekannt als *Lenzsche Regel*.

Mittels der Lenzschen Regel ist also die *Richtung* des *ausschließlich* durch einen Selbstinduktionsvorgang bewirkten Stromes bestimmbar. Bei konsequenter Verwendung von Zählpfeilen ist die Anwendung der Lenzschen Regel zur Vorzeichenbestimmung bei Induktionsvorgängen jedoch nicht erforderlich.

4.3.1.5 Selbst- und Gegeninduktivität

In der Praxis treten sehr häufig Anordnungen auf, in denen Selbstinduktionsspannungen berücksichtigt werden müssen. Zur Vereinfachung der Berechnungen wurde eine Größe eingeführt, mit der diese Spannungen direkt aus den Stromänderungen bestimmt werden können. Diese Größe wird als *Selbstinduktivität* (oder kurz, aber etwas unpräzise, als *Induktivität*) L bezeichnet. Die Definition dieser Größe wird im Folgenden am Beispiel der in den Abschnitten 4.1.2.2 und 4.1.3.4 behandelten Toroidspule erläutert, bei der alle N Windungen mit dem gleichen magnetischen Fluss Φ verketten sind, also $\Psi = N\Phi$ gilt. Mit der elektrischen Durchflutung $\Theta = NI$ und Gl. (4.50) lässt sich gemäß

$$\Psi = N\Phi = N\Lambda\Theta = N\Lambda NI = N^2\Lambda I \quad (4.104)$$

der Spulenfluss mittels des magnetischen Leitwerts Λ des Kreises berechnen.

Die Induktivität ist allgemeingültig definiert als *Verhältnis zwischen einem magnetischen Spulenfluss Ψ und dem diesen erzeugenden elektrischen Strom I* . Daraus folgt mit Gl. (4.104)

$$L = \frac{\Psi(I)}{I} = N^2\Lambda = \frac{N^2}{R_m}. \quad (4.105)$$

Die Induktivität stellt also eine Verbindung zwischen der integralen Feldgröße I des elektrischen Strömungsfeldes und der integralen Feldgröße Ψ des magnetischen Feldes her. Die Selbstinduktivität einer Spule wird ausschließlich durch die geometrischen Abmessungen der Spule und die Materialeigenschaften des Feldraumes bestimmt. Für das Beispiel der Toroidspule in Bild 4.7 folgt mit $\Lambda = \mu A_q / (d_R \pi)$ die Selbstinduktivität $L = N^2 \mu_r \mu_0 A_q / (\pi d_R)$.

Die aus Gl. (4.105) ersichtliche Proportionalität der Selbstinduktivität L zum *Quadrat* der Windungszahl N ist dadurch zu erklären, dass N sowohl als Faktor bei der Berechnung der elektrischen Durchflutung Θ als auch als Faktor bei der Berechnung des Spulenflusses Ψ auftritt.

Ist der magnetische Leitwert Λ bzw. der magnetische Widerstand R_m konstant, so ist auch die Induktivität L konstant. Dann folgt mit dem Induktionsgesetz in Form von Gl. (4.103) aus Gl. (4.105) für den Zusammenhang zwischen dem Strom $i(t)$ durch eine Leiterschleife (Spule) und der durch diesen Strom bewirkten Selbstinduktionsspannung $u(t)$ an ihren Klemmen

$$u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} = -N^2\Lambda \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.106)$$

Unbedingt zu beachten ist die Tatsache, dass Gl. (4.106) für Erzeuger-Zählpfeilsystem an den Klemmen der betrachteten Anordnung gilt, siehe Bild 4.47c!

Die Induktivität ist nur dann eine Konstante, wenn die relative Permeabilität μ_r unabhängig vom felderzeugenden Strom i ist. Bei Ferromagnetika kann μ_r je nach Material und Stärke der Magnetisierung erheblich von der magnetischen Feldstärke H abhängig sein, die durch die Größe von i bestimmt wird. *Die Induktivität L ist daher für Spulen mit ferromagnetischem Kern keine Konstante, sondern eine Funktion des Spulenstroms (und damit der Zeit), sodass in Gl. (4.106) die letzten beiden Ausdrücke $N^2\Lambda di/dt$ und $L di/dt$ nicht mehr gültig sind!*

Die Einheit der Induktivität L ergibt sich aus Gl. (4.105), indem die Einheiten $1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$ für den magnetischen Spulenfluss Ψ und 1 A für den Strom I eingesetzt werden. Mit der für die

Induktivität eingeführten Einheit Henry (H) gilt

$$[L] = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \Omega\text{s}. \quad (4.107)$$

Die Berechnung einer Selbstinduktivität über den magnetischen Leitwert ist sinnvoll, wenn dieser bekannt oder einfach berechenbar ist. Bei *Schalenkernen* wird der magnetische Leitwert als A_L -Wert in der Einheit nH angegeben. Er kann bei diesen Kernen als näherungsweise konstant betrachtet werden. Die Selbstinduktivität einer mit einem Schalenkern realisierten Spule ist

$$L = N^2 A_L.$$

Ansonsten wird ein Strom I in der Spule angenommen. Aus ihm wird mit dem Durchflutungssatz die magnetische Feldstärke \vec{H} und aus ihr mittels μ die magnetische Flussdichte \vec{B} berechnet. Anschließend wird der magnetische Fluss Φ ermittelt. Oft kann zumindest näherungsweise angenommen werden, dass alle N Windungen mit dem gleichen Fluss verkettet sind. Dann gilt

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (4.108)$$

Beispiel 4.25: Selbstinduktivität einer langen, dünnen Luftspule

Für eine lange, dünne Luftspule mit runder Querschnittsfläche gemäß Bild 4.46a mit dem Innendurchmesser $d_i = 20$ mm, dem Außendurchmesser $d_a = 21$ mm, der Länge $l = 150$ mm und der Windungszahl $N = 1000$ ist die Selbstinduktivität L zu berechnen.

Bei langen, dünnen Luftspulen ist die magnetische Spannung im Außenraum der Spule wesentlich kleiner als im Spuleninneren, sodass sie bei der Anwendung des Durchflutungssatzes näherungsweise vernachlässigt werden kann. Das Magnetfeld im Spuleninneren wird als näherungsweise homogen angenommen, die Feldaufweitung an den Spulenden also vernachlässigt. Somit gilt näherungsweise der Durchflutungssatz in der Form

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i l = NI. \quad (4.109)$$

Für den Luftraum im Inneren der Spule ergibt sich mit $\mu_i = \mu_0$

$$B_i = \mu_0 H_i = \mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (4.110)$$

Bei der gegenüber dem Spulendurchmesser geringen Dicke der Wicklung $(d_a - d_i)/2 = 0,5$ mm kann näherungsweise angenommen werden, dass alle Windungen mit dem gleichen Fluss Φ in der Spulenfläche $A_i = d_i^2 \pi/4$, verkettet sind. Damit folgt der Spulenfluss

$$\Psi = N B_i d_i^2 \frac{\pi}{4} = \frac{IN^2 d_i^2 \mu_0 \pi}{4l} \quad (4.111)$$

und aus ihm die gesuchte Selbstinduktivität der Spule

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{N^2 d_i^2}{l} = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \frac{\text{nH}}{\text{cm}} \cdot \frac{1000^2 (2 \text{ cm})^2}{15 \text{ cm}} = 2,64 \text{ mH}. \quad (4.112)$$

Beispiel 4.26: Äußerer Induktivitätsbelag einer Doppelleitung

Betrachtet wird eine Freileitung in Luft nach Bild 4.21b, die aus zwei parallelen Kupferdrähten mit den Radien r_0 besteht, die voneinander den Abstand $a \gg r_0$ haben. Die beiden Leiter bilden die Hin- und Rückleitung eines Stromkreises.

Der Induktivitätsbelag, d. h. die längenbezogene Selbstinduktivität dL/dl der Anordnung ist herzuleiten. Dabei soll der magnetische Fluss im Inneren der Leiter vernachlässigt werden. Eine so bestimmte Induktivität wird als „äußere Selbstinduktivität“ bezeichnet.

Das von einem in Hin- und Rückleiter gleich groß angenommenen Strom I bewirkte B -Feld ist in Bild 4.21b qualitativ dargestellt.

Alle Materialien in der Anordnung sind magnetisch neutral. Daher darf der Überlagerungssatz angewendet werden.

Zur quantitativen Beschreibung der resultierenden magnetischen Flussdichte B auf einer Verbindungslinie zwischen den Leitermittellinien wird die x -Achse in eine solche Verbindungslinie gelegt und in der Mitte des linken Leiters $x = 0$ gewählt.

Mit der in Abschnitt 4.1.4 erläuterten Ortsabhängigkeit von B außerhalb eines Leiters folgt für den Bereich zwischen den Außenradien der beiden Leiter, also von $x = r_0$ bis $x = a - r_0$, der Betrag der magnetischen Flussdichte

$$B = B(I_1) + B(I_2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a-x)}. \quad (4.113)$$

Da B nur eine Funktion von x , nicht aber von der Koordinate in Längsrichtung der Leiter abhängig ist, kann der von der Doppelleitung eingeschlossene magnetische Fluss wie in Beispiel 4.8 erläutert berechnet werden.

Für einen Abschnitt der Doppelleitung der Länge l gilt mit $dA = l dx$ und $I_1 = I$ sowie $I_2 = -I$

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{r_0}^{a-r_0} B(x) l dx = l \frac{\mu_0}{2\pi} I \left[\int_{r_0}^{a-r_0} \frac{dx}{x} - \int_{r_0}^{a-r_0} \frac{dx}{a-x} \right] = l I \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a-r_0}{r_0}. \quad (4.114)$$

Die äußere Selbstinduktivität der Doppelleitung wird nach Gl. (4.108) mit $N = 1$ bestimmt:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{l \mu_0}{\pi} \ln \frac{a-r_0}{r_0} \quad (4.115)$$

Daraus folgt mit $a \gg r_0$ der gesuchte äußere Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a-r_0}{r_0} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{r_0}. \quad (4.116)$$

Der von einem zeitvarianten Strom $i_1(t)$ in einer Spule 1 mit der Induktivität L_1 bewirkte zeitvariante Spulenfluss $\Psi_1(t) = L_1 i_1(t)$ induziert in dieser Spule eine Selbstinduktionsspannung $u_1(t)$, die sich bei konstanter Induktivität nach Gl. (4.106) zu $u_1(t) = -L_1 di_1(t)/dt$ ergibt.

Ist der magnetische Fluss $\Phi_1(i_1)$ zusätzlich ganz oder teilweise mit einer Spule 2 verkettet, so wird auch in dieser Spule eine Spannung induziert, die man zur Unterscheidung von der Selbstinduktionsspannung als *Gegeninduktionsspannung* bezeichnet. Selbstverständlich kann der Vorgang auch umgekehrt ablaufen, d. h. ein zeitvarianter Strom in Spule 2 wird auch eine Spannung in Spule 1 induzieren.

In Bild 4.48 ist die magnetische Kopplung zweier Spulen schematisch dargestellt. Es wird davon ausgegangen, dass diese magnetische Kopplung erwünscht ist. Die Spulen 1 und 2 sind der Einfachheit halber mit nur je einer Windung gezeichnet. Wenn sie aus N_1 bzw. N_2 Windungen bestehen, muss statt mit dem Fluss Φ mit dem Spulenfluss Ψ gerechnet werden.

Gemäß Bild 4.48 durchsetzt im allgemeinen Fall nur ein bestimmter Anteil des Flusses der einen Spule auch die andere. Man bezeichnet diesen Anteil als *Kopplungsgrad* k_1 bzw. k_2 .

Ein in der Spule 1 (Bild 4.48a) fließender Strom I_1 erzeugt einen Gesamtfluss Φ_1 , der in den auch die Spule 2 durchsetzenden *Nutzfluss* $\Phi_{12} = k_1\Phi_1$ und den nur die Spule 1 durchsetzenden *Streufluss* $\Phi_{10} = (1 - k_1)\Phi_1$ aufgeteilt werden kann.

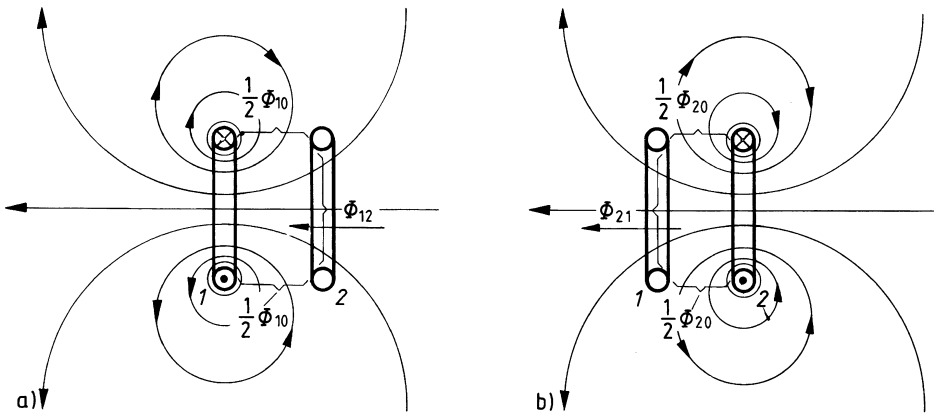


Bild 4.48: Magnetischer Nutzfluss Φ_{12} bzw. Φ_{21} und Streufluss Φ_{10} bzw. Φ_{20} bei zwei magnetisch gekoppelten Spulen, wenn jeweils nur eine Spule – Spule 1 (a), Spule 2 (b) – vom Strom durchflossen ist

Lässt man nur durch die Spule 2 (Bild 4.51b) einen Strom I_2 fließen, so teilt sich der Gesamtfluss Φ_2 durch die Spule 2 in den *Nutzfluss* $\Phi_{21} = k_2\Phi_2$ und den *Streufluss* $\Phi_{20} = (1 - k_2)\Phi_2$ auf. Dabei gilt

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + \Phi_{12} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \Phi_{20} + \Phi_{21}.$$

Die Streuflüsse Φ_{10} bzw. Φ_{20} sind jeweils nur mit der sie erzeugenden Spule verkettet, die Nutzflüsse Φ_{12} bzw. Φ_{21} hingegen zusätzlich mit der jeweils anderen Spule.

Die in der jeweils anderen Spule induzierte Spannung wird ausschließlich durch den jeweiligen Nutzfluss verursacht. Man erhält nach Bild 4.48a für die von einer zeitlichen Änderung des

Stroms i_1 in der Spule 2 erzeugte Spannung u_2 und nach Bild 4.48b für die von einer zeitlichen Änderung des Stroms i_2 in der Spule 1 erzeugte Spannung u_1 mit dem Induktionsgesetz und $\Psi = N\Phi$ die Gleichungen

$$u_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und} \quad u_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \quad (4.117)$$

Für die Richtung der Gegeninduktionsspannung nach Gl. (4.117) gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten, wie sie für das allgemeine Induktionsgesetz Gl. (4.92) festgelegt sind. Der *Zählpfeil für die Gegeninduktionsspannung* u_1 bzw. u_2 ist also *rechtswendig* zu dem durch den *Flächenvektor* \vec{A}_1 bzw. \vec{A}_2 gegebenen *Flusszählpfeil* Φ_{21} bzw. Φ_{12} einzutragen.

Bei Gleichheit der magnetischen Teilflüsse Φ_{12} und Φ_{21} ist der Unterschied der Spannungen nur durch die Windungszahlen beider Spulen bestimmt. Für diesen Fall ergibt die Division beider Gleichungen das *Übersetzungsverhältnis* $\dot{u} = u_1/u_2 = N_1/N_2$ des verlustlosen Transformators.

Wie bei der Berechnung der Selbstinduktionsspannungen kann man auch die Gegeninduktionsspannungen unmittelbar durch die Stromänderungen di/dt angeben. Man ersetzt dazu die Teilflüsse Φ_{12} und Φ_{21} in Gl. (4.117) durch Gl. (4.50) mit $\Theta = iN$:

$$\Phi_{12} = \Lambda_{12} N_1 i_1 \quad \text{und} \quad \Phi_{21} = \Lambda_{21} N_2 i_2$$

Wird für beide Spulen der gleiche Kopplungsgrad $k_1 = k_2 = k$ und der gleiche magnetische Teileitwert $\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = k\Lambda$ vorausgesetzt, so ergeben sich mit

$$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = k\Lambda N_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi_{21}}{dt} = k\Lambda N_2 \frac{di_2}{dt}$$

aus Gl. (4.117) die Gegeninduktionsspannungen

$$u_2 = -k\Lambda N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} \quad \text{und} \quad u_1 = -k\Lambda N_1 N_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Der den beiden Gleichungen gemeinsame Faktor vor den zeitlichen Ableitungen der Ströme wird analog der Selbstinduktivität L als *Gegeninduktivität*

$$M = N_1 N_2 k \Lambda = k \sqrt{N_1^2 \Lambda N_2^2 \Lambda} = k \sqrt{L_1 L_2} > 0 \quad (4.118)$$

bezeichnet. Damit können die induzierten Spannungen direkt aus der Stromänderung berechnet werden:

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{und} \quad u_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad (4.119)$$

Für die Gegeninduktivität M wird dieselbe Einheit wie für die Induktivität L verwendet, also das Henry (H).

Die Flüsse Φ_{10} bzw. Φ_{20} in Bild 4.48 werden als *Streuflüsse* (Abschnitt 4.2.2.1) bezeichnet, da sie nicht zur *magnetischen Kopplung* der beiden Spulen beitragen, die in vielen Fällen als der gewollte Nutzeffekt angesehen wird, z. B. beim Transformator (Abschnitt 5.13). Dementsprechend werden die Flüsse Φ_{12} bzw. Φ_{21} , die mit beiden Spulen verkettet sind, als *Nutz- oder Hauptflüsse* bezeichnet.

Die in Bild 4.48 dargestellten anschaulichen Zuordnungen von Nutz- und Streuflüssen sind nur möglich, wenn ein felderzeugender Strom lediglich in einer der beiden Spulen fließt, die andere hingegen stromlos ist. Fließen Ströme in beiden Spulen, so ergibt sich eine Überlagerung der beiden Felder, die im Feldbild meist keine eindeutige Zuordnung von Feldräumen zu Nutz- und Streufluss mehr ermöglicht. Die Erklärung der Streuung bzw. Kopplung erfolgt dann auf der Basis des für beide magnetischen Kreise aufgestellten gekoppelten Spannungsgleichungssystems, den Transformatorgleichungen, siehe Abschnitt 5.13.

4.3.1.6 Selbst- und Gegeninduktionsspannung im Verbraucher-Zählpfeilsystem

Bei der Netzwerkberechnung in Kapitel 5 wird die Selbstinduktionsspannung $u(t)$, die ein Strom $i(t)$ an einer Spule verursacht, mit Hilfe ihrer Induktivität L berechnet. Dies kann gemäß Gl. (4.106) in der Form $u(t) = -L di(t)/dt$ erfolgen. *Diese Gleichung gilt allerdings nur für das Erzeuger-Zählpfeilsystem.*

Bei der Netzwerkanalyse ist es üblich, die Zählpfeile an den Zweipolen, die passive Elemente modellieren, im Verbraucher-Zählpfeilsystem einzutragen. Diese Vorgehensweise erfordert eine Umkehrung des Zählpfeils für die Spannung gegenüber dem oben beschriebene Fall, was auch eine Umkehrung des Vorzeichens dieser Spannung in Gl. (4.106) bedingt. Für die Selbstinduktionsspannung an einer Spule mit der Selbstinduktivität L bei *Verbraucher-Zählpfeilsystem* gilt also

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.120)$$

Analog zur Selbstinduktionsspannung ergibt sich für die Gegeninduktionsspannungen

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} \quad \text{und} \quad u_1(t) = M \frac{di_2(t)}{dt}. \quad (4.121)$$

4.3.1.7 Wirbelströme

Die Induktionswirkungen in linienförmigen Leitern sind relativ einfach mit Hilfe der integralen Größen Spannung und Strom zu beschreiben, sofern die Leitergeometrie einfach ist. In räumlich ausgedehnten Strömungsgebieten können die Induktionswirkungen nur mittels der differenziellen Feldgrößen elektrische Feldstärke \vec{E} und elektrische Stromdichte \vec{J} beschrieben werden.

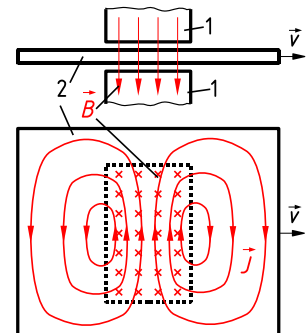


Bild 4.49: Wirbelstromdichte \vec{J} in einer Scheibe 2, die im Magnetfeld \vec{B} zwischen den Polen 1 bewegt wird

Wird beispielsweise, wie in Bild 4.49 dargestellt, eine Metallscheibe 2 mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein Magnetfeld \vec{B} zwischen den Polen 1 bewegt, so werden in den in das Feld eintretenden

und aus ihm austretenden Bereichen der Scheibe Umlaufspannungen induziert. Diese haben in einer leitfähigen Scheibe *Wirbelströme* zur Folge, die durch ein elektrisches Strömungsfeld \vec{J} , wie in Bild 4.49 schematisch skizziert, beschrieben werden.

Solche Wirbelströme entstehen nicht nur durch Bewegungen, sondern auch in ruhenden leitfähigen Gebieten, in denen sich das Magnetfeld zeitlich ändert, z. B. in den Blechen von mit Wechselstrom erregten magnetischen Kreisen (Bild 4.50).

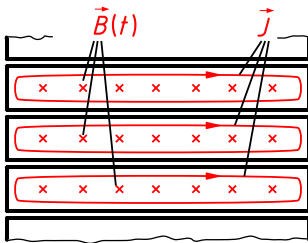


Bild 4.50: Wirbelstromdichte \vec{J} , die von einem zeitvarianten Magnetfeld $\vec{B}(t)$ in den Querschnittsebenen eines geblechten Eisenkerns verursacht wird

Beabsichtigt sind solche Wirbelströme beispielsweise in Zählerscheiben als Wirbelstrombremse, in Induktionsöfen und in magnetischen Abschirmungen von Geräten der Nachrichtentechnik.

Unbeabsichtigt und störend sind Wirbelströme in den Eisenkreisen elektrischer Maschinen wie Motoren, Generatoren und Transformatoren. Würde man diese als massive Eisenblöcke ausführen, so würden bei ihrer Magnetisierung mit Wechselstrom Spannungen und damit Ströme induziert, die erhebliche Erwärmungen und elektrische Verluste zur Folge hätten. Eisenkreise werden daher häufig aus *gegeneinander isolierten Blechen* (Dicke z. B. 0,5 mm) so aufgebaut, dass die Isolationsebenen parallel zur Flussrichtung und damit rechtwinklig zu der Ebene liegen, in der sich die induzierten Umlaufspannungen und die durch sie hervorgerufenen Ströme ausbilden (Bild 4.50). Dadurch wird das Verhältnis von induzierter Umlaufspannung zu Länge des Umlaufweges, d. h. zum Widerstand der Strombahn, entsprechend klein, sodass die Wirbelströme und die durch sie verursachten Verluste in tragbaren Grenzen bleiben.

4.3.2 Energie und Kräfte im magnetischen Feld

In der Natur spielen sich neben den irreversiblen energieumformenden Vorgängen, wie sie z. B. in stromdurchflossenen Widerständen ablaufen (die elektrische Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt), auch reversible energiespeichernde Vorgänge ab. So wird z. B. der potenzielle Energieinhalt einer Masse, die durch eine äußere Kraft von der Erde (zweite Masse) entfernt wird, größer; sie speichert Energie, die sie wieder abgeben kann. Wenn nämlich diese Masse nicht mehr durch äußere Kräfte in einer bestimmten Höhe (Abstand von Erdmittelpunkt) gehalten wird, fällt sie zur Erde zurück und gibt dabei die in ihr gespeicherte Energie wieder ab. In der Mechanik beschreibt man dieses Energiespeichervermögen in Massen über das Gravitationsfeld.

Ähnlich kann auch das magnetische Feld Energie speichern. Schaltet man z. B. eine Spule an eine Spannungsquelle, so beginnt ein Strom zu fließen (Abschnitt 9.3.2.1). Hierdurch nimmt die Spule elektrische Energie auf, die in dem durch den Strom bewirkten Magnetfeld der Spule gespeichert wird. Dass es sich hier, ähnlich wie beim Anheben der Masse, um einen speichernden, d. h. einen reversiblen Vorgang handelt, wird klar, wenn die stromdurchflossene Spule von der Spannungsquelle abgeschaltet und unterbrechungslos an einen Widerstand angeschlossen wird. Für eine bestimmte Zeit fließt dann nämlich noch ein Strom (Abschnitt 9.3.2.2), obwohl

keine äußere Spannungsquelle mehr im Kreis wirksam ist. Dieser Strom kann über das Induktionsgesetz berechnet werden und erklärt sich aus dem zum Zeitpunkt des Abschaltens der Spannungsquelle noch vorhandenen Magnetfeld, das abgebaut wird. Dabei wird der magnetische Fluss kleiner, sodass eine Spannung induziert wird, über die die gespeicherte magnetische Energie wieder in elektrische umgeformt wird.

Weiterhin können reversible Wechselwirkungen zwischen mechanischer und magnetischer Energie auftreten. Nähert man z. B. einen ferromagnetischen Körper den Polen eines Dauermagneten, so wird dieser angezogen, d. h. es wirken Kräfte auf ihn. Bewegt sich der Körper infolge dieser Kräfte, z. B. bei fehlenden äußeren (haltenden) Kräften, wird der Körper beschleunigt und prallt letztlich mit einer bestimmten Geschwindigkeit, also kinetischer Energie, auf die Pole des Dauermagneten auf. Dabei nimmt nachweislich die vom Dauermagneten bewirkte *magnetische Feldenergie* ab, sodass der Energieerhaltungssatz in jedem Augenblick erfüllt ist, d. h. bei fehlenden Verlusten (Reibung) ist die abgegebene magnetische gleich der aufgenommenen mechanischen Energie.

In den nächsten Abschnitten werden zunächst Beziehungen zur Berechnung der Feldenergie abgeleitet und danach über den Energieerhaltungssatz die im Magnetfeld auftretenden mechanischen Kräfte bestimmt.

4.3.2.1 Energie des magnetischen Feldes

Die in einem magnetischen Feld gespeicherte Energie wird zweckmäßigerweise mit dem Energieerhaltungssatz aus der elektrischen Energie bestimmt, die dem magnetischen Kreis über den das Feld bewirkenden Strom zugeführt wird.

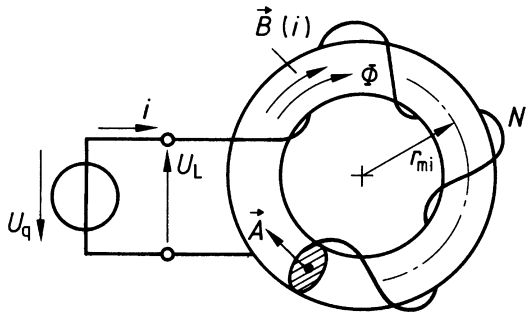


Bild 4.51: Toroidspule an Spannungsquelle mit Zählpfeilen für Strom, Spannung und magnetischen Fluss

Dazu wird die in Bild 4.51 dargestellte Toroidspule mit N Windungen auf einem zunächst unmagnetisierten ferromagnetischen Kern mit der Querschnittsfläche A und dem mittleren Radius $r_{mi} \gg \sqrt{A}$ betrachtet. Die Spule wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannungsquelle mit $U_q > 0$ angeschlossen, sodass ein Strom $i > 0$ zu fließen beginnt (Abschnitt 9.3.2.1). Der von $i = 0$ ansteigende Strom bewirkt eine steigende magnetische Flussdichte $\vec{B}(i)$ rechtswendig zum Strom. Der Flächenvektor des Eisenkerns \vec{A} und damit der Zählpfeil für den magnetischen Fluss Φ sind wie in Bild 4.51 skizziert rechtswendig zum Zählpfeil des Stroms i einzutragen. Der Zählpfeil der Selbstinduktionsspannung U_L wird gemäß Abschnitt 4.3.1.3 rechtswendig zum Zählpfeil von Φ eingetragen.

Sind keine Wirkwiderstände im Stromkreis zu berücksichtigen, folgt aus dem Maschensatz $U_q + U_L = 0$ mit $U_L = -Nd\Phi/dt$ die Gleichung $U_q = Nd\Phi/dt$. Nach Multiplikation beider Seiten

dieser Gleichung mit $i dt$ erhält man die dem magnetischen Kreis von der Spannungsquelle im Zeitraum dt elektrisch zugeführte Energie

$$dW = U_q i dt = i N d\Phi. \quad (4.122)$$

Mit dem mittleren Radius r_{mi} der Toroidspule folgt aus dem Durchflutungssatz $i N = 2\pi r_{\text{mi}} H$ die magnetische Feldstärke H , die näherungsweise über den Querschnitt A als konstant angenommen wird. Da der Flächenvektor \vec{A} gleichgerichtet parallel zu dem der magnetischen Flussdichte $\vec{B} = \mu \vec{H}$ liegt, ergibt sich nach Gl. (4.122) die über die Klemmen der Spannungsquelle fließende Energie

$$dW = 2\pi r_{\text{mi}} H A dB.$$

Aus der Zuordnung der Zählpfeile von i und U_q nach dem Erzeuger-Zählpfeilsystem und dem positiven Vorzeichen der berechneten Energie folgt, dass die Energie von der Spannungsquelle abgegeben und der Spule aufgenommen wird. Sie muss daher in dem vom Strom i in der Spule bewirkten magnetischen Feld gespeichert sein. Im Toroidkern sind die Beträge H und B näherungsweise homogen. Die Energie, die dem Magnetfeld in der Zeit dt *pro Volumen* V elektrisch zugeführt wird, erhält man durch Division von dW durch das Volumen $V = 2\pi r_{\text{mi}} A$ des Kerns:

$$dw = \frac{dW}{V} = H dB \quad (4.123)$$

Steigt der Strom von $i = 0$ bis $i = I_{\text{max}}$ an, so steigt auch das Feld von $B = H = 0$ bis $B = B_{\text{max}}$ und $H = H_{\text{max}}$ an. Die Energiedichte in einem Feld der magnetischen Flussdichte B_{max} ergibt sich daher als Integral $w = \int H dB$ in den Grenzen $B = 0$ und $B = B_{\text{max}}$.

Diese für das Modell einer Toroidspule abgeleiteten Beziehungen können für beliebige homogene und inhomogene Felder verallgemeinert werden. In einem Feldbereich mit der magnetischen Flussdichte B_{max} weist ein Magnetfeld die *Energiedichte*

$$w = \int_{B=0}^{B_{\text{max}}} H dB \quad (4.124)$$

auf. Die gesamte *magnetische Feldenergie* W ist das Integral der Energiedichte w über das Feldvolumen V :

$$W = \int_V \left[\int_{B=0}^{B_{\text{max}}} H dB \right] dV \quad (4.125)$$

Für Felder in Stoffen mit *konstanter Permeabilität* (z.B. Luft) gilt $H = B/\mu \sim B$. In diesen Fällen kann das Integral in Gl. (4.124) berechnet werden und für die *magnetische Energiedichte* gilt (mit der Umbenennung von B_{max} in B)

$$w = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2}. \quad (4.126)$$

Ist die Induktivität L einer Anordnung bekannt, lässt sich der Energieinhalt des von einem Strom i in ihr bewirkten magnetischen Feldes auch direkt aus der Induktivität und dem Strom

ermitteln. Führt man die obige Herleitung mit der Selbstinduktionsspannung in der Form $U = -L di/dt$ durch, ergibt sich $dW = L i di$ und daraus $W = \int L i di$. Für Anordnungen mit konstanter Induktivität L ist die magnetische Feldenergie also

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \tag{4.127}$$

In vielen Fällen, in denen die Berechnung der Selbstinduktivität einer Anordnung mittels $L = \Psi/I$ schwierig ist, kann diese einfacher mittels $L = 2W/I^2$ aus der magnetischen Feldenergie bestimmt werden. Dies gilt z. B. für die Berechnung innerer Induktivitäten, also für die Induktivitätsanteile, die durch den Fluss innerhalb eines Leiters verursacht werden.

Ist die Permeabilität nicht konstant, sondern eine Funktion der magnetischen Feldstärke H , so lässt sich das Integral in Gl. (4.124) nicht mehr allgemeingültig berechnen. Bild 4.52 zeigt, dass bei ferromagnetischen Stoffen der Wert des Integrals der Fläche zwischen B -Achse und Hystereseschleife $B(H)$ proportional ist. Man erkennt, dass beim Aufmagnetisieren (Kurve $B_A(H)$ in Bild 4.52) die vom Magnetfeld aufgenommene Energie $W_A \sim \int H(B_A) dB$ größer ist als die bei der Entmagnetisierung (Kurve $B_E(H)$ in Bild 4.52) vom Feld abgegebene Energie $W_E \sim \int H(B_E) dB$. Die Differenz beider Energien ist die beim einmaligen Ummagnetisieren in Wärme umgewandelte Energie $W_A - W_E$. Sie ist proportional zu der von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche. Diese Energie wird als Ummagnetisierungs- oder Hystereseverlustenergie bezeichnet. Bei der Magnetisierung mit Sinusstrom ist die umgesetzte Verlustleistung proportional zur Frequenz des Stroms. Diese Leistung wird als Hysterese- oder Ummagnetisierungsverlustleistung bezeichnet.

4.3.2.2 Kraftwirkung auf Grenzflächen

Bild 4.53 zeigt zwei Pole eines magnetischen Eisenkreises mit der Querschnittsfläche A und der anfänglichen Luftspatllänge l_1 . Das magnetische Feld kann bei nicht zu großem Luftspalt auch zwischen den Polen als näherungsweise homogen angenommen werden. Die (für die auftretenden Kräfte belanglose) Richtung des Feldes ist durch Nord- und Südpol und durch Pfeile an den Feldlinien gekennzeichnet. Erfahrungsgemäß ziehen sich zwei derartig im Feld einander gegenüberstehende Pole an; sie üben also Anziehungskräfte F aufeinander aus.

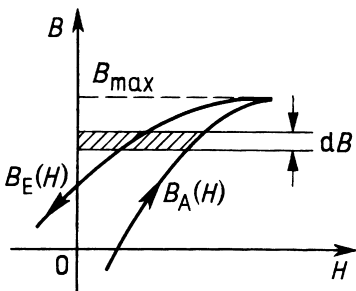


Bild 4.52: Grafische Deutung der magnetischen Energiedichte $\int H dB$ bei der Hystereseschleife

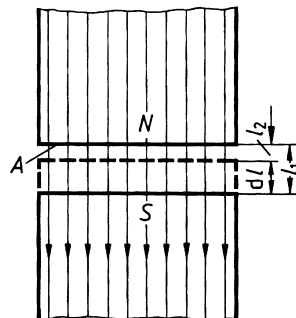


Bild 4.53: Virtuelle Verschiebung dl einer Polfläche (Grenzfläche) A im Magnetfeld zur Ermittlung der auf sie wirkenden Kraft

Bewegen sich die Pole, also die Grenzflächen zwischen Eisen und Luft, infolge der anziehenden Kräfte um den infinitesimal kurzen Weg $dl = l_1 - l_2$ aufeinander zu, so wird dabei die mechanische Arbeit

$$dW_{\text{mech}} = F dl \quad (4.128)$$

geleistet. Um diese Arbeit muss sich die Energie des magnetischen Feldes verringern, wenn sonst keine Energie dem System zu- oder abgeführt wird (z. B. dadurch, dass Verluste auftreten oder das Magnetfeld von einer an eine Spannungsquelle angeschlossenen Spule bewirkt wird).

Die in Eisen und Luft gleiche magnetische Flussdichte bleibt während der infinitesimalen Verkürzung des Luftspaltes näherungsweise konstant. Die magnetischen Feldstärken in Luft (Index L) bzw. Eisen (Index Fe) sind

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} \quad \text{bzw.} \quad H_{\text{Fe}} = \frac{B}{\mu_r \mu_0} . \quad (4.129)$$

Bei der Luftspaltverkürzung um dl ändert sich die Feldenergie lediglich im Volumen $dV = A dl$, in dem sich die Feldstärke von $H_L = B/\mu_0$ auf $H_{\text{Fe}} = B/(\mu_0 \mu_r)$ verkleinert. Mit der Energiedichte nach Gl. (4.124) und dem jeweils angenommenen homogenen Feldverlauf im Luft- bzw. Eisenvolumen (V_L bzw. V_{Fe}) ergibt sich der Wert

$$dW = dV_L w_L - dV_{\text{Fe}} w_{\text{Fe}} = A dl \left(\int_0^B \frac{B}{\mu_0} dB - \int_0^B \frac{B}{\mu_0 \mu_r} dB \right) , \quad (4.130)$$

um den sich die magnetische Feldenergie verkleinert. Nach dem Energieerhaltungssatz muss eine gleich große mechanische Energie $dW_{\text{mech}} = F dl$ auftreten. Durch Gleichsetzen dieser beiden Energiebeträge ergibt sich die *Kraft auf die Polflächen*

$$F = A \left(\frac{B^2}{2\mu_0} - \int_0^B \frac{B}{\mu_0 \mu_r} dB \right) . \quad (4.131)$$

Da für Eisen (von höheren Sättigungen abgesehen) $\mu_r \gg 1$ ist, gilt $H_{\text{Fe}} \ll H_L$ und damit auch $W_{\text{Fe}} \ll W_L$, sodass die Kraft auf die Polflächen näherungsweise mittels

$$F \approx A \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.132)$$

berechnet werden kann. Bezieht man diese Kraft auf den Flächeninhalt A einer Polfläche, so erhält man den Betrag der *mechanischen Zugspannung* σ_{mech} auf Grenzflächen zwischen Eisen und Luft:

$$\sigma_{\text{mech}} = \frac{F}{A} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.133)$$

Mit $\mu_0 = 1,257 \mu\text{Tm/A}$ ergibt sich im SI-Einheitensystem für diese mechanische Spannung die Einheit

$$[\sigma_{\text{mech}}] = \frac{1 \text{ T}^2}{1 \text{ Tm/A}} = 1 \frac{\text{TA}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{VsA}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (4.134)$$

Beispiel 4.27: Mechanische Zugspannung bei einem Elektromagneten

Für einen Elektromagneten nach Bild 4.54 soll die an den Polflächen auftretende mechanische Zugspannung σ_{mech} als Funktion der Luftspaltlängen δ berechnet werden.

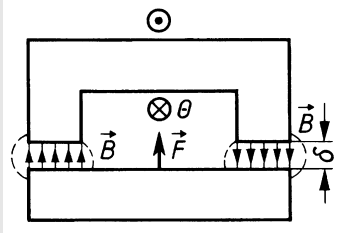


Bild 4.54: Zur Berechnung der mechanischen Zugspannung σ_{mech} bei einem Elektromagneten

Vereinfachend wird angenommen, dass die Permeabilität des Eisens sehr groß ist ($\mu_r \rightarrow \infty$), im Eisen also keine nennenswerte magnetische Feldenergie gespeichert wird. Die Magnetisierung erfolgt durch eine Spule mit $N = 1000$ Windungen, durch die ein konstanter Strom $I = 1$ A fließt. Somit ist auch die elektrische Durchflutung $\Theta = NI = 1000 \cdot 1$ A konstant. Aus dem Durchflutungssatz $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$ folgt, dass der Betrag der magnetischen Flussdichte $B = \mu_0 \Theta / (2\delta)$ und damit die Zugspannung gemäß Gl. (4.133)

$$\sigma_{\text{mech}} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \Theta^2}{8\delta^2} = \frac{I^2 \mu_0 N^2}{8\delta^2} \quad (4.135)$$

von der Luftspaltlänge δ abhängen. In Bild 4.55 ist die Zugspannung σ_{mech} für konstantes Θ als Funktion von δ aufgetragen.

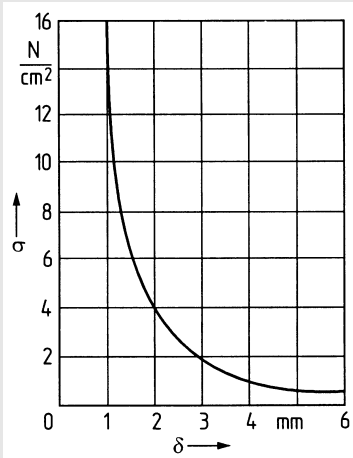


Bild 4.55: Mechanische Zugspannung σ auf die Polflächen in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge δ für einen Elektromagneten nach Bild 4.54 bei $\Theta = 1000$ A

Bei dem der Rechnung zugrundeliegenden Modell würde für $\delta \rightarrow 0$ die Zugspannung $\sigma_{\text{mech}} \rightarrow \infty$ streben, da der magnetische Widerstand des Kreises R_m gegen null und damit die magnetische Flussdichte B gegen unendlich streben würden. Tatsächlich macht sich aber bei steigender magnetischer Flussdichte infolge der zunehmenden Sättigung der wachsende magnetische Widerstand des Eisens bemerkbar. Für $\delta \rightarrow 0$ nähert sich der magnetische Widerstand des Eisenkreises einem endlichen Wert, der die magnetische Flussdichte und damit die Zugspannung σ_{mech} begrenzt.

Die in diesem Beispiel für eine bestimmte Luftspaltlänge δ berechnete Zugspannung gilt nur für den stationären Betrieb, also nur, wenn dieser Luftspalt bereits so lange eingestellt war, dass alle Ausgleichsvorgänge abgeklungen sind.

Betrachtet man den Anziehungsvorgang dynamisch, so ist die Induktionsspannung in der Spule zu berücksichtigen, die infolge der durch die Luftspaltänderung bewirkten Flussänderung entsteht. Diese Induktionsspannung bewirkt eine Stromänderung, die den bei kleiner werdendem Luftspalt größer werdenden Fluss wieder zu verkleinern versucht (Lenzsche Regel). Für solche dynamischen Vorgänge müssen also die magnetische Flussdichte wie auch die mechanische Zugspannung als Funktionen der Zeit betrachtet werden.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auf Grenzflächen erweitern, die in einem beliebigen Winkel zur magnetischen Feldrichtung verlaufen [Fro94]. Allgemein gilt: Auf Grenzfläche zwischen Stoffen unterschiedlicher Permeabilität werden im magnetischen Feld Kräfte ausgeübt, die unabhängig vom Verlauf der Feldlinien *stets senkrecht auf die Grenzfläche wirken* und so gerichtet sind, *dass sie das Volumen des Stoffs mit der kleineren Permeabilität zu verkleinern versuchen*.

Beispiel 4.28: Mechanische Spannung bei einer Spule mit Tauchanker

In Bild 4.56 ist eine Spule dargestellt, in die ein federnd aufgehängter ferromagnetischer Kern (Anker) hineingezogen wird, wenn die Spule von einem Strom durchflossen wird. Die mechanische Zugspannung auf den Anker ist für den Fall zu berechnen, dass die Spule $N = 1000$ Windungen hat und von einem Gleichstrom $I = 0,5$ A durchflossen wird. Die Spulenlänge $l = 15$ cm ist sehr groß gegenüber ihrem Innendurchmesser $d_2 = 1,0$ cm. Der Durchmesser des Ankers ist $d_1 = 0,9$ $d_2 = 0,9$ cm.

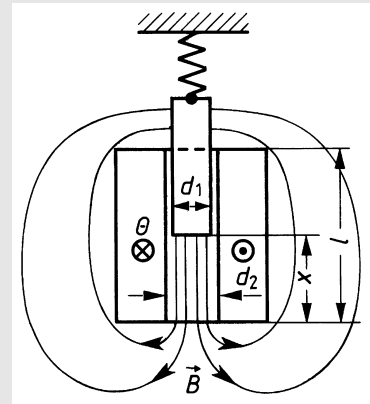


Bild 4.56: Spule mit Tauchanker

Befände sich kein ferromagnetischer Kern in der Spule, könnte wegen $d_2 \ll l$ näherungsweise angenommen werden, dass das Feld *außerhalb* der Spule keinen Beitrag zur magnetischen Umlaufspannung liefert. Dann folgte aus dem Durchflutungssatz $\Theta = \oint \vec{H} d\vec{l}$ die Feldstärke im Inneren der Spule $H \approx N I / l$.

Füllte der ferromagnetische Kern den gesamten Innenraum der Spule aus, so lägen die Verhältnisse genau umgekehrt. Dann wäre im Spulenninneren (im Ferromagnetikum) $H \approx 0$ und das Feld außerhalb der Spule H_a erfüllte den Durchflutungssatz $\int \vec{H}_a d\vec{l} \approx \Theta$.

In diesem Fall könnte die Feldstärke H allerdings nicht mit unseren elementaren Mitteln bestimmt werden, da das Feld außerhalb der Spule stark inhomogen ist.

Füllt der Tauchanker nur einen Teil des Innenraums der Spule aus, also für $0 < x < l$, gilt näherungsweise wieder, dass nur das H -Feld über die Länge x des Spuleninneren im Durchflutungssatz berücksichtigt zu werden braucht, also $H \approx \Theta/x$ gilt.

Die magnetische Flussdichte an der Stirnfläche des Ankers im Inneren der Spule ist also nach diesem Modell

$$B \approx \frac{\mu_0 IN}{x}. \quad (4.136)$$

Der Betrag der auf die Stirnfläche wirkenden mechanische Zugspannung ist nach Gl. (4.133)

$$\sigma_{\text{mech}} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 N^2}{2x^2} = \frac{1,26(\mu\text{Vs}/\text{Am}) 0,5^2 \text{A}^2 \cdot 1000^2}{2x^2} = \frac{0,156}{x^2} \text{N}. \quad (4.137)$$

Die Zugspannung steigt also mit größer werdender Eintauchtiefe an. Für $x = 0,5 l = 7,5 \text{ cm}$ beträgt die Zugspannung beispielsweise

$$\sigma_{\text{mech}} = (0,156/7,5^2) \text{N}/\text{cm}^2 = 2,8 \text{ mN}/\text{cm}^2$$

und somit die Zugkraft

$$F = \pi (0,5 \cdot d_2)^2 \sigma_{\text{mech}} = \pi (0,5 \cdot 0,9)^2 \text{cm}^2 \cdot 2,8 \text{ mN}/\text{cm}^2 = 1,8 \text{ mN}.$$

Zugspannung und Zugkraft steigen aber nicht bis zur vollen Eintauchtiefe ($x = 0$) quadratisch mit dem Weg an. Gl. (4.136) ist eine Näherungslösung, die mit $x \rightarrow 0$ immer ungenauer wird, weil die magnetische Spannung außerhalb der Spule stärker in Erscheinung tritt (bei $x = 0$ ist das H -Feld im Inneren der Spule näherungsweise null und fast nur außerhalb der Spule vorhanden).

Um einen Eindruck von der Größe der Zugspannung auf Eisenflächen zu vermitteln, ist der durch Gl. (4.133) beschriebene Zusammenhang $\sigma_{\text{mech}} = f(B)$ in Bild 4.57 dargestellt.

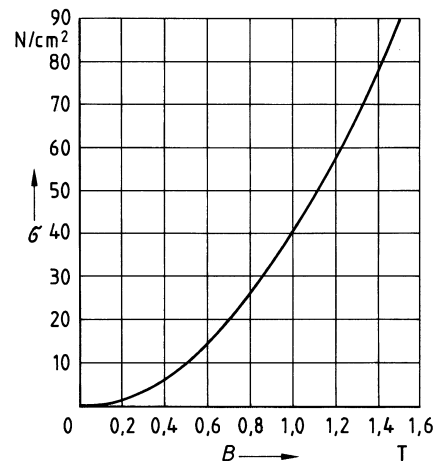


Bild 4.57: Mechanische Zugspannung σ auf Grenzflächen zwischen ungesättigtem Eisen und Luft in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte B in der Grenzfläche

Wegen der Eisensättigung sind aus wirtschaftlichen Gründen magnetische Flussdichten von mehr als 1,6 T bis 1,8 T kaum zu realisieren. Damit folgt aus Bild 4.57, dass sich an den Polflächen von Elektromagneten Zugspannungen von über 100 N/cm^2 kaum erreichen lassen.

Da die Kraft sich aus dem Produkt von Zugspannung und Fläche ergibt, lässt sich diese zwar theoretisch beliebig mit der Polfläche vergrößern. Allerdings steigt mit dieser Fläche auch das Gewicht des Magneten an, da mit der Polfläche auch alle anderen Querschnittsflächen des magnetischen Kreises vergrößert werden müssen, um zu vermeiden, dass in einzelnen Bereichen des Kreises übermäßige Sättigungen auftreten.

4.3.2.3 Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

In Abschnitt 4.1.2.1 wurde die Gleichung (4.2) zur Definition der magnetischen Flussdichte \vec{B} über die Kraftwirkung auf bewegte Ladungen eingeführt. Es handelt sich um die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.138)$$

Diese Kraft \vec{F} steht senkrecht auf der Fläche, die durch die Vektoren der Geschwindigkeit \vec{v} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} aufgespannt wird. Sie wirkt in Richtung der axialen Bewegung einer Rechtsschraube, mit der der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} auf kürzestem Weg in den Vektor \vec{B} gedreht wird (Bild 4.5). Der Betrag der Kraft ist $F = Q v B \sin \alpha$ mit dem Winkel α zwischen den Vektoren \vec{v} und \vec{B} .

Mit Gl. (4.138) kann direkt die Kraft auf bewegte Ladungen berechnet werden, deren Geschwindigkeit bekannt ist.

Zur Berechnung der Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld muss Gl. (4.138) weiterentwickelt werden. Dazu wird ein vom Strom I durchflossener, dünner Leiter gemäß Bild 4.58 betrachtet.

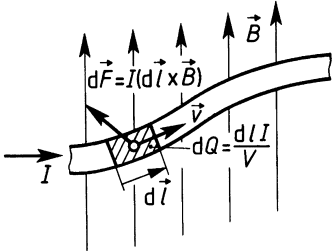


Bild 4.58: Richtungszuordnungen für die Kraft nach Gl. (4.139) auf ein stromdurchflossenes Leiterelement im Magnetfeld

In einem Abschnitt dieses Leiters der Länge $d\vec{l}$ befindet sich die Ladungsmenge dQ , die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, vgl. Bild 3.10 und Gl. (3.30). Aus $I = dQ/dt$ folgt durch Erweitern mit dl und dem Zusammenhang $v = dl/dt$ die Gleichung $dQ \vec{v} = I d\vec{l}$. Der Vektor $d\vec{l}$ weist in der Längsachse des Leiters in Richtung des Zählpfeils für den Strom I ($d\vec{l} \parallel \vec{v}$). Damit folgt aus Gl. (4.138) die Kraft, die auf ein vom Strom I durchflossenes Leiterelement $d\vec{l}$ wirkt:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (4.139)$$

Die resultierende Kraft, die an einem Leiter beliebiger Länge und Lage angreift, ergibt sich durch Integration der Teilkräfte $d\vec{F}$ über die gesamte Leiterlänge l :

$$\vec{F} = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.140)$$

Beispiel 4.29: Drehmoment eines Scheibenläufermotors

Bei einem Gleichstrommotor mit Scheibenläufer sind die stromführenden Ankerleiter sternförmig radial nach außen gerichtet auf einer unmagnetischen Trägerscheibe angeordnet, die zwischen den Polen von Dauermagneten drehbar gelagert ist.

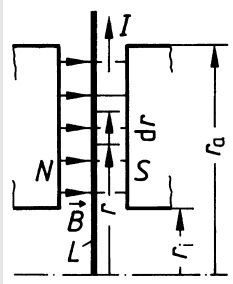


Bild 4.59: Schnitt durch ein Polpaar eines Scheibenläufermotors

In Bild 4.59 ist der radiale Querschnitt durch einen Polbereich (N, S) mit Scheibe und einem Leiter L skizziert.

Gegeben sind der Leiterstrom $I = 5 \text{ A}$, der Innenradius der Pole $r_i = 50 \text{ mm}$, ihr Außenradius $r_a = 100 \text{ mm}$ und die magnetische Flussdichte zwischen den Polen $B = 0,5 \text{ T}$. Die Aufweitung des Magnetfeldes an den Polrändern sei zu vernachlässigen.

Das von diesem Leiter über die Trägerscheibe auf die Welle übertragene Drehmoment ist zu bestimmen.

Der Betrag der auf ein Leiterelement der Länge $dl = dr$ wirkenden Umfangskraft dF ist nach Gl. (4.139)

$$dF = |I(d\vec{r} \times \vec{B})| = IB dr, \quad (4.141)$$

da der Leiter rechtwinklig zur Flussdichterichtung liegt (Bild 4.59).

Der Beitrag

$$dM = r dF$$

der Kraft dF eines Leiterelements dr zum *Drehmoment* M ist abhängig vom Radius r . Damit muss das vom ganzen Leiter ausgeübte Drehmoment als Integral über die im Magnetfeld befindliche Leiterlänge berechnet werden:

$$M = \int r dF = \int_{r_i}^{r_a} IB r dr = IB \frac{r_a^2 - r_i^2}{2} = 5 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ T} \frac{(0,1^2 - 0,05^2) \text{ m}^2}{2} = 0,0094 \text{ Nm} \quad (4.142)$$

Die Umrechnung der elektrischen Einheit VAs in die mechanische Einheit Nm erfolgt in SI-Einheiten über $1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \text{ Nm/s}$.

Für beliebig geformte Leiter in inhomogenen Feldern kann die Auswertung des Integrals in Gl. (4.140) aufwändig werden, da sowohl die magnetische Flussdichte \vec{B} als auch das Wegelement $d\vec{l}$ als Ortsfunktion einzusetzen sind.

Praktisch treten häufig einfache Leitergeometrien in näherungsweise homogenen Feldern auf, für die das Integral in ein Produkt überführt werden kann. Die Kraft auf einen geraden Leiter, dessen Länge durch den in Richtung des Zählpfeils für den Strom I weisenden Vektors \vec{l} beschrieben wird, im homogenen Feld der magnetischen Flussdichte \vec{B} nach Bild 4.60 ist

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}). \tag{4.143}$$

Der Betrag der Kraft ist $F = IlB \sin \alpha$, wobei nach Bild 4.60 α der vom Vektor \vec{l} zum \vec{B} weisende Winkel ist.

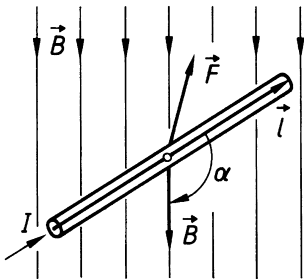


Bild 4.60: Richtungszuordnungen für die Kraft nach Gl. (4.143) auf einen stromdurchflossenen geraden Leiter im homogenen Magnetfeld

Abschließend wird anhand der Anordnung in Bild 4.61 die im Magnetfeld erfolgende elektromechanische bzw. mechanisch-elektrische Energieumformung beschrieben, die das Funktionsprinzip jedes Elektromotors bzw. Generator darstellt.

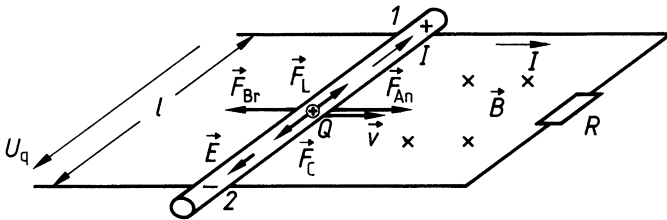


Bild 4.61: Im Magnetfeld bewegter stromdurchflossener Leiter

Die Bewegung des geraden Leiterstückes 1-2 der Länge l mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} durch das homogene Magnetfeld der magnetischen Flussdichte \vec{B} verursacht die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ auf die Ladungen Q im Leiterstück. Dadurch bewegen sich die (positiv angenommenen) freien Ladungsträger im Leiterstück vom negativen zum positiven Pol der Anordnung. Als Ergebnis der Ladungstrennung entsteht im Leiterstück eine elektrische Feldstärke \vec{E} , die die Coulomb-Kraft $\vec{F}_C = Q\vec{E}$ in Richtung vom positiven zum negativen Pol der Anordnung erzeugt. Die Anordnung wirkt als Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_q > 0$. Bei Anschließen eines Widerstandes R fließt ein Strom

$$I = \frac{U_q}{R} = \frac{Blv}{R} > 0. \tag{4.144}$$

Durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld werden also die positiven Ladungsträger zum höheren Potenzial bewegt, wodurch ihre potenzielle elektrische Energie ansteigt. Diese Energie wird im Widerstand R von den Ladungsträgern abgegeben und in Wärmeenergie umgewandelt.

Um zu klären, woher die über das Magnetfeld in den Stromkreis eingespeiste elektrische Energie kommt, werden nun die am Leiter angreifenden *äußeren* Kräfte betrachtet.

Die im Leiterstück umgesetzte elektrische Leistung kann aus den Klemmengrößen U_q und I berechnet werden, deren Zählpfeile am Leiterstück im Erzeuger-Zählpfeilsystem eingetragen sind:

$$P = IU_q \quad (4.145)$$

Auf das Leiterstück wirkt nach Gl. (4.143) die Bremskraft $\vec{F}_{Br} = I(\vec{l} \times \vec{B})$. Da der Vektor $d\vec{l}$ im Leiter in Richtung des Zählpfeils für den Strom I angenommen werden muss und $I > 0$ gilt, wirkt die Bremskraft \vec{F}_{Br} *entgegengerichtet* zur Geschwindigkeit \vec{v} . Der Betrag dieser Kraft ist $F_{Br} = IlB$.

Um den Leiter in Richtung der Geschwindigkeit \vec{v} zu bewegen, ist eine Antriebskraft \vec{F}_{An} in Richtung von \vec{v} notwendig, die die bremsende Reaktionskraft \vec{F}_{Br} überwindet. Die Reaktionskraft ist also ihrer Ursache, der Geschwindigkeit \vec{v} , entgegengerichtet. Die von der Antriebskraft aufzubringende mechanische Leistung $P_{An} = \vec{F}_{An} \cdot \vec{v}$ beträgt im Fall stationärer Bewegung ($\vec{F}_{An} = -\vec{F}_{Br}$), also konstanter Geschwindigkeit,

$$P_{An} = F_{An} v = IlB v = IU_q = I(IR). \quad (4.146)$$

Dem Leiter wird also mechanische Leistung $F_{An} v$ zugeführt, die über die Induktionswirkung in eine gleich große elektrische Leistung IU_q der den Induktionsvorgang beschreibenden Spannungsquelle umgewandelt wird. Diese Leistung wird schließlich durch den Strom im Wirkwiderstand in Wärmeleistung I^2R umgeformt.

Das Prinzip der Wechselwirkung zwischen den Strömen infolge induzierter Spannungen und den durch sie verursachten Kräften wird in der Elektrotechnik in vielfältiger Weise genutzt:

- *Generatoren* erzeugen elektrische Spannungen und Ströme. Dabei formen sie mechanische Antriebsleistung in elektrische Leistung um.
- *Elektromotoren* nehmen elektrische Leistung auf, die sie in mechanische umformen und an der Welle wieder abgeben.

Die Wirkungsweise von Generatoren und Motoren ist grundsätzlich gleich, sie unterscheiden sich durch die Richtung der Energieumformung. Man kann im Allgemeinen dieselben Maschinen sowohl als Generatoren wie auch als Motoren verwenden.

Das Magnetfeld spielt bei diesen Prozessen nur die Rolle eines Katalysators. Es wird durch die Prozesse nicht dauerhaft beeinflusst. Diese Aussage gilt auch für Motoren und Generatoren, in denen Dauermagnete eingesetzt werden. Die in diesen Maschinen umgesetzte Energie stammt nicht aus den Magneten; vielmehr ermöglicht das Feld der Magnete erst die Energieumformungsprozesse.

Bei den bisherigen Betrachtungen der Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter wurde außer Acht gelassen, dass diese auch ein Magnetfeld (*Eigenfeld*) erzeugen, wodurch das gegebene Feld (*Erregerfeld*) verändert wird [Fro94]. Diese Vernachlässigung ist bei vielen Aufgaben zulässig, d. h. in Gl. (4.139), (4.140) und (4.143) darf für die magnetische Flussdichte B derjenige Wert eingesetzt werden, der dem gegebenen Erregerfeld *ohne Berücksichtigung des vom stromdurchflossenen Leiter bewirkten Eigenfeldes* entspricht. Dabei sollte man allerdings nicht vergessen, dass das *resultierende (messbare)* Feld erheblich vom laut Aufgabenstellung gegebenen Erregerfeld abweichen kann, wie aus Bild 4.62 zu erkennen ist.

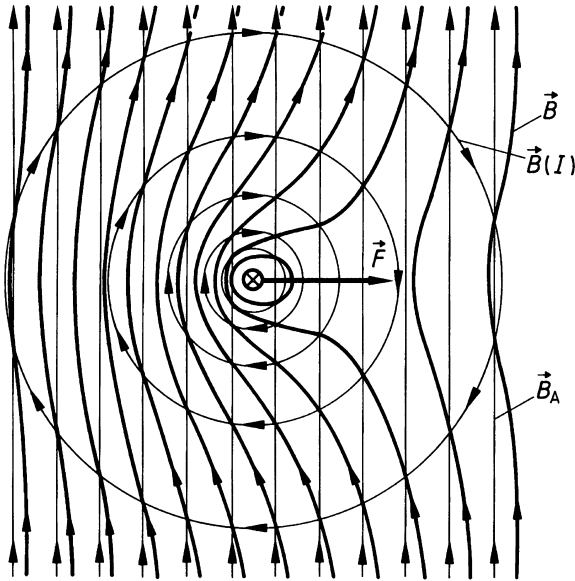


Bild 4.62: Feldlinienbild für die resultierende magnetische Flussdichte \vec{B} aus Eigenfeld $\vec{B}(I)$ eines stromdurchflossenen, unendlich langen, geraden Leiters im homogenen Erregerfeld \vec{B}_A

Darin ist \vec{B}_A die magnetische Flussdichte des von einer äußeren Anordnung bewirkten homogenen Feldes (z. B. zwischen den Polen eines Magneten). Das vom stromdurchflossenen Leiter bewirkte Eigenfeld wird durch kreisförmige, konzentrisch den Leiter umwirbelnde Feldlinien $\vec{B}(I)$ beschrieben. Durch Überlagerung (nur in linearen Räumen zulässig), d. h. vektorielle Addition der Feldvektoren an jedem Ort, ergibt sich das resultierende, stark inhomogene Feld \vec{B} .

Aus dem einseitig verdrängten *resultierenden Feld* \vec{B} lässt sich auch eine einprägsame Richtungsregel für die Kraftwirkung ableiten. Nach dem mechanischen Spannungszustand, der im magnetischen Feld existiert, sind die im Feld wirksamen mechanischen Spannungen immer so gerichtet, dass sie die Feldlinien zu verkürzen versuchen. Man könnte sich also vorstellen, dass durch das *Bestreben der Feldlinien, sich „gerade zu ziehen“*, der Leiter in Richtung der „Feldverdünnung“ zur Seite gedrängt werden soll.

Diese anschauliche Vorstellung kann dazu verleiten, das resultierende Feld \vec{B} auch der quantitativen Berechnung der Kraftwirkung zugrunde zu legen. Das ist grundsätzlich möglich, in speziellen Fällen sogar unumgänglich [Fro94]. Zweckmäßigerweise führt man quantitative Rechnungen aber mit oben angeführten Gleichungen aus, in die die magnetische Flussdichte \vec{B}_A des ursprünglichen magnetischen Feldes eingesetzt wird, welches bei stromlosem Leiter auftreten würde.

4.3.2.4 Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern

Zwei stromdurchflossene Leiter üben Kräfte aufeinander aus, die gemäß Abschnitt 4.3.2.3 bestimmt werden können. In einfachen Fällen genügt es [Fro94], das \vec{B} -Feld, das der Strom in dem einen Leiter am Ort des zweiten (zunächst als stromlos angenommenen) Leiters bewirkt, zu berechnen. Mit diesem \vec{B} -Feld und dem Strom im zweiten Leiter wird dann die Kraft auf diesen Leiter nach Gl. (4.140) bzw. (4.143) bestimmt. In gleicher Weise lässt sich über das vom zweiten Leiter am Ort des ersten bewirkte \vec{B} -Feld die auf diesen wirkende Kraft berechnen.

In Bild 4.63 sind zwei gerade, im Abstand a parallel verlaufende, lange, stromdurchflossene Leiter mit ihren jeweiligen Einzelfeldern sowie dem daraus durch Überlagerung gewonnenen resultierenden Feld dargestellt, und zwar für die Fälle, dass die Stromrichtungen in den beiden Leitern entgegengesetzt (Bild 4.63a) bzw. gleich (Bild 4.63b) sind.

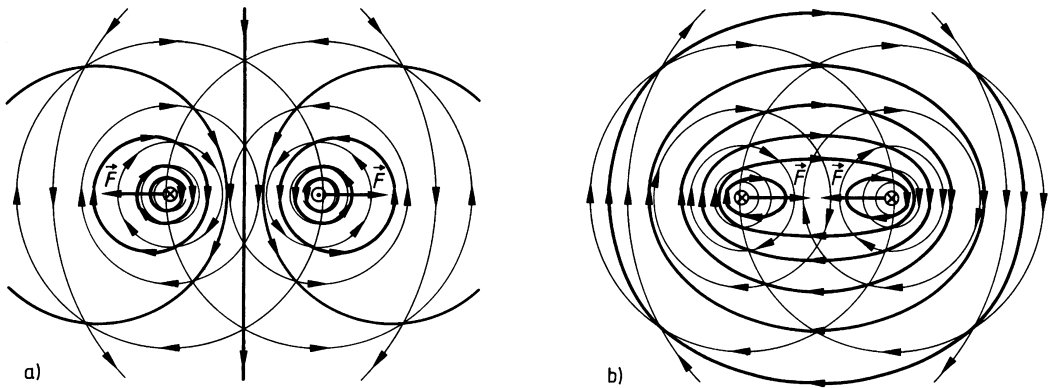


Bild 4.63: Magnetische Felder unendlich langer, gerader, paralleler, stromdurchflossener Leiter bei a) entgegengesetzter bzw. b) gleicher Stromrichtung

In vielen Fällen kann man die Leiter als *Linienleiter* modellieren, d. h. über den Leiterquerschnitt eine konstante magnetische Flussdichte \vec{B} annehmen. Da bei parallel verlaufenden, langen Leitern die magnetische Flussdichte \vec{B} auch über die Leiterlänge konstant ist, darf die auf jeden Leiter wirkende Kraft nach Gl. (4.143) berechnet werden:

Der Strom I_2 durch Leiter 2 erzeugt in dem im Abstand a verlaufenden Leiter 1 den Betrag der magnetischen Flussdichte $B(I_2) = \mu_0 H(I_2) = \mu_0 I_2 / (2\pi a)$. Das Feld $\vec{B}(I_2)$ steht in Leiter 1 überall senkrecht auf den in Richtung des Stromzählpfeils von I_1 weisen Vektor \vec{l} , der die Länge des betrachteten Leiterabschnitts beschreibt. Mit Gl. (4.143) ergibt sich der Betrag der Kraft auf Leiter 1, der vom Strom I_1 durchflossen wird, als

$$F = I_1 l B(I_2) = I_1 l \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}. \quad (4.147)$$

Aussagekräftiger ist der längenbezogene Betrag der Kraft

$$F' = \frac{F}{l} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi a}. \quad (4.148)$$

Eine Rechnung, in der die Kraftwirkung des durch Leiter 1 am Ort von Leiter 2 erzeugten Magnetfeldes auf den Strom in Leiter 2 bewirkt, führt zum gleichen Ergebnis (*actio = reactio*).

Die Bestimmung der Krafrichtung über das Vektorprodukt $\vec{l} \times \vec{B}$ führt zur *allgemeingültigen* Erkenntnis, dass sich *Leiter bei gleicher Stromrichtung anziehen, bei entgegengesetzter abstoßen*.

Bei der Betrachtung der Kraftwirkung einzelner, insbesondere nichtgerader Leiterstücke aufeinander können unterschiedlich große Kräfte berechnet werden, deren Wirkungsrichtungen auch nicht mehr in einer gemeinsamen Geraden liegen müssen. Erst, wenn sich die Integration der an den einzelnen Leiterelementen $d\vec{l}$ angreifenden Teilkräfte $d\vec{F}$ gemäß Gl. (4.140) über die *vollständigen, also geschlossenen Stromkreise* erstreckt, sind die resultierenden, auf jeden Stromkreis wirkenden Kräfte $\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$ gleich groß und wirken in einer Geraden.

Beispiel 4.30: Kräfte auf parallele Leiter bei Kurzschlussstrom

Wie groß sind die längenbezogenen Kräfte F an zwei parallelen Leitern im Abstand $a = 5 \text{ cm}$, wenn in den Leitern die Kurzschlussströme $I = 30 \text{ kA}$ fließen?

Aus Gl. (4.148) folgt unmittelbar die Kraft pro Länge

$$F' = \frac{F}{l} = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi a} = \frac{(30 \text{ kA})^2 \cdot 1,26 \mu\text{H/m}}{2\pi \cdot 5 \text{ cm}} = 3,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

4.4 Vergleich der elementaren elektrischen und magnetischen Felder

In Tabelle 4.4 sind die Grundgesetze der drei in den Kapiteln 3 und 4 getrennt voneinander behandelten elementaren Felder so zusammengestellt, dass ihre *formale* Analogie zum Ausdruck kommt. Die an gleichen Stellen der Gleichungen stehenden Größen werden als zueinander analog bezeichnet. Die in der Zeile „Widerstände“ angegebenen Gleichungen gelten nur für homogene Felder in isotropen, passiven Gebieten der Länge l und des konstanten Querschnitts A .

Tabelle 4.4: Formale Analogien von elektrischen und magnetischen Größen

Größen	elektrisches Strömungsfeld	elektrisches Feld in Nichtleitern	magnetisches Feld
<i>Feldvektoren</i>	\vec{E}, \vec{J}	\vec{E}, \vec{D}	\vec{H}, \vec{B}
Verknüpfung	$\vec{J} = \kappa \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
<i>Integrale Größen</i>			
Ströme und Flüsse	$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$	$\Psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$	$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Spannungen	$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$	$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$	$V = \int \vec{H} \cdot d\vec{l}$
Verknüpfung	$U = IR$	$U = \Psi \frac{1}{C}$	$V = \Phi R_m$
<i>Kenngrößen</i>			
Widerstände	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$\frac{1}{C} = \frac{l}{\varepsilon A}$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$
Leitwerte	$G = \frac{1}{R}$	C	$\Lambda = \frac{1}{R_m}$
Energiedichte	–	$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$	$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$
Energie	–	$W_e = \frac{1}{2} C U^2$	$W_m = \frac{1}{2} L I^2$

Beim elektrischen Strömungsfeld sind keine Energiegrößen angeführt, da in ihm nur eine *irreversible* Energieumformung von elektrischer in Wärmeenergie erfolgt. Im Gegensatz zum elektrostatischen und magnetischen Feld speichert also das Strömungsfeld praktisch keine Energie.

Daneben kann eine *Analogie nach Ursache und Wirkung* betrachtet werden, die für die vektoriellen Feldgrößen in Tabelle 4.5 zusammengestellt ist.

Im elektrischen Strömungsfeld ist eine eindeutige physikalische Unterscheidung zwischen Ursachen- und Wirkungsfeldgröße nicht möglich, da eine durch eine Potenzialdifferenz bewirkte Feldstärke eine vorherige Ladungstrennung durch ein Strömungsfeld erfordert, das wiederum in der Regel eine antreibende elektrische Feldstärke voraussetzt.

Tabelle 4.5: Analogien elektrischer und magnetischer Größen hinsichtlich Ursache und Wirkung

Feldvektoren der	elektrisches Strömungsfeld	dielektrisches Verschiebungsfeld	magnetisches Feld
Ursache	(\vec{E})	\vec{D}	\vec{H}
Wirkung	(\vec{J})	\vec{E}	\vec{B}
Verknüpfung	$\vec{J} = \kappa \vec{E}$	$\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$

4.5 Maxwellsche Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen beschreiben alle elektrischen und magnetischen Phänomene oberhalb der atomaren Ebene. Sie wurden nicht aus grundlegenden Gleichungen abgeleitet, sondern basieren auf den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen.

Ausgehend von diesen Gleichungen lassen sich über die in diesem Buch behandelten einfachen Feldanordnungen hinaus beliebige elektromagnetische Felder berechnen. Dazu gehören schnell veränderliche Felder sowie Felder in inhomogenen, anisotropen oder nichtlinearen Materialien. Dies ist allerdings nur in wenigen Fällen in geschlossener Form mittels der Vektoranalysis möglich.

Praxisrelevante Anordnungen sind in der Regel nur näherungsweise mittels numerischer Feldberechnungsprogramme analysierbar, deren Lösungsalgorithmen jedoch ebenfalls die Maxwellschen Gleichungen verwenden.

1. Maxwellsche Gleichung (Verallgemeinerter Durchflutungssatz)

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{A} \quad (4.149)$$

l ist der Rand von A . Die $d\vec{l}$ und die $d\vec{A}$ sind einander rechtswendig zugeordnet.

Neben einer durch die Stromdichte \vec{J} beschriebenen Ladungsströmung gemäß Gl. (4.20) erzeugt auch eine zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte \vec{D} ein Magnetfeld. Dies wird durch den Ausdruck $d\vec{D}/dt$ berücksichtigt. Hierdurch wird z. B. das Magnetfeld im Dielektrikum zwischen den Elektroden eines stromdurchflossenen Plattenkondensators berücksichtigt.

2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz)

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A} \quad (4.150)$$

l ist der Rand von A . Die $d\vec{l}$ und die $d\vec{A}$ sind einander rechtswendig zugeordnet.

Ein zeitvariantes Magnetfeld induziert ein elektrisches *Wirbelfeld*. Im *induzierten* elektrischen Feld umwirbeln die geschlossenen \vec{E} -Feldlinien den sie erzeugenden zeitvarianten magnetischen Fluss $\dot{\Phi}$. Im allgemeinen Fall ist das \vec{E} -Feld also kein Potenzialfeld, d. h. das Potenzial eines Feldpunktes ist nicht eindeutig (s. u.).

3. Maxwellsche Gleichung (Quellenfreiheit des magnetischen Flusses)

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4.151)$$

Das Feld der magnetischen Flussdichte \vec{B} ist *quellenfrei*², also ein *reines Wirbelfeld*. Das Feld der magnetischen Feldstärke \vec{H} ist ebenfalls ein Wirbelfeld, das jedoch dort Quellen bzw. Senken enthält, wo magnetische Flussröhren durch Material örtlich unterschiedlicher Permeabilität verlaufen.

4. Maxwellsche Gleichung (Gaußscher Satz der Elektrostatik)

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV \quad (4.152)$$

A ist die Hülle von V . Die $d\vec{A}$ weisen aus V heraus.

Die Feldlinien der elektrische Flussdichte \vec{D} beginnen auf positiven und enden auf negativen Ladungen, die als Quellen bzw. Senken des Feldes bezeichnet werden. Solche Felder werden als *Quellenfelder* bezeichnet. Das \vec{D} -Feld ist ein reines Quellenfeld.

Kontinuitätsgleichung

Die 4 Maxwellschen Gleichungen werden oft ergänzt durch die Kontinuitätsgleichung

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (4.153)$$

A ist die Hülle von V . Die $d\vec{A}$ weisen aus V heraus.

Die Kontinuitätsgleichung ist mit den Mitteln der Vektoranalysis aus der 1. und 4. Maxwell'schen Gleichung herleitbar. Sie ist die Verallgemeinerung des Kirchhoffschen Knotensatzes und berücksichtigt den Fall, dass sich die Ladung innerhalb des Volumens V zeitlich ändert.

²Falls elementare magnetische Monopole existieren sollten, wäre diese Maxwellsche Gleichung nicht mehr allgemeingültig.

Mehrdeutigkeit von Potenzial und Spannung in Wirbelfeldern

Spannung und Potenzial sind in Wirbelfeldern *mehrdeutig*.

Nach Bild 4.64 kann das Wegintegral der magnetischen Spannung V_{12} bzw. der elektrischen Spannung u_{12} von Punkt 1 zu Punkt 2 rechts oder links um den elektrischen Strom I bzw. den magnetischen Fluss Φ herum gebildet werden. Beide Spannungen sind im allgemeinen Fall *ungleich*: $V'_{12} \neq V''_{12}$ bzw. $u'_{12} \neq u''_{12}$.

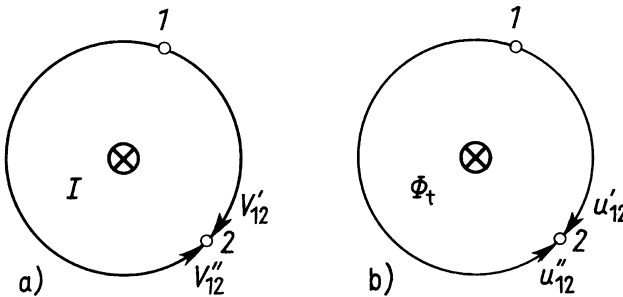


Bild 4.64: Mehrdeutigkeit der magnetischen und elektrischen Spannung im magnetischen (a) und elektrischen (b) Wirbelfeld

Bildet man in Bild 4.64b das Wegintegral der elektrischen Feldstärke von Punkt 1 ausgehend (dem man zunächst das Bezugspotenzial φ_0 zuordnet) über einen vollen Umlauf im Uhrzeigersinn um den Fluss Φ bis zurück zum Punkt 1, ergibt sich für Punkt 1 das Potenzial $\varphi = \varphi_0 + u = -d\Phi/dt$. Führt man mehrere Umläufe durch, ändert das Potenzial mit jedem Umlauf, nimmt also bei n Umläufen den Wert $\varphi = \varphi_0 + n \cdot u = -n d\Phi/dt$ an und ist somit unendlich vieldeutig.

Dieser Effekt wird z. B. in Transformatoren genutzt, in denen die in einer Wicklung induzierte Spannung proportional zu ihrer Windungszahl steigt.



5 Wechselstromtechnik

Zur Einführung in die grundlegenden Gesetze und Verfahren zur Berechnung elektrischer Netzwerke hat sich die Gleichstromtechnik bewährt, da sie nur geringe mathematische Kenntnisse voraussetzt. In der elektrotechnischen Praxis treten Gleichströme aber kaum auf. Die Verarbeitung von durch elektrische Signale dargestellten Informationen sowie die Erzeugung, Übertragung und Nutzung von Energie in elektrischer Form erfolgen fast ausschließlich mittels zeitlich veränderlicher Spannungen und Ströme. Während in der Informationstechnik *nichtperiodische* Signale verarbeitet werden, spielen in der Energietechnik *periodische* Spannungen und Ströme mit (näherungsweise) sinusförmigem zeitlichem Verlauf eine überragende Rolle.

In der *Sinusstromtechnik* werden Verfahren zur Berechnung von Netzwerken behandelt, in denen alle Ströme und Spannungen *sinusförmig zeitveränderlich* sind. (Solche Größen werden kurz als *Sinusgrößen* bezeichnet.) Diese Verfahren ähneln den aus der Gleichstromtechnik bekannten sehr stark, erfordern jedoch weitergehende mathematische Kenntnisse (Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung, Rechnen mit komplexen Größen).

Im einführenden Abschnitt 5.1 werden *allgemeine periodische Zeitfunktionen* behandelt. In den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels werden nur noch Sinusgrößen und Sinusstromnetzwerke betrachtet.

Als *Sinusstromnetzwerk* wird ein elektrisches Netzwerk mit folgenden Eigenschaften bezeichnet:

- Alle Quellen liefern als *Anregungsgrößen* Sinusgrößen *gleicher Frequenz*.
- Das Netzwerk besteht aus Elementen mit *konzentrierten Parametern*. Die Tatsache, dass Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten nur in räumlich ausgedehnten Anordnungen auftreten können, wird vernachlässigt. Die Elemente eines elektrischen Ersatzschaltbildes repräsentieren die Wirkung dieser Anordnungen durch jeweils einen einzigen Parameter. Somit werden auch die Ausbreitung von Wellen auf Leitungen und die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen nicht betrachtet.
- Die Elemente des Netzwerks sind *linear* und *zeitinvariant*, d. h. ihre elektrischen Kenngrößen sind unabhängig von ihren Klemmengrößen und der Zeit.
- Das Netzwerk befindet sich im *eingeschwungenen Zustand*, d. h. die Wirkung von Schaltvorgängen, z. B. dem Einschalten der Quellen, ist abgeklungen.

Wenn alle vorgenannten Bedingungen erfüllt sind, sind auch alle *Reaktionsgrößen* (z. B. die Spannungen an und die Ströme durch die passiven Zweipole) im Netzwerk *Sinusgrößen* mit der *gleichen Frequenz* wie die Anregungsgrößen.

Periodische Anregungsgrößen, die *nicht sinusförmig* sind, lassen sich mittels der *Fourier-Analyse* (Abschnitt 9.1) als Überlagerung mehrerer Sinusgrößen unterschiedlicher Frequenz darstellen. Da hier nur *lineare* Netzwerke betrachtet werden, lassen sich die Reaktionsgrößen auch für solche Signale unter Verwendung des *Überlagerungssatzes* (Abschnitt 2.4.4) mit den hier beschriebenen Verfahren berechnen. Hierzu werden nacheinander die Reaktionsgrößen für die Anteile der Anregungsgrößen bei den einzelnen Frequenzen (*spektralen Komponenten*) berechnet und dann

überlagert. Auf Grund dieser Tatsache ist die Sinusstromtechnik auch für die Nachrichtentechnik von großer Bedeutung.

Netzwerke mit *nichtperiodischen Anregungsgrößen* und das Verhalten *nichtlinearer Netzwerke* bei der Anregung durch Sinusgrößen werden in Kapitel 9 behandelt.

5.1 Periodische Zeitfunktionen

Elektrische Vorgänge lassen sich unterteilen in solche, die *zeitunabhängig* sind (Gleichströme, Gleichspannungen, Kapitel 2) und solche, die eine *Zeitabhängigkeit* aufweisen. Bei den zeitabhängigen Vorgängen wird unterschieden zwischen *nichtperiodischen* Abläufen (z. B. Schaltvorgängen (Abschnitt 9.3), Rauschen oder Impulsen) und solchen, die sich zeitlich periodisch wiederholen. Nachfolgend werden diese zeitlich periodischen Vorgänge – jeweils am Beispiel eines periodischen Stromes $i(t)$ – genauer untersucht.

Zur Beurteilung der *Wirkung*, die eine periodische Größe (z. B. ein Strom $i(t)$, eine Spannung $u(t)$, oder eine Leistung $p(t)$) hervorruft, genügt häufig ein geeigneter *Kennwert* dieser Größe. Einer dieser Kennwerte, der arithmetische Mittelwert, wird als Kriterium für eine weitere Aufteilung periodischer Größen in *Wechselgrößen* und *Mischgrößen* verwendet. Weitere Kenngrößen periodischer Funktionen, u. a. der *Klirrfaktor*, der *Schwingungsgehalt* und die *Welligkeit*, werden in Abschnitt 9.1.3 behandelt.

5.1.1 Periodendauer, Grundfrequenz, Grundkreisfrequenz

Die kürzeste Zeitdauer T , nach der sich ein Vorgang in identischer Weise wiederholt, nennt man seine (kleinste) *Periodendauer*. Ein solcher Vorgang, wie z. B. der in Bild 5.1 dargestellte Strom $i(t)$, wird durch eine periodische Zeitfunktion beschrieben. Die *Periodizität* einer Funktion erkennt man daran, dass z. B. für einen Strom

$$i(t + nT) = i(t) \quad (5.1)$$

gilt, wobei für n jede ganze Zahl eingesetzt werden darf und T der *kleinste positive* Wert ist, der Gl. (5.1) erfüllt.

Der Kehrwert der Periodendauer ist die *Grundfrequenz*

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Sie gibt an, wie häufig sich der Vorgang pro Zeit wiederholt. Ihre Einheit ist

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Hz} \quad (\text{Hertz}). \quad (5.3)$$

Das 2π -fache der Grundfrequenz ist die *Grundkreisfrequenz*

$$\omega = 2\pi f. \quad (5.4)$$

Ihre Einheit ist

$$[\omega] = \text{s}^{-1}. \quad (5.5)$$

5.1.2 Maximalwert, Minimalwert, Spitze-Spitze-Wert

Der größte während einer Periodendauer auftretende Augenblickswert wird *Maximalwert* oder *Spitzenwert* genannt und durch den Index „max“ gekennzeichnet, z. B.

$$i_{\max} . \quad (5.6)$$

Entsprechend wird der kleinste während einer Periodendauer auftretende Augenblickswert als *Minimalwert* bezeichnet und durch den Index „min“ gekennzeichnet, z. B.

$$i_{\min} . \quad (5.7)$$

Die *Schwingungsbreite* einer periodischen Größe ist die Differenz ihres Maximal- und Minimalwertes. Sie wird in der Praxis als *Spitze-Spitze-Wert* bezeichnet und durch den Index „ss“ gekennzeichnet, z. B.

$$i_{\text{ss}} = i_{\max} - i_{\min} . \quad (5.8)$$

5.1.3 Arithmetischer Mittelwert

Der *arithmetische (lineare) Mittelwert* eines periodischen Stroms $i(t)$ ist

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt . \quad (5.9)$$

Bild 5.1 veranschaulicht diese Definition.

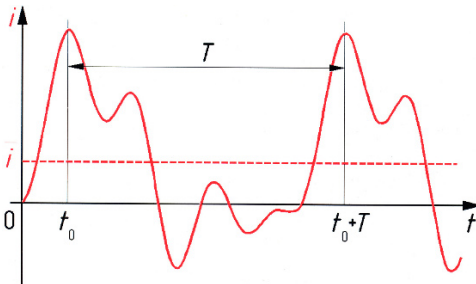


Bild 5.1: Periodischer Strom $i(t)$
 T Periodendauer
 \bar{i} arithmetischer Mittelwert

Die Integration ab einem beliebig wählbaren Zeitpunkt t_0 über eine Periodendauer T liefert ein Ergebnis, das sich anschaulich als die Fläche zwischen dem Graphen der Zeitfunktion und der t -Achse deuten lässt. Dabei werden Flächenanteile oberhalb der t -Achse positiv, Flächenanteile unterhalb der t -Achse negativ gezählt. (Wie das Beispiel zeigt, kann der Funktionswert i während einer Periodendauer T sein Vorzeichen mehrfach wechseln, so dass mehrere positive und negative Flächenanteile zum arithmetischen Mittelwert beitragen.) Wenn man diese Fläche gleichmäßig über die in Bild 5.1 als Strecke dargestellte Integrationsdauer T verteilt, erhält man ein Rechteck, dessen Höhe dem arithmetischen Mittelwert \bar{i} entspricht.

Der arithmetische Mittelwert kann als der in einer periodischen Größe enthaltene *Gleichanteil* aufgefasst werden.

5.1.4 Wechselgrößen, Mischgrößen

Als *Wechselgröße* bezeichnet man eine Größe, die

- periodisch ist und
- den arithmetischen Mittelwert null hat, also *keinen Gleichanteil* enthält.

Für einen *Wechselstrom* gilt also

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt = 0. \quad (5.10)$$

Diese Bedingung ist beim Strom nach Bild 5.1 nicht erfüllt, jedoch bei dem Strom in Bild 5.2, der durch Subtraktion des Gleichanteils aus dem Strom in Bild 5.1 hervorgegangen ist.

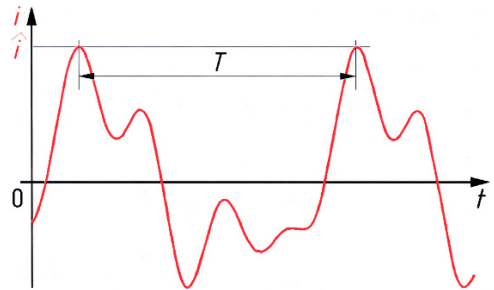


Bild 5.2: Wechselstrom $i(t)$
 T Periodendauer
 \hat{i} Scheitelwert

Eine periodische Größe, deren arithmetischer Mittelwert ungleich null ist, lässt sich immer als *Summe* (Überlagerung) einer *Gleichgröße* (arithmetischer Mittelwert) und einer *Wechselgröße* darstellen. Solche Größen werden als *Mischgrößen* bezeichnet.

5.1.5 Scheitelwert

Der *Scheitelwert* ist nur für Wechselgrößen definiert. Er ist gleich dem *betragsmäßig* größten auftretenden Augenblickswert und damit stets positiv. Bei dem in Bild 5.2 dargestellten Wechselstrom i stimmt der Scheitelwert \hat{i} mit dem Maximalwert i_{\max} überein. Allgemein gilt

$$\hat{i} = \max(|i_{\min}|, i_{\max}) > 0. \quad (5.11)$$

5.1.6 Gleichrichtwert

Da der arithmetische Mittelwert einer Wechselgröße null ist, liefert er keine Information über diese Größe. Bildet man hingegen den *arithmetischen Mittelwert* des *Betrages* der Wechselgröße, erhält man einen stets von null verschiedenen Wert, der es gestattet, Wechselgrößen hinsichtlich bestimmter Eigenschaften miteinander zu vergleichen (z. B. Drehmoment- oder Elektrolysewirkung bei Gleichrichtung).

Bei Strömen kann die Betragsbildung durch eine ideale *Zweiweggleichrichtung* erfolgen, die mit einem *Brückengleichrichter* nach Bild 5.3a durchgeführt werden kann. Wenn der zugeführte Strom i beispielsweise den in Bild 5.2 angegebenen Verlauf hat, fließt durch den Widerstand

R der in Bild 5.3b dargestellte Strom $|i|$. Den arithmetischen Mittelwert des Betrages einer periodischen Größe, z. B.

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |i(t)| dt, \quad (5.12)$$

bezeichnet man als den *Gleichrichtwert* dieser Größe.

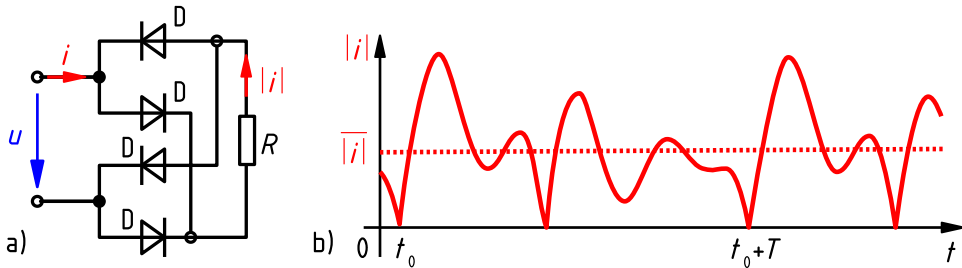


Bild 5.3: Brückengleichrichter (a) und Stromverlauf (b) nach idealer Gleichrichtung des Stroms $i(t)$ aus Bild 5.2 mit dem Gleichrichtwert $\overline{|i|}$

Es ist zu beachten, dass der die Mittelwertbildung symbolisierende Querstrich über die Betragstriche ragen muss und nicht zwischen ihnen enden darf, da ansonsten der Betrag des Mittelwertes bezeichnet würde, der bei Wechselgrößen immer null ist.

5.1.7 Effektivwert

Eine wichtige Wirkung elektrischer Ströme und Spannungen besteht darin, Verbrauchern elektrische Energie zuzuführen. Man definiert deshalb für periodische Größen einen weiteren Mittelwert, den *Effektivwert*. Ströme bzw. Spannungen mit dem selben Effektivwert führen dem gleichen *Ohmschen Verbraucher* in der selben Zeit T die gleiche Energie W zu. Dabei wird davon ausgegangen, dass die betrachtete Zeit T sehr viel größer als die Periodendauern T_p der zu vergleichenden Größen ist.

Fließt durch einen konstanten Widerstand R ein Gleichstrom I , so wird von ihm während der Zeit T gemäß Gl. (2.49) die elektrische Energie

$$W = U I T = R I^2 T \quad (5.13)$$

aufgenommen. Wenn der Strom i zeitabhängig ist, ergibt sich für eine infinitesimale kurze Zeit dt die infinitesimale kleine vom Widerstand aufgenommene Energie

$$dW = R i^2 dt. \quad (5.14)$$

Durch Integrieren erhält man die über die gesamte Zeit T vom Widerstand aufgenommene elektrische Energie

$$W = R \int_0^T i^2 dt. \quad (5.15)$$

Der Vergleich der Gln. (5.13) und (5.15) zeigt, dass ein periodischer Strom i in einem konstanten Widerstand R dann in derselben Zeit T dieselbe Energie W umsetzt wie ein Gleichstrom I , wenn

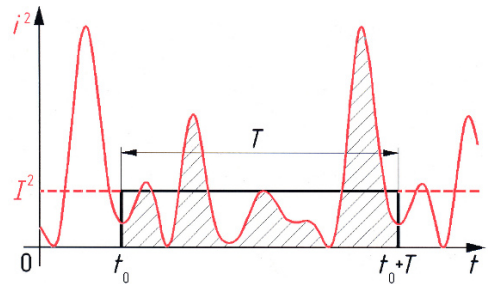
$$\int_0^T i^2 dt = I^2 T \quad (5.16)$$

gilt. Da i periodisch ist, kann man das Integrationsintervall in Gl. (5.16) zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 beginnen und auf eine Periodendauer T beschränken. Man erhält dann die allgemeine Schreibweise

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = I^2 T. \quad (5.17)$$

Die durch Gl. (5.17) beschriebene Rechenvorschrift ist in Bild 5.4 grafisch nachvollzogen: Zum Stromverlauf $i(t)$ aus Bild 5.2 ist der Verlauf $i^2(t)$ in Bild 5.4 dargestellt, der keine negativen Werte annehmen kann. Beginnend bei dem beliebig gewählten Zeitpunkt t_0 wird die Funktion $i^2(t)$ über eine Periodendauer T integriert. Das Ergebnis kann anschaulich als die (schraffierte) Fläche unter der Kurve gedeutet werden und muss denselben Wert haben wie das Produkt $I^2 T$, das als die Fläche des Rechtecks mit den Kantenlängen I^2 und T dargestellt werden kann.

Bild 5.4: Quadrat der Funktion $i(t)$ aus Bild 5.2
 Zeitlicher Verlauf $i^2(t)$
 T Periodendauer
 I^2 Quadrat des Effektivwertes



Man erhält I^2 , indem man das Integral durch die Periodendauer T dividiert. Nach Wurzelziehen ergibt sich hieraus in allgemeiner Form der auch als *quadratischer Mittelwert* bezeichnete *Effektivwert* eines Stroms

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}. \quad (5.18)$$

In Fällen, in denen eine Verwechslung mit einem Gleichstrom I ausgeschlossen werden soll, kann zur Verdeutlichung der Index „eff“ verwendet werden, also z. B. I_{eff} . Im englischsprachigen Raum heißt der Effektivwert „*root mean square*“ (RMS), was sinngemäß „Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrates“ bedeutet und sehr schön die Reihenfolge der Rechenoperationen in Gl. (5.18) beschreibt.

Bei der Berechnung des *Effektivwertes von Mischgrößen* darf man nicht einfach die Effektivwerte von Gleich- und Wechselanteil addieren. Wenn I_- der *Gleichanteil* und $i_{\sim}(t)$ der *Wechselanteil*

einer Mischgröße $i(t) = I_- + i_{\sim}(t)$ sind, ist der Effektivwert I dieser Mischgröße nach Gl. (5.18)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (I_- + i_{\sim})^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (I_-^2 + 2I_- i_{\sim} + i_{\sim}^2) dt}. \quad (5.19)$$

Wenn man auf der rechten Seite von Gl. (5.19) die Integration über jeden Summanden in der Klammer separat durchführt, erhält man

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_-^2 dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2I_- i_{\sim} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i_{\sim}^2 dt}. \quad (5.20)$$

Unter dem Wurzelzeichen steht die Summe dreier Terme, von denen der erste den Wert I_-^2 und der letzte – gemäß der Definition des Effektivwertes in Gl. (5.18) – das Quadrat I_{\sim}^2 des Effektivwertes des Wechselanteils ergibt. Der in der Mitte stehende Term stellt (abgesehen vom konstanten Faktor $2I_-$) den arithmetischen Mittelwert \bar{i}_{\sim} des Wechselanteils dar, der aber nach Gl. (5.10) null ist. Daraus folgt als Berechnungsvorschrift für den Effektivwert von Mischgrößen

$$I = \sqrt{I_-^2 + I_{\sim}^2}. \quad (5.21)$$

Messgeräte, bei denen der angezeigte Wert vom *Quadrat* des Stroms abhängt, wie z. B. *Dreh-eisenmessgeräte* oder *elektrodynamische Messgeräte* [Müh08], zeigen aufgrund ihres Messprinzips den quadratischen Mittelwert, d. h. den *Effektivwert* von periodischen Strömen *beliebiger Kurvenform* richtig an.

5.1.8 Scheitelfaktor, Formfaktor

Um ein Maß für die *Beanspruchung* elektrischer Anlagen und Bauelemente durch Strom- bzw. Spannungsspitzen zu haben, wurde der *Scheitelfaktor* ξ (engl. *Crest Factor* C_F) eingeführt. Für Wechselgrößen ist er definiert als das Verhältnis des Scheitelwertes zum Effektivwert. Für Wechselströme gilt z. B.

$$\xi = \frac{\hat{i}}{I} \geq 1. \quad (5.22)$$

Eine weitere wichtige Beurteilungsgröße ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert. Diese als *Formfaktor* bezeichnete Größe

$$F = \frac{I}{|i|} \geq 1 \quad (5.23)$$

bestimmt z. B. bei Gleichstrommaschinen das Verhältnis zwischen Verlustleistung und Drehmoment.

Scheitelfaktor und Formfaktor F werden umso kleiner, je mehr sich die Kurvenform einer symmetrischen Rechteckschwingung (mit betragsmäßig gleich großen Minimal- und Maximalwerten) annähert.

Drehspulmesswerke zeigen wegen der *mechanischen Trägheit* ihres Messwerks bei schnell veränderlichen Strömen i deren *arithmetischen Mittelwert* nach Gl. (5.9) an. Bei Wechselströmen wird daher der Wert null angezeigt. Schaltet man dem Drehspulmesswerk einen Zweiweggleichrichter wie in Bild 5.3a vor, zeigt es den Gleichrichtwert $|\bar{i}|$ nach Gl. (5.12) bzw. mit einem vorgeschalteten Einweggleichrichter den halben Gleichrichtwert $0,5|\bar{i}|$ an. Der einfacheren Handhabung wegen sind die Skalen von Wechselstrommessgeräten unter Berücksichtigung des Formfaktors F für Sinusstrom so kalibriert, dass direkt der in der Regel interessierende Effektivwert I abgelesen werden kann. Es ist unbedingt zu beachten, dass diese Skalierung *nur für Sinusströme exakt gültig* ist und bei Wechselströmen mit anderen Kurvenformen und daher anderen Formfaktoren die angezeigten Werte *mehr oder weniger fehlerhaft* sind!

5.2 Sinusgrößen

Als *Sinusgrößen* werden Größen bezeichnet, deren Zeitabhängigkeit durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden kann. Während in der Physik meist mit Kosinusfunktionen gearbeitet wird, werden in der Elektrotechnik traditionell Sinusfunktionen verwendet. Eine *Sinusspannung* ist also eine Spannung mit sinusförmiger Zeitabhängigkeit, ein *Sinusstrom* ein Strom mit sinusförmiger Zeitabhängigkeit.

Unter den periodischen Zeitfunktionen sind die Sinusgrößen die einzigen, bei denen man bei der Ableitung nach der Zeit wieder eine Sinusgröße erhält. Wie die Gln. (3.92) und (4.120) zeigen, sind die Klemmengrößen Strom i und Spannung u sowohl an einer Induktivität L als auch an einer Kapazität C über die Ableitung nach der Zeit miteinander verknüpft. Daher haben Sinusspannungen an diesen Zweipolen Sinusströme zur Folge und umgekehrt.

5.2.1 Erzeugung von Sinusspannungen

In den Verbundnetzen der elektrischen Energieverteilung werden Sinusspannungen größtenteils durch die rotierenden Generatoren der Kraftwerke erzeugt. Für die Not- oder mobile Stromversorgung werden Gleichspannungen mit Hilfe von *Wechselrichtern* in Sinusspannungen umgeformt [Heu96]. In der Nachrichtentechnik werden Sinusspannungen mit *Oszillatorschaltungen* unter Einsatz von aktiven Komponenten wie Transistoren oder Operationsverstärkern sowie Schwingkreisen bzw. Schwingquarzen erzeugt [GF83], [Süß05].

Die Erzeugung von Sinusspannungen in rotierenden Generatoren beruht grundsätzlich auf dem *Induktionsgesetz* (Abschnitt 4.3.1.3). In einer Spule mit N Windungen wird eine Spannung u induziert, die der Änderungsgeschwindigkeit $d\Phi/dt$ des magnetischen Flusses Φ proportional ist. Bei rechtswendiger Zuordnung (Abschnitt 4.3.1.3) der Zählpfeile für Φ und u ergibt sich nach Gl. (4.92) die induzierte Spannung

$$u(t) = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.24)$$

Durch Drehung einer Spule im Magnetfeld (Bild 4.45) oder eines *Polrades* in einem Generator (Bild 5.5a) oder durch einen Sinusstrom in der Erregerwicklung eines Transformators (Bild 4.44) kann ein magnetischer Fluss

$$\Phi = \hat{\Phi} \cos(\omega t) \quad (5.25)$$

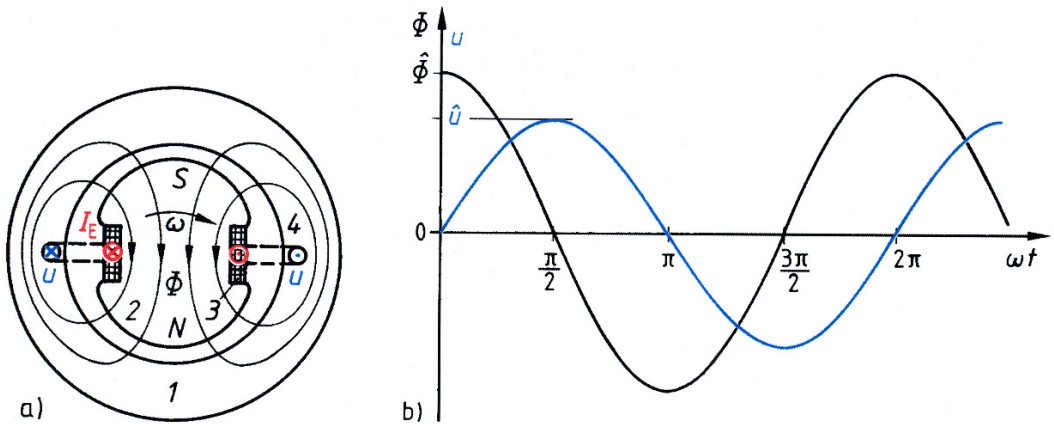


Bild 5.5: Querschnitt durch einen rotierenden Sinusspannungsgenerator (a) sowie zeitliche Verläufe (b) seines magnetischen Flusses $\Phi(t)$ und der in der Ständerwicklung induzierten Spannung $u(t)$

1 Ständer mit Wicklung 4, 2 Polrad mit Erregerwicklung 3

mit dem Scheitelwert $\hat{\Phi}$ und der *Kreisfrequenz* ω erzeugt werden. Bei einem zweipoligen Generator ist ω auch die Winkelgeschwindigkeit des Polrades. Der Fluss Φ induziert in der Spule, die er durchsetzt, die Spannung

$$u = -N \frac{d}{dt}(\hat{\Phi} \cos(\omega t)) = N \omega \hat{\Phi} \sin(\omega t) = \hat{u} \sin(\omega t) \quad (5.26)$$

mit dem Scheitelwert

$$\hat{u} = N \omega \hat{\Phi}. \quad (5.27)$$

Die Verläufe von $\Phi(t)$ und $u(t)$ sind in Bild 5.5b dargestellt. In Bild 5.5a ist der Querschnitt durch einen rotierenden *Sinusspannungsgenerator* dargestellt. Im rohrförmigen Ständer 1 befindet sich in horizontaler Ebene die *Ständerwicklung* 4. In diesem Zylinder dreht sich das Polrad 2 mit der *Erregerwicklung* 3, die von einem Gleichstrom I_E durchflossen wird und so den Fluss Φ erzeugt. Der Luftspalt zwischen Ständer und Polrad erweitert sich von der Polmitte zu den Polen hin, um eine annähernd sinusförmige Verteilung der magnetischen Flussdichte $B = d\Phi/dA$ im Luftspalt zu erreichen.

5.2.2 Kennwerte von Sinusgrößen

Sinusgrößen der Form $x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$ sind ein Spezialfall der in Abschnitt 5.1 behandelten periodischen Größen. Daher sind alle Kennwerte periodischer Größen auch für Sinusgrößen definiert. Wie in Abschnitt 5.2.2.5 bewiesen wird, enthalten Sinusgrößen keinen Gleichanteil. Sie gehören also zu den Wechselgrößen.

Die in den folgenden Abschnitten exemplarisch für einen Sinusstrom beschriebenen Kenngrößen sind sinngemäß auf beliebige andere Sinusgrößen übertragbar.

5.2.2.1 Amplitude

Bei Sinusgrößen sind der Maximal- und der Minimalwert betragsmäßig gleich groß. Den Scheitelwert bezeichnet man speziell bei Sinusgrößen auch als *Amplitude*. Für den in Bild 5.7 dargestellten Sinusstrom mit der Amplitude \hat{i} gilt z. B.

$$i_{\max} = |i_{\min}| = \hat{i} > 0. \quad (5.28)$$

5.2.2.2 Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz

Eine Sinusgröße enthält im Gegensatz zu einer allgemeinen Wechselgröße nur eine *Frequenz* f , die gleich dem Kehrwert ihrer *Periodendauer* T ist:

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.29)$$

Während der Periodendauer T einer Sinusgröße ändert sich das Argument der Sinusfunktion, die sie beschreibt, um den Winkel $2\pi \hat{=} 360^\circ$ (Bild 5.7). Aus der Bedingung $\omega T = 2\pi$ folgt mit Gl. (5.29) der Zusammenhang zwischen der *Kreisfrequenz* ω und der Frequenz f :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.30)$$

Die Kreisfrequenz ω unterscheidet sich lediglich um den Faktor 2π von der Frequenz f . Für die Einheit der Kreisfrequenz ω gilt

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}. \quad (5.31)$$

Sie darf nicht in Hertz angegeben werden!

Wichtige Frequenzbereiche der Elektrotechnik sind in Bild 5.6 zusammengestellt. Bei den Energieversorgungsnetzen sind 50 Hz oder 60 Hz üblich. Nach Bild 5.6 herrschen in der Energietechnik die niedrigen Frequenzen vor, wobei allerdings für bestimmte Fertigungsverfahren Frequenzen bis zu 1 GHz zur Anwendung kommen. Die Nachrichtentechnik überstreicht den gesamten Frequenzbereich. Neuere Entwicklungen führen zur technischen Nutzung von immer höheren Frequenzen (Höchstfrequenz). Bild 5.6 verdeutlicht gleichzeitig die verschiedenen Anwendungsgebiete der Sinusstromtechnik.

5.2.2.3 Nullphasenwinkel, Nullzeit

Die Verläufe beliebiger Zeitfunktionen können über der t -Achse aufgetragen werden. Nur dann, wenn mehrere *gleichfrequente Sinusgrößen* dargestellt werden sollen, ist es möglich, die Zeit auf die diesen Sinusgrößen *gemeinsame* Periodendauer zu *normieren*. Als Variable wird dann nicht mehr die Zeit t , sondern die dimensionslose Größe $2\pi \cdot t/T$, die den Charakter eines Winkels im Bogenmaß hat, verwendet. Der Wert dieser neuen Variable verändert sich um 2π (also die Periode der Sinusfunktion), wenn sich die Zeit t um die Periodendauer T verändert. Aus Gl. (5.30) folgt $2\pi \cdot t/T = \omega t$. Die Darstellung gleichfrequenter Sinusgrößen über der ωt -Achse führt dazu, dass die zeitliche Verschiebung zwischen Sinusgrößen durch Winkel dargestellt wird.

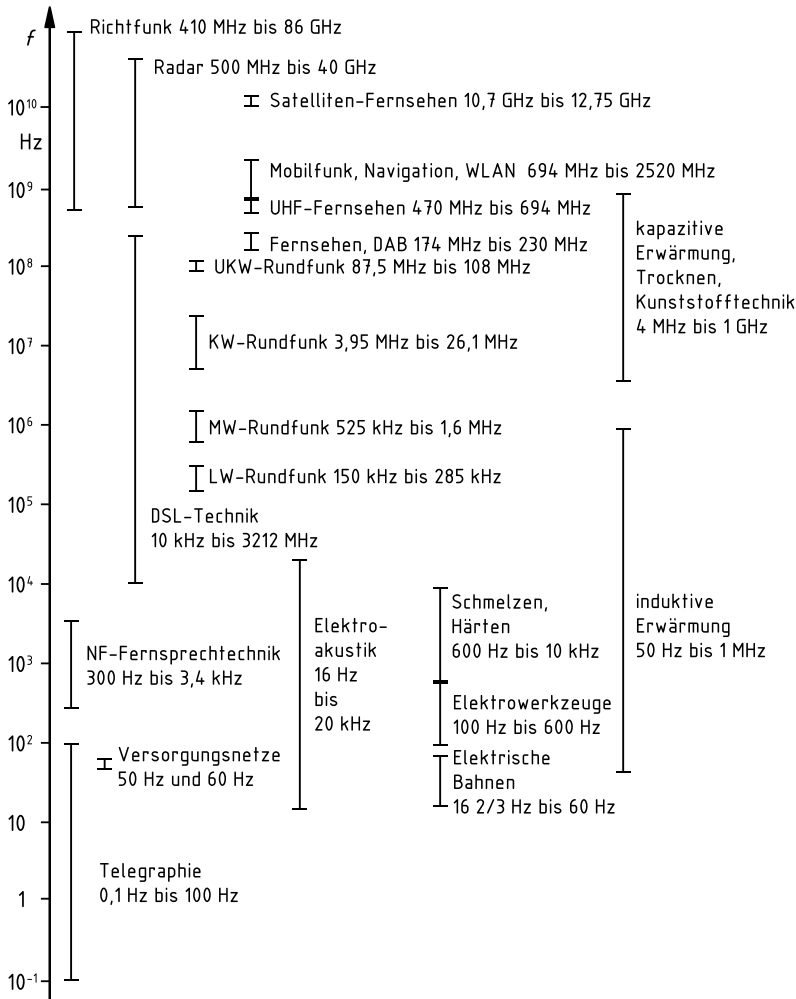


Bild 5.6: Wichtige Frequenzbereiche der Elektrotechnik

In Bild 5.7 sind die Verläufe eines Sinusstroms $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ und einer gleichfrequenten Sinusspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ über der ωt -Achse aufgetragen. Ihre Lage relativ zum Ursprung wird durch die Lage ihrer *am nächsten am Ursprung gelegenen positiven Nulldurchgänge* beschrieben und durch ihre *Nullphasenwinkel* φ_i bzw. φ_u bestimmt.

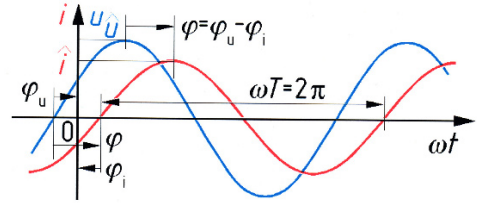
Eine allgemeine Sinusgröße $x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$ mit $-180^\circ < \varphi_x \leq 180^\circ$ beginnt zur Zeit $t = 0$ mit dem Wert $x(0) = \hat{x} \sin \varphi_x$. Sie geht um den Nullphasenwinkel φ_x früher als die normale Sinusfunktion $\sin(\omega t)$ von negativen zu positiven Werten durch null.

Nullphasenwinkel können sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß angegeben werden.

Die Bestimmung des Vorzeichens des Nullphasenwinkels aus einer Darstellung von Sinusgrößen über der ωt -Achse bereitet oft Schwierigkeiten. In Bild 5.7 ist z. B. der Nullphasenwinkel der

Spannung $\varphi_u = 30^\circ$, obwohl der positive Nulldurchgang bei $\omega t = -30^\circ$ liegt. Beim Strom gilt $\varphi_i = -30^\circ$, obwohl sein positiver Nulldurchgang bei $\omega t = +30^\circ$ liegt.

Bild 5.7: Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ und Sinusspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$
 φ_u, φ_i Nullphasenwinkel
 φ Phasenverschiebungswinkel
 T Periodendauer



Daher ist folgende Vorgehensweise dringend zu empfehlen: Der Nullphasenwinkel wird durch einen *Einfachpfeil* (mit nur einer Pfeilspitze) gekennzeichnet. Der Pfeil weist vom positiven Nulldurchgang der betrachteten Sinusgröße, der *am nächsten am Ursprung* liegt, zum Ursprung (Bild 5.7). Der Nullphasenwinkel ist *positiv*, wenn seine Pfeilspitze in Richtung der ωt -Achse (also *steigender* Werte von ωt) weist, bzw. negativ bei entgegengesetzter Richtung.

Dem Nullphasenwinkel bei Betrachtung der Größe ωt als Variable entspricht die *Nullzeit* t_0 bei Betrachtung der Zeit t als Variable. Z. B. folgt für einen Sinusstrom aus der Verhältnisgleichung $\varphi_i/360^\circ = t_{0i}/T$ die Umrechnungsvorschrift vom Nullphasenwinkel in die Nullzeit

$$t_{0i} = T \frac{\varphi_i}{360^\circ}. \quad (5.32)$$

Nullzeiten sind genauso wie Nullphasenwinkel vorzeichenbehaftet und werden in einem Zeitdiagramm mit Einfachpfeilen gekennzeichnet. Weist ein solcher Pfeil in Richtung der t -Achse, ist die Nullzeit positiv, sonst negativ.

Die nach φ_i aufgelöste Gl. (5.32) kann z. B. zur Berechnung des Nullphasenwinkels aus einer am Oszilloskop abgelesenen Nullzeit verwendet werden.

5.2.2.4 Phasenverschiebungswinkel

Bei der Beschreibung der Ströme und Spannungen in einem Sinusstromnetzwerk darf der Zeitpunkt $t = 0$ willkürlich gewählt werden. Daher sind die Werte der Nullphasenwinkel in der Regel uninteressant. Wichtig ist aber die zeitliche Lage *mehrerer gleichfrequenter* Sinusgrößen *relativ zueinander*, wobei stets eine der Größen die Rolle der *Bezugsgröße* spielt. Dieser Unterschied der *Phasenlagen* wird durch den *Phasenverschiebungswinkel* φ beschrieben. Soll z. B. die Phasenverschiebung eines Stromes $i_1(t)$ mit dem Nullphasenwinkel φ_{i1} gegenüber einem als Bezugsgröße betrachteten Strom $i_2(t)$ mit dem Nullphasenwinkel φ_{i2} angegeben werden, so gilt

$$\varphi = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}. \quad (5.33)$$

Ist der Nullphasenwinkel der Bezugsgröße null, so stimmt der Phasenverschiebungswinkel mit dem Nullphasenwinkel überein.

Von besonderer Bedeutung ist der Phasenverschiebungswinkel zwischen den Klemmengrößen von Zweipolen. Er ist definiert als

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i, \quad (5.34)$$

d. h. *der Klemmenstrom ist immer die Bezugsgröße.*

Phasenverschiebungswinkel werden wie Nullphasenwinkel durch einen Einfachpfeil gekennzeichnet. Dieser weist entsprechend Bild 5.7 von einem positiven Nulldurchgang der betrachteten Größe zum *nächstgelegenen* positiven Nulldurchgang der Bezugsgröße. Stimmt die Richtung dieses Pfeils mit der Richtung der ωt -Achse überein, ist der Phasenverschiebungswinkel φ positiv und man sagt, dass die betrachtete Größe gegenüber der Bezugsgröße *voreilt*. Anderenfalls ist φ negativ und die betrachtete Größe *eilt* gegenüber der Bezugsgröße *nach*.

Bild 5.7 zeigt die anschauliche Bedeutung dieser Bezeichnungen: hier eilt die Spannung gegenüber dem Strom vor; sie erreicht also zu früheren Zeitpunkten ihre positiven Nulldurchgänge und Scheitelwerte.

Beispiel 5.1: Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung u und Strom i in Bild 5.7 soll vorzeichenrichtig beschrieben werden.

Nach Gl. (5.34) gilt

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ. \quad (5.35)$$

Die Spannung u eilt dem Strom i um $\varphi = 60^\circ$ voraus. Gleichbedeutend hiermit ist selbstverständlich die Aussage, dass der Strom der Spannung um 60° nacheilt.

5.2.2.5 Arithmetischer Mittelwert

Da die Sinusgrößen zu den Wechselgrößen gehören, ist ihr *arithmetischer Mittelwert* null. Rechnerisch lässt sich dies mit Gl. (5.9) nachweisen: Setzt man $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ ein und wählt als untere Integrationsgrenze $t_0 = 0$, erhält man zunächst

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{i} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{T} \left[-\frac{\hat{i}}{\omega} \cos(\omega t) \right] \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{\hat{i}}{\omega T} (-\cos(\omega T) + \cos 0). \quad (5.36)$$

Da gemäß Gl. (5.30) $\omega T = 2\pi$ gilt, folgt hieraus

$$\bar{i} = \frac{\hat{i}}{2\pi} (-\cos(2\pi) + \cos 0) = \frac{\hat{i}}{2\pi} (-1 + 1) = 0. \quad (5.37)$$

Damit ist auch formal bewiesen, dass Gl. (5.10) für Sinusgrößen erfüllt ist.

5.2.2.6 Gleichrichtwert

Bei der Ermittlung des *Gleichrichtwertes* $\overline{|i|}$ eines Sinusstroms $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ nutzt man die Tatsache, dass die positive und die negative Halbschwingung Verläufe zeigen, die – vom Vorzeichen abgesehen – identisch sind, siehe Bild 5.8b. Es genügt daher, die Mittelwertbildung nach Gl. (5.12) bei der Funktion $|i(t)|$ über die halbe Periodendauer der Sinusfunktion von $t_0 = 0$ bis $t = T/2$ durchzuführen. Für den Gleichrichtwert eines Sinusstroms $i(t)$ ergibt sich somit

$$\overline{|i|} = \frac{1}{\frac{1}{2}T} \int_0^{T/2} \hat{i} |\sin(\omega t)| dt = \frac{1}{\frac{1}{2}T} \int_0^{T/2} \hat{i} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[-\frac{\hat{i}}{\omega} \cos(\omega t) \right] \Big|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}T} \quad (5.38)$$

und mit $\omega T = 2\pi$ gemäß Gl. (5.30)

$$|\bar{i}| = \frac{2\hat{i}}{\omega T} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) = \frac{2\hat{i}}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi} \hat{i} \approx 0,6366 \hat{i} \quad (5.39)$$

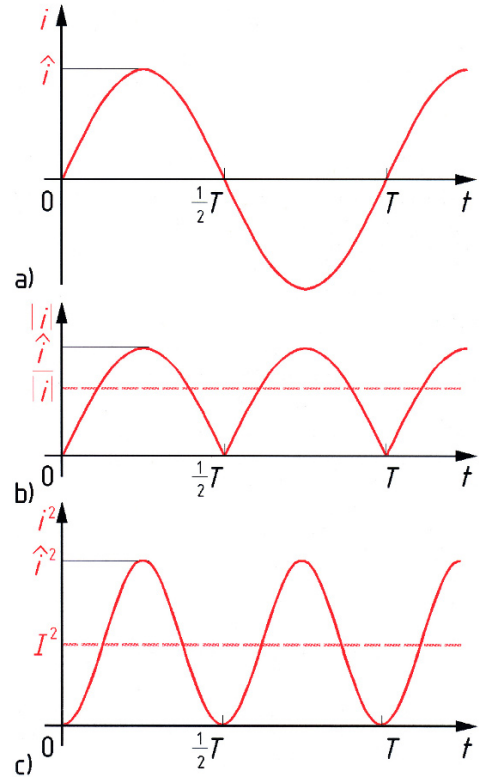


Bild 5.8: a) Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t)$
 b) Gleichgerichteter Sinusstrom
 $|i| = \hat{i} |\sin(\omega t)|$
 mit Gleichrichtwert $|\bar{i}|$
 c) Quadrierter Sinusstrom
 $i^2 = \hat{i}^2 \sin^2(\omega t)$
 mit Quadrat des Effektivwertes I^2

5.2.2.7 Effektivwert

Zur Bestimmung des *Effektivwertes* I eines Sinusstroms $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ ist nach Gl. (5.18) zunächst die Zeitfunktion $i(t)$ zu quadrieren. Man erhält dann den in Bild 5.8c dargestellten Verlauf

$$i^2(t) = \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) = \frac{\hat{i}^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)), \quad (5.40)$$

dessen arithmetischer Mittelwert

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{i}^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \frac{\hat{i}^2}{2} \quad (5.41)$$

beträgt, da die Funktion $\cos(2\omega t)$ eine Sinusgröße beschreibt, deren Mittelwert null ist. Aus der Quadratwurzel erhält man schließlich den Effektivwert eines Sinusstroms

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} \approx 0,7071 \hat{i}. \quad (5.42)$$

5.2.2.8 Scheitelfaktor, Formfaktor

Aus Gl. (5.42) ergibt sich der *Scheitelfaktor* eines Sinusstroms nach Gl. (5.22) zu

$$\xi = C_F = \frac{\hat{i}}{I} = \sqrt{2} \approx 1,414, \quad (5.43)$$

sein *Formfaktor* nach Gl. (5.23) aus Gl. (5.39) und Gl. (5.42) zu

$$F = \frac{I}{\overline{|i|}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111. \quad (5.44)$$

5.2.3 Beschreibung von Sinusgrößen durch Zeiger

Zur Darstellung von gleichfrequenten Sinusgrößen können deren Zeitfunktionen wie in Bild 5.9b als Sinusschwingungen in einem *Zeitdiagramm* über der normierten Zeit ωt aufgetragen werden. Wenn mehrere Sinusgrößen betrachtet werden, können solche Diagramme aber sehr unübersichtlich werden. Es soll deshalb gezeigt werden, wie man Sinusgrößen einfacher mittels *Zeigern* symbolisch darstellen kann.

Bild 5.9a zeigt ein *Zeigerdiagramm*, in dem vom Ursprung ausgehende Einfachpfeile eingetragen sind, die in verschiedene Richtungen weisen. Ein solcher Pfeil wird *Zeiger* genannt und mit dem *unterstrichenen* Formelzeichen der Sinusgröße, die er repräsentiert (also z. B. bei der Spannung mit \underline{u}), bezeichnet.

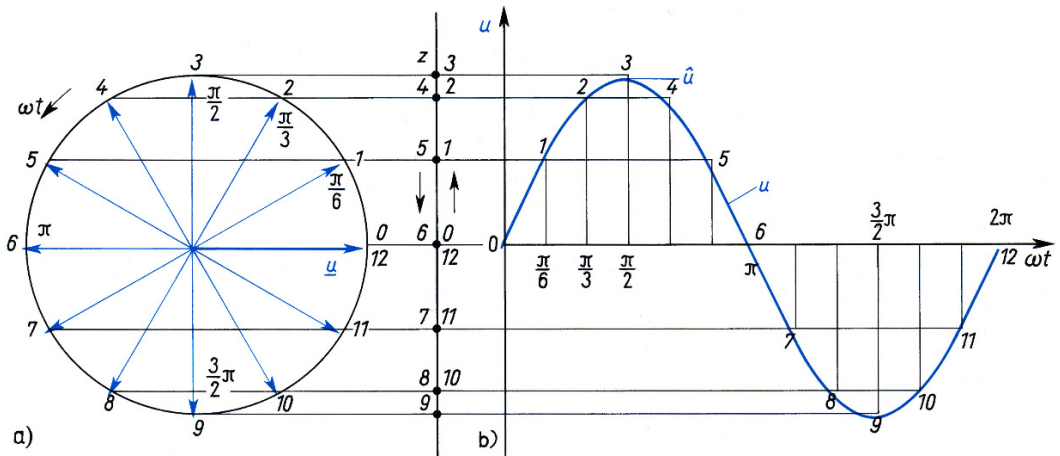


Bild 5.9: Zusammenhang zwischen Drehzeigerdiagramm (a) und Zeitdiagramm (b)
z Projektionsachse

Dreht sich in Bild 5.9a der Spannungszeiger \underline{u} im *mathematisch positiven Sinn* (d. h. entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn) mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so stellen die *Projektionen* der Zeigerspitze auf die ruhende *Projektionsachse* z die *Augenblickswerte* $u = \hat{u} \sin(\omega t)$ der Zeitfunktion $u(t)$ dar. Dies ist für 12 Zeigerstellungen und die zugehörigen Augenblickswerte in Bild 5.9 dargestellt. Eine Sinusschwingung im Zeitdiagramm lässt sich somit als Projektion eines gleichmäßig *rotierenden* Zeigers auf eine stillstehende Projektionsachse darstellen.

Da der Betrag (repräsentiert durch die Länge) dieses Zeigers mit dem *Scheitelwert* \hat{u} der Sinusgröße übereinstimmen muss, wird er als *rotierender Scheitelwertzeiger*¹ bezeichnet. Die *Winkelgeschwindigkeit* ω des Zeigers ist gleich der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ der betrachteten Sinusgröße.

Ebenso wie eine Sinusgröße wird auch ihr Zeiger durch *drei Kennwerte* eindeutig festgelegt:

1. Die (einheitenbehaftete) *Amplitude* der Sinusgröße. Sie wird durch die *Länge* des Zeigers ausgedrückt. Hierfür benötigt man einen Maßstab (z. B. $1\text{ cm} \hat{=} 20\text{ V}$ bzw. $1\text{ cm} \hat{=} 5\text{ A}$), den man zweckmäßigerweise gesondert in das Zeigerdiagramm einträgt (Bild 5.13e).
2. Die *Frequenz* f (bzw. die Kreisfrequenz ω) der Sinusgröße. Sie bestimmt die Winkelgeschwindigkeit ω des rotierenden Zeigers.
3. Die *Phasenlage* der Sinusgröße, beschrieben durch ihren Nullphasenwinkel oder ihren Phasenverschiebungswinkel gegenüber einer Bezugsgröße.

Sowohl Nullphasenwinkel als auch Phasenverschiebungswinkel werden in Zeigerdiagrammen mittels gerichteter Kreisbögen entsprechend den Einfachpfeilen in Zeitdiagrammen gekennzeichnet.

Zu beachten ist, dass der Pfeil für den Phasenverschiebungswinkel im *Zeitdiagramm* vom positiven Nulldurchgang der betrachteten Sinusgröße zum Nulldurchgang der Bezugsgröße einzutragen ist. *Im Gegensatz hierzu ist der Phasenverschiebungswinkel im Zeigerdiagramm von der Bezugsgröße zur betrachteten Größe einzutragen.* Ein Beispiel hierfür ist Bild 5.10, in dem der Strom die Bezugsgröße ist.

Bild 5.10 zeigt das aus Bild 5.7 übernommene Zeitdiagramm und das zugehörige Zeigerdiagramm für zwei Zeitpunkte, die mit 0 bzw. 1 bezeichnet sind. Der vom Zeiger des Stroms zum Zeiger der Spannung eingetragene Phasenverschiebungswinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen den beiden Zeigern ändert sich zeitlich nicht.

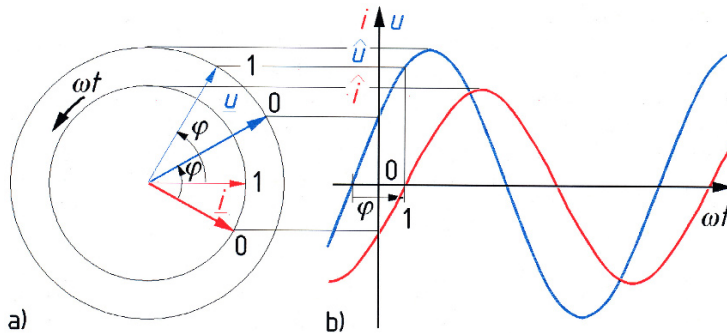


Bild 5.10: Drehzeigerdiagramm mit Zeigern für einen Strom und eine Spannung zu zwei Zeitpunkten 0 und 1 (a) und zugehöriges Zeitdiagramm (b)

Rotierende Zeiger (*Drehzeiger*) sind zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen Zeitdiagramm und Zeigerdiagramm hilfreich und zur Bestimmung von Augenblickswerten sogar erforderlich.

¹Obwohl bei Sinusgrößen statt des Begriffs „Scheitelwert“ in der Regel der Begriff „Amplitude“ verwendet wird, hat sich im Zusammenhang mit Zeigern statt des Begriffs „Amplitudenzeiger“ der Begriff „Scheitelwertzeiger“ durchgesetzt.

Für alle anderen Aufgaben ist es ausreichend, die Rotation der Zeiger außer Acht zu lassen, da sich bei der Rotation die Lage der Zeiger *zueinander* nicht verändert. Dies kann formal dadurch geschehen, dass das Zeigerdiagramm nur für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. für $t = 0$ betrachtet wird. Hierdurch kommt man zur Darstellung von Sinusgrößen durch *ruhende Zeiger*. Zur Unterscheidung von den rotierenden Scheitelwertzeigern werden *ruhende Scheitelwertzeiger* mit \hat{u} , \hat{i} usw. gekennzeichnet.

In der Elektrotechnik gibt man für Sinusgrößen in der Regel nicht die Amplitude (den Scheitelwert), sondern den Effektivwert an. Daher empfiehlt es sich, die Länge von Zeigern als Maß für den Effektivwert zu betrachten. Im Unterschied zu den Scheitelwertzeigern werden diese *Effektivwertzeiger* durch einen unterstrichenen *Großbuchstaben* (z. B. \underline{U} oder \underline{I}) gekennzeichnet. Die Lage von Effektivwertzeigern in einem Zeigerdiagramm stimmt mit der der entsprechenden Scheitelwertzeiger überein. Bei gleichem Maßstab sind die Scheitelwertzeiger lediglich um den Scheitelfaktor $\xi = \sqrt{2} \approx 1,414$ länger als die Effektivwertzeiger. Dieser Sachverhalt ist in Bild 5.11b dargestellt und auch aus dem Vergleich der Bilder 5.12a und 5.12b zu ersehen.

5.2.4 Zählpfeile für Sinusgrößen

Die Analyse eines Netzwerkes erfordert eine eindeutige Zuordnung zwischen den in den Gleichungen bzw. den Zeigerdiagrammen enthaltenen Formelzeichen und den Schaltungselementen, Strömen und Spannungen im Netzwerk.

In Gleichstromnetzwerken werden Zählpfeile für alle Ströme und Spannungen benötigt, um mit noch unbekanntem Größen die Kirchhoffschen Gleichungen aufstellen und nach der Netzwerkberechnung anhand des Vorzeichens dieser Größen ihre physikalischen Wirkungsrichtungen bestimmen zu können. Kehrt man den Zählpfeil einer Größe um, so ist auch ihr Vorzeichen umzukehren.

Das Vorzeichen von Sinusgrößen ändert sich periodisch. Dennoch sind auch für Sinusgrößen Zählpfeile erforderlich, um deren *Phasenlage* eindeutig beschreiben zu können. Dies soll anhand des Beispiels in Bild 5.11 erläutert werden.

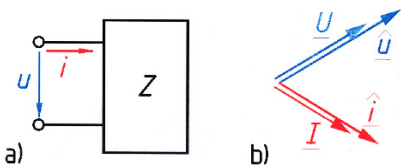


Bild 5.11: Zweipol Z mit Zählpfeilen u und i im Verbraucher-Zählpfeilsystem (a) und zugehörige Zeigerdiagramme mit Scheitelwert- bzw. Effektivwertzeigern (b)

An dem Zweipol Z sind die Zählpfeile für die Klemmengrößen im Verbraucher-Zählpfeilsystem eingetragen. Aus dem Zeigerdiagramm ist zu entnehmen, dass die Klemmenspannung dem Klemmenstrom vorausschlägt. Nun soll *bei unverändertem Schaltungsverhalten* der Zählpfeil des Stromes umgekehrt werden. Dann muss (wie bei Gleichströmen) die Zeitfunktion des Stroms mit -1 multipliziert werden. Die Multiplikation einer Sinusgröße mit -1 bedeutet eine *Phasendrehung* um 180° . Die Stromzeiger in Bild 5.11b müssten also um 180° gedreht werden, um wieder den gleichen Sachverhalt zu beschreiben. Daraus folgt, dass eine Sinusgröße ohne zugehörigen Zählpfeil zwei verschiedene Phasenlagen haben kann, die sich um 180° unterscheiden.

Die Zählpfeile werden mit den Symbolen für die Zeitfunktionen der Sinusgrößen bezeichnet, z. B. in Bild 5.11a mit u und i , wenn die Zeitabhängigkeit dieser Größen untersucht werden

soll. Falls Berechnungen unter Verwendung von Effektivwertzeigern oder der komplexen Rechnung (Abschnitt 5.3) vorgenommen werden, werden wie in Bild 5.13 die Zählpfeile mit den Zeigersymbolen \underline{U} und \underline{I} bezeichnet.

5.2.5 Addition und Subtraktion gleichfrequenter Sinusgrößen

Die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze und des Überlagerungssatzes erfordern bei Sinusstromnetzwerken eine Addition oder Subtraktion von gleichfrequenten Sinusströmen oder Sinusspannungen. Aus der Mathematik ist bekannt, dass sich dabei wieder Sinusgrößen derselben Frequenz ergeben. Nun soll gezeigt werden, dass die Kenngrößen einer solchen resultierenden Sinusgröße sowohl im Zeitbereich als auch mittels Zeigern ermittelt werden können.

Die beiden Sinusspannungen $u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1})$ und $u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2})$ werden zur Gesamtspannung

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1}) + \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2}) \quad (5.45)$$

addiert. Die Parameter $\omega, \hat{u}_1, \varphi_{u1}, \hat{u}_2, \varphi_{u2}$ sind bekannt. Gesucht sind \hat{u} und φ_u .

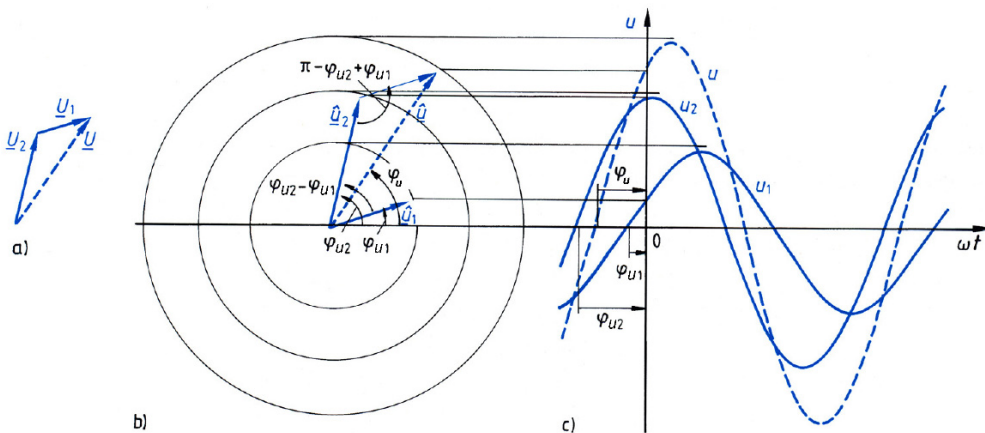


Bild 5.12: Addition von zwei gleichfrequenten Sinusspannungen $u_1 + u_2 = u$ mittels ruhender Effektivwertzeiger (a), ruhender Scheitelwertzeiger (b) und im Zeitdiagramm (c) $\varphi_{u1}, \varphi_{u2}, \varphi_u$ Nullphasenwinkel der drei Spannungen

Durch Anwendung der Additionstheoreme erhält man

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \sin \varphi_u \cos(\omega t) + \hat{u} \cos \varphi_u \sin(\omega t) \\ &= \hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} \cos(\omega t) + \hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} \sin(\omega t) + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2} \cos(\omega t) + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2} \sin(\omega t) \\ &= (\hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2}) \cos(\omega t) + (\hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2}) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der ersten mit der dritten Zeile dieser Gleichung folgt

$$\hat{u} \sin \varphi_u = \hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2}, \quad (5.46)$$

$$\hat{u} \cos \varphi_u = \hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2}. \quad (5.47)$$

Division von Gl. (5.46) durch Gl. (5.47) ergibt $\tan \varphi_u = \sin \varphi_u / \cos \varphi_u$, woraus der gesuchte Nullphasenwinkel

$$\varphi_u = \arctan \frac{\hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2}}{\hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2}} \quad (5.48)$$

folgt. Wenn man Gl. (5.46) und Gl. (5.47) quadriert und addiert, erhält man

$$\hat{u}^2 \sin^2 \varphi_u + \hat{u}^2 \cos^2 \varphi_u = (\hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2})^2 + (\hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2})^2. \quad (5.49)$$

Hieraus folgt wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\hat{u}^2 = \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2(\sin \varphi_{u1} \sin \varphi_{u2} + \cos \varphi_{u1} \cos \varphi_{u2}) \quad (5.50)$$

und mit $\sin \varphi_{u1} \sin \varphi_{u2} + \cos \varphi_{u1} \cos \varphi_{u2} = \cos(\varphi_{u2} - \varphi_{u1})$ die gesuchte Amplitude

$$\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\varphi_{u2} - \varphi_{u1})}. \quad (5.51)$$

Zu den Gln. (5.48) und (5.51) gelangt man auch, wenn man die Scheitelwertzeiger \hat{u}_1 und \hat{u}_2 in Bild 5.12b unter Beachtung von Phasenlage und Betrag *geometrisch* addiert, indem man z. B. den Zeiger \hat{u}_1 parallel verschiebt und an die Spitze des Zeigers \hat{u}_2 anfügt.

Bei Anwendung des Kosinussatzes erhält man für die Amplitude der Summenspannung

$$\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\pi - \varphi_{u2} + \varphi_{u1})}. \quad (5.52)$$

was auf Gl. (5.51) führt.

Die senkrechte und die waagerechte Komponente des Zeigers \hat{u} ergeben sich aus den Summen der entsprechenden Komponenten der Scheitelwertzeiger \hat{u}_1 und \hat{u}_2 zu

$$\hat{u} \sin \varphi_u = \hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2} \quad \text{und} \quad \hat{u} \cos \varphi_u = \hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2}. \quad (5.53)$$

Man erhält auf diese Weise dieselben Zusammenhänge wie in Gl. (5.46) und Gl. (5.47).

Damit ist nachgewiesen, dass man die Summe mehrerer gleichfrequenter Sinusgrößen ermitteln kann, indem man ihre Zeiger geometrisch addiert.

Gleiches trifft sinngemäß auch für die Subtraktion zu, da sich die Subtraktion einer Sinusgröße $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ immer auf die Addition der Sinusgröße $-u = -\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u + \pi)$ zurückführen lässt. Da die Sinusgrößen u und $-u$ zueinander um den Winkel $\pi \doteq 180^\circ$ phasenverschoben sind, haben die zugehörigen Zeiger genau entgegengesetzte Richtung. Die Multiplikation eines Zeigers mit dem Faktor -1 bewirkt also, wie in Bild 5.13d gezeigt, die Richtungsumkehr des Zeigers unter Beibehaltung seiner Länge.

Da Scheitelwert- und Effektivwert-Zeigerdiagramme sich lediglich durch den Maßstabsfaktor $\xi = \sqrt{2}$ unterscheiden, gelten die genannten Zusammenhänge entsprechend auch für die Effektivwertzeiger (Bilder 5.12a und 5.12b).

Beispiel 5.2: Überlagerung von Sinusspannungen im Zeitbereich

Zwei Generatoren liefern gleichfrequente Sinusspannungen mit den Effektivwerten $U_1 = 50\text{ V}$ und $U_2 = 30\text{ V}$. Die Spannung \underline{U}_2 eilt gegenüber \underline{U}_1 um $\varphi_{12} = 60^\circ$ voraus.

Wie groß sind die Effektivwerte der Gesamtspannungen und ihre Phasenverschiebungswinkel gegenüber der Bezugsspannung \underline{U}_1 , wenn die Generatoren G nach Bild 5.13a in Summenreihenschaltung oder nach Bild 5.13b in Gegenreihenschaltung liegen?

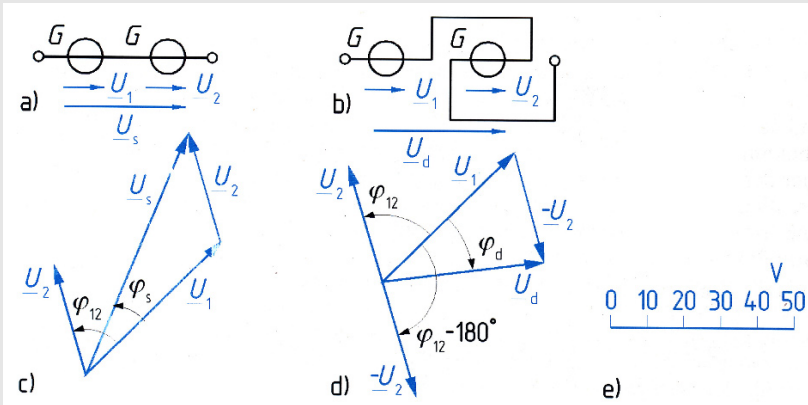


Bild 5.13: Addition (a) und Subtraktion (b) der beiden Sinusspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 mit Zeigerdiagrammen (c), (d) und Spannungsmaßstab (e) zu Beispiel 5.2

Die zeichnerische Lösung mittels Zeigerdiagramm ist sehr einfach, liefert aber wegen der begrenzten Zeichen- und Ablesegenauigkeit keine exakten Werte: Zur Ermittlung der *Summenspannung* \underline{U}_s trägt man zunächst die Spannungszeiger \underline{U}_1 und \underline{U}_2 unter dem Winkel φ_{12} gegeneinander auf. Der dabei benutzte Spannungsmaßstab ist in Bild 5.13e dargestellt. In Bild 5.13c wird für die Summenreihenschaltung der Zeiger \underline{U}_2 in seiner vorgegebenen Richtung an den Zeiger \underline{U}_1 angetragen. Hieraus ergibt sich der Effektivwert U_s der Summenspannung und der zugehörige Phasenverschiebungswinkel φ_s . Zur Ermittlung der *Differenzspannung* $\underline{U}_d = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ wird der Spannungszeiger \underline{U}_2 mit -1 multipliziert, also in seiner Richtung umgekehrt und in Bild 5.13d als $-\underline{U}_2$ an die Spitze des Zeigers \underline{U}_1 angetragen. Der Winkel zwischen den zu addierenden Spannungen \underline{U}_1 und $-\underline{U}_2$ beträgt nun $\varphi_{12} - 180^\circ = -120^\circ$.

Der rechnerische Lösungsweg ist wesentlich aufwändiger: Entsprechend Gl. (5.51) ist der Effektivwert der *Summenspannung*

$$U_s = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos \varphi_{12}} = \sqrt{50^2 \text{ V}^2 + 30^2 \text{ V}^2 + 2 \cdot 50 \text{ V} \cdot 30 \text{ V} \cos 60^\circ} = 70 \text{ V}. \quad (5.54)$$

Nach Gl. (5.48) erhält man ihren Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_s = \arctan \frac{U_1 \sin 0^\circ + U_2 \sin \varphi_{12}}{U_1 \cos 0^\circ + U_2 \cos \varphi_{12}} = \arctan \frac{50 \text{ V} \sin 0^\circ + 30 \text{ V} \sin 60^\circ}{50 \text{ V} \cos 0^\circ + 30 \text{ V} \cos 60^\circ} = 21,8^\circ. \quad (5.55)$$

Entsprechend Gl. (5.51) ist der Effektivwert der *Differenzspannung*

$$\begin{aligned} U_d &= \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\varphi_{12} - 180^\circ)} \\ &= \sqrt{50^2 \text{ V}^2 + 30^2 \text{ V}^2 + 2 \cdot 50 \text{ V} \cdot 30 \text{ V} \cos(-120^\circ)} = 43,6 \text{ V} \end{aligned} \quad (5.56)$$

und ihr Phasenverschiebungswinkel

$$\begin{aligned} \varphi_d &= \arctan \frac{U_1 \sin 0^\circ + U_2 \sin(\varphi_{12} - 180^\circ)}{U_1 \cos 0^\circ + U_2 \cos(\varphi_{12} - 180^\circ)} \\ &= \arctan \frac{0 + 30 \text{ V} \sin(-120^\circ)}{50 \text{ V} + 30 \text{ V} \cos(-120^\circ)} = -36,6^\circ. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Summenspannung \underline{U}_s eilt also gegenüber der Spannung \underline{U}_1 vor, die Differenzspannung \underline{U}_d wegen des negativen Phasenverschiebungswinkels nach.

5.2.6 Differenziation und Integration von Sinusgrößen

Für die Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen an Induktivitäten und Kapazitäten sind nach Gl. (3.92) und Gl. (4.120) die Differenzialquotienten nach der Zeit oder – bei umgekehrter Auflösung der Gleichungen, wie z. B. Gl. (3.93) – die Integrale über der Zeit von wesentlicher Bedeutung. Wie die folgenden Beispiele zeigen, erhält man sowohl bei der Differenziation als auch bei der Integration einer Sinusgröße jeweils wieder eine Sinusgröße gleicher Frequenz, die allerdings gegenüber der Ursprungsgröße phasenverschoben ist.

Im Zeitdiagramm in Bild 5.14b ist der Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ dargestellt, an dem die Differenziation und die Integration exemplarisch durchgeführt werden. Bild 5.14a zeigt das zugehörige Effektivwertzeigerdiagramm.

Die *Differenziation* des Sinusstroms nach der Zeit ergibt

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left[\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \right] = \omega \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega \hat{i} \sin \left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.58)$$

also eine Sinusgröße $f(t)$, die der ursprünglichen Funktion $i(t)$ um $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$ *vorauseilt* und deren Scheitelwert das ω -fache von \hat{i} ist.

Im Zeigerdiagramm wird die Ableitung nach der Zeit durchgeführt, indem der Zeiger \underline{I} um den Winkel $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$ *in mathematisch positiver Richtung* gedreht und sein Betrag I mit dem Faktor ω multipliziert wird. Im betrachteten Beispiel entsteht der Zeiger \underline{F} in Bild 5.14a.

Die *Integration* des Sinusstroms über die Zeit ergibt

$$g(t) = \int \left[\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \right] dt = \frac{1}{\omega} \hat{i} [-\cos(\omega t + \varphi_i)] + K = \frac{1}{\omega} \hat{i} \sin \left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2} \right) + K, \quad (5.59)$$

also eine Sinusgröße $g(t)$, die der ursprünglichen Funktion $i(t)$ um $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$ *nacheilt* und deren Scheitelwert das $1/\omega$ -fache von \hat{i} ist. Da hier nur Sinusstromnetzwerke betrachtet werden, kann die Funktion $g(t)$ keinen Gleichanteil enthalten. Daher muss die Integrationskonstante $K = 0$ sein.

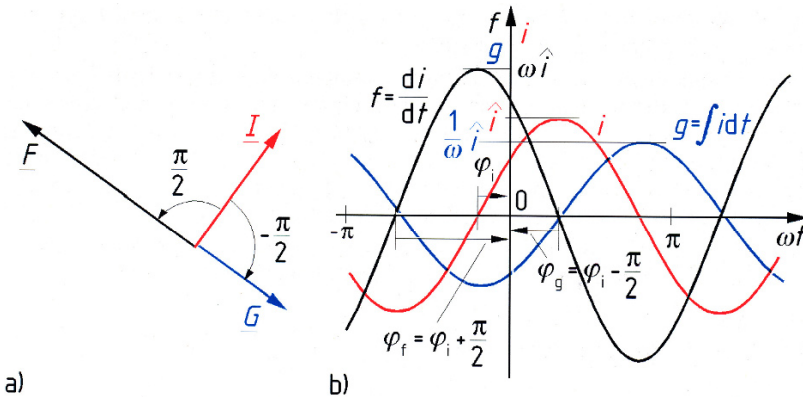


Bild 5.14: Differenziation und Integration eines Sinusstroms $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ im Zeigerdiagramm (a) und im Zeitdiagramm (b)

Im Zeigerdiagramm wird die zeitliche Integration durchgeführt, indem der Zeiger \underline{I} um den Winkel $\pi/2 \cong 90^\circ$ in *mathematisch negativer Richtung* gedreht und sein Betrag I mit dem Faktor $1/\omega$ multipliziert wird. Im betrachteten Beispiel entsteht der Zeiger \underline{G} in Bild 5.14a.

Damit ist gezeigt, dass die im Zeitbereich sehr aufwändigen Operationen Differenziation und Integration bei der Verwendung von Zeigern auf geometrisch einfach durchzuführende Drehstreckungen reduziert werden.

Zu beachten ist, dass bei der Differenziation und der Integration Sinusgrößen entstehen, deren Dimensionen sich wegen der Multiplikation mit dem dimensionsbehafteten Faktor ω bzw. $1/\omega$ von der Dimension der ursprünglichen Sinusgröße unterscheiden.

5.3 Komplexe Größen der Sinusstromtechnik

Die in Abschnitt 5.2.3 eingeführte Darstellung von Sinusgrößen durch Zeiger erleichtert die Analyse von Sinusstromnetzwerken erheblich, da komplizierte trigonometrische Umformungen sowie Ableitungen und Integrale der Zeitfunktionen in einfache geometrische Operationen überführt werden: Die Addition von Sinusgrößen wird durch die geometrische Addition von Zeigern ersetzt, die Differenziation bzw. Integration von Sinusgrößen durch eine Drehstreckung von Zeigern.

Wenn man einen Zeiger vom Ursprung ausgehend in der *komplexen Zahlenebene* einträgt, kann man den Ort der Zeigerspitze und somit den Zeiger selbst *durch eine komplexe Größe vollständig beschreiben*. Durch diesen Übergang von den bisher rein *geometrisch* interpretierten Zeigern zu ihrer Beschreibung durch komplexe Größen können die bislang *geometrisch* ausgeführten Operationen mit Zeigern in *algebraische* Operationen mit komplexen Größen überführt werden. Hierdurch können die Genauigkeit der Ergebnisse erheblich verbessert und der Arbeitsaufwand drastisch verringert werden. Aus diesem Grund werden *geometrische* Zeigerdiagramme fast nur noch zur *Veranschaulichung* des *qualitativen* Verhaltens von Sinusstromschaltungen eingesetzt. Die *quantitative* Analyse erfolgt fast immer mittels der komplexen Rechnung.

Das sichere Rechnen mit komplexen Größen ist eine unabdingbare Voraussetzung für das Verständnis und die Anwendung der in der Sinusstromtechnik verwendeten Verfahren. Daher muss hier vorausgesetzt werden, dass zumindest die Grundlagen des Rechnens mit komplexen Zahlen (siehe z. B. [BDHG06], [FF12]) bekannt sind. Zu beachten ist, dass komplexe Größen in der Mathematik einheitenlos (also reine Zahlen) sind, während sie in der Elektrotechnik physikalische Größen, z. B. Sinusströme und –spannungen, repräsentieren und daher einheitenbehaftet sind.

In den Abschnitten 5.3.1 bis 5.3.3 werden die für die Anwendung in der Sinusstromtechnik wesentlichen Begriffe und Regeln der komplexen Rechnung kurz zusammengefasst. Abschnitt 5.3.4 behandelt die Darstellung von Sinusgrößen durch komplexe Zeiger. Im abschließenden Abschnitt 5.3.5 wird gezeigt, dass Zeiger nicht nur Sinusgrößen repräsentieren, sondern auch das Klemmenverhalten passiver Zweipole beschreiben können.

5.3.1 Darstellung komplexer Größen

Bild 5.15a zeigt die *Gaußsche Zahlenebene*, die auch *komplexe Ebene* genannt wird. Sie wird aufgespannt durch die nach rechts weisende *reelle* und die nach oben weisende *imaginäre Achse*. Durch die beiden Achsen wird die Ebene im mathematisch positiven Umlaufsinn in die *Quadranten* I bis IV eingeteilt.

Komplexe Größen werden durch einen *Unterstrich* gekennzeichnet und *geometrisch* entweder als *Punkt* oder als *komplexer Zeiger* vom Ursprung zu diesem Punkt in der komplexen Ebene dargestellt. Zur *analytischen* Beschreibung komplexer Größen gibt es drei Möglichkeiten:

1. Komponenten- oder kartesische Form

Eine komplexe Größe \underline{r} wird gemäß Bild 5.15a als Summe

$$\underline{r} = a + j b \quad (5.60)$$

ihres *reellen Anteils* a und ihres rein *imaginären Anteils* $j b$ dargestellt, wobei letzterer das Produkt aus der *imaginären Einheit* $j = \sqrt{-1}$ und dem *Imaginärteil* b ist. Die imaginäre Einheit wird in der Elektrotechnik wegen der Verwechslungsgefahr mit dem Strom i nicht wie in der Mathematik mit i bezeichnet, sondern mit j . Der *Realteil*

$$a = \operatorname{Re} \underline{r} \quad (5.61)$$

und der *Imaginärteil*

$$b = \operatorname{Im} \underline{r} \quad (5.62)$$

einer komplexen Größe \underline{r} in Gl. (5.60) sind reelle Größen. Die kartesische Form entspricht der Beschreibung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Angabe seiner kartesischen Koordinaten.

Unbedingt zu beachten ist der bereits erwähnte Unterschied zwischen dem *imaginären Anteil* und dem *Imaginärteil* einer komplexen Größe. Während der imaginäre Anteil die imaginäre Einheit j beinhaltet, ist der Imaginärteil (wie der Realteil) eine reelle Größe.

Bei der Darstellung der komplexen Ebene kann an der imaginären Achse entweder der imaginäre Anteil oder der Imaginärteil aufgetragen werden. In diesem Buch wird die erstgenannte Möglichkeit verwendet.

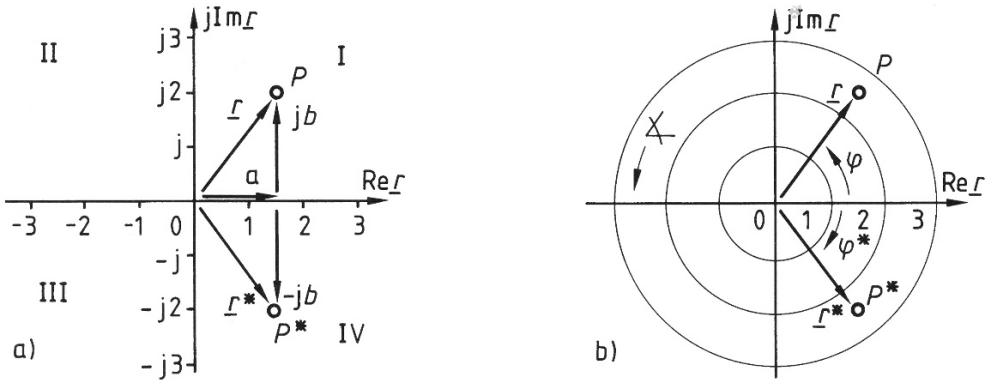


Bild 5.15: Gaußsche Zahlenebene mit kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b) sowie Darstellung der komplexen Größe $r = a + jb = r e^{j\varphi}$ und der hierzu konjugiert komplexen Größe $r^* = a - jb = r e^{-j\varphi}$

2. Trigonometrische oder polare Form

Diese Darstellungsform entspricht der Beschreibung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Angabe seiner *Polarkoordinaten*, also seines *Abstandes* vom Ursprung und des (vorzeichenbehafteten) *Winkels* von der Bezugsachse zu der Verbindungslinie zwischen Ursprung und Punkt. In der komplexen Ebene ist der positive Teil der reellen Achse die Bezugsachse. Der *Betrag* einer komplexen Größe r ist r . Er lässt sich mittels

$$r = |r| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad (5.63)$$

aus den Komponenten der kartesischen Darstellung berechnen. Zu beachten ist, dass in Gl. (5.63) nur der Imaginärteil b (ohne das j !) quadriert wird. Der Winkel von der positiven reellen Achse zum Zeiger wird als *Argument* (in der Elektrotechnik auch als *Phase*) der komplexen Größe bezeichnet. Das Argument lässt sich mittels²

$$\varphi = \arg(r) = \arctan \frac{\text{Im } r}{\text{Re } r} = \arctan \frac{b}{a} \quad (5.64)$$

aus den Komponenten der kartesischen Darstellung berechnen. Das Argument kann im Grad- oder im Bogenmaß angegeben werden. Während φ in der Mathematik beliebige reelle Werte annehmen kann, beschränkt man sich in der Elektrotechnik auf den Hauptwert in einem Intervall der Breite $2\pi \hat{=} 360^\circ$, das meist symmetrisch zu null gewählt wird, also

$$-\pi \hat{=} -180^\circ < \varphi \leq \pi \hat{=} 180^\circ. \quad (5.65)$$

Da der Arkustangens eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\arctan(-x) = -\arctan x. \quad (5.66)$$

² $\varphi = \arctan(b/a)$ ist die (unendlich vieldeutige) Umkehrrelation zu der Funktion $b/a = \tan \varphi$. Hieraus ergibt sich bei Beschränkung auf die Hauptwerte $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$ die eindeutige Funktion $\varphi = \text{Arctan}(b/a)$; im Komplexen entspricht dies einer Beschränkung auf die rechte Halbebene $a \geq 0$.

Real- und Imaginärteil können einfach aus Betrag und Argument berechnet werden:

$$\operatorname{Re} \underline{r} = a = r \cos \varphi \quad (5.67)$$

$$\operatorname{Im} \underline{r} = b = r \sin \varphi \quad (5.68)$$

Damit folgt aus Gl. (5.60) die *trigonometrische oder polare Form*

$$\underline{r} = \operatorname{Re} \underline{r} + j \operatorname{Im} \underline{r} = r \cos \varphi + j r \sin \varphi = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) . \quad (5.69)$$

3. Exponential- oder Eulersche Form

Mit der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (5.70)$$

folgt aus Gl. (5.69) mit den Gln. (5.63) und (5.64) die *Exponential- oder Eulersche Form*

$$\underline{r} = r e^{j\varphi} = |\underline{r}| e^{j \arg(\underline{r})} . \quad (5.71)$$

Da diese Form kompakter als die trigonometrische Form ist, wird sie in der Regel verwendet, wenn eine komplexe Größe durch Betrag und Argument dargestellt werden soll. Wegen

$$|e^{j\varphi}| = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1 \quad (5.72)$$

bestimmt der Term $e^{j\varphi}$ ausschließlich die Lage (Winkelposition) eines komplexen Zeigers, während seine Länge ausschließlich durch r festgelegt wird.

Den Wert des Faktors $e^{j\varphi}$ sollte man sich für einige häufig vorkommende Winkel merken:

$$e^{j0} = e^{j0^\circ} = \cos 0^\circ + j \sin 0^\circ = 1 \quad (5.73)$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j \quad (5.74)$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ) = -j \quad (5.75)$$

$$e^{j\pi} = e^{j180^\circ} = \cos 180^\circ + j \sin 180^\circ = -1 \quad (5.76)$$

5.3.2 Rechenregeln für komplexe Größen

Im Hinblick auf die konkrete elektrotechnische Anwendung werden in diesem Abschnitt komplexe Größen meist kurz als (komplexe) *Zeiger* bezeichnet.

Konjugiert komplexe Größe

Der zu einem Zeiger \underline{r} konjugiert komplexe Zeiger wird mit einem hochgestellten Stern bezeichnet. Er ergibt sich durch Umkehrung des Vorzeichens des Imaginärteils

$$\underline{r}^* = a - j b , \quad (5.77)$$

was nach Bild 5.15 bzw. wegen

$$\arctan \frac{-b}{a} = -\arctan \frac{b}{a} = -\varphi \quad (5.78)$$

einer Umkehrung des Vorzeichens des Arguments φ , also einer *Spiegelung an der reellen Achse* entspricht. Durch die Spiegelung ändert sich der Betrag r des Zeigers nicht:

$$|\underline{r}^*| = |\underline{r}| = r \quad (5.79)$$

Addition und Subtraktion

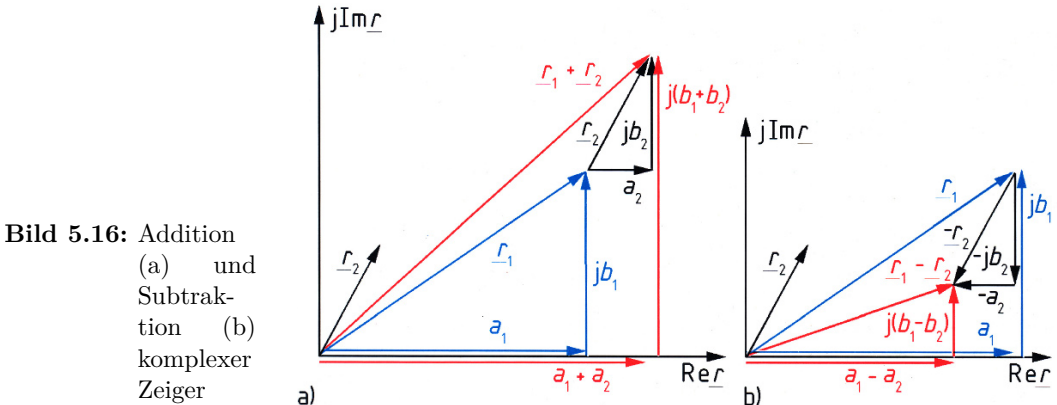
Liegen die Zeiger in Komponentenform vor, z. B. $\underline{r}_1 = a_1 + j b_1$ und $\underline{r}_2 = a_2 + j b_2$, so erhält man direkt die Summe

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2) \quad (5.80)$$

und die Differenz

$$\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = (a_1 + j b_1) - (a_2 + j b_2) = (a_1 - a_2) + j (b_1 - b_2). \quad (5.81)$$

Bild 5.16 verdeutlicht diese Operationen. Liegen die Zeiger in Exponentialform vor, so sind sie zunächst in die Komponentenform umzurechnen.



Die Bildung des konjugiert Komplexen von Summen oder Differenzen von Zeigern kann einzeln mit den beteiligten Zeigern erfolgen, wie man anhand der Gln. (5.80) bzw. (5.81) einfach nachvollziehen kann:

$$(\underline{r}_1 \pm \underline{r}_2)^* = (\underline{r}_1)^* \pm (\underline{r}_2)^* \quad (5.82)$$

Aussagen über Summen und Differenzen komplexer Größen, z. B.

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 - \underline{r}_3 = 0 \quad (5.83)$$

gelten in gleicher Weise auch für die hierzu konjugiert komplexen Größen:

$$\underline{r}_1^* + \underline{r}_2^* - \underline{r}_3^* = 0 \quad (5.84)$$

Multiplikation und Division

Mit den Zeigern $\underline{r}_1 = a_1 + j b_1$ und $\underline{r}_2 = a_2 + j b_2$ in Komponentenform erhält man das Produkt

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = (a_1 + j b_1) \cdot (a_2 + j b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j (a_1 b_2 + b_1 a_2). \quad (5.85)$$

Das Produkt eines Zeigers $\underline{r} = a + jb$ mit seinem konjugiert Komplexen $\underline{r}^* = a - jb$ ist stets eine reelle Größe

$$\underline{r}\underline{r}^* = (a + jb)(a - jb) = (a^2 - j^2b^2) = a^2 + b^2 = r^2, \quad (5.86)$$

nämlich das Quadrat des Betrages des Zeigers. Daher kann man den komplexwertigen Nenner eines Bruches stets dadurch reell machen, dass man den Bruch mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert. Diese Tatsache nutzt man bei der Division von zwei Zeigern in Komponentenform. Man erhält

$$\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (5.87)$$

Einfacher durchzuführen sind Multiplikation und Division, wenn die Zeiger in der Exponentialform $\underline{r}_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ und $\underline{r}_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$ vorliegen. Man erhält dann direkt das Produkt

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (5.88)$$

und den Quotienten

$$\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (5.89)$$

Bei der Multiplikation von Zeigern werden deren Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Bei der Division von Zeigern werden deren Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

Die Multiplikation eines Zeigers \underline{r} mit -1 bewirkt mit Gl. (5.76) wegen

$$-1 \cdot \underline{r} = \left(e^{j180^\circ} \right) \cdot \left(r e^{j\varphi} \right) = r e^{j(\varphi + 180^\circ)} \quad (5.90)$$

eine Drehung des Zeigers um 180° , was einer Spiegelung am Ursprung entspricht.

Die Bildung des Kehrwertes (Inversion) eines Zeigers

$$\frac{1}{\underline{r}} = \frac{1}{r e^{j\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-j\varphi} \quad (5.91)$$

bewirkt die Bildung des Kehrwertes seines Betrages und die Umkehrung des Vorzeichens seines Argumentes.

Besonders wichtig für das Verständnis und das Berechnen von Sinusstromnetzwerken sind die Multiplikation mit und die Division durch j . Mit Gl. (5.74) und Gl. (5.88) ergibt sich für das Produkt

$$\underline{r} \cdot j = r e^{j\varphi} \cdot e^{j90^\circ} = r e^{j(\varphi + 90^\circ)} \quad (5.92)$$

und mit Gl. (5.89) für den Quotienten

$$\frac{\underline{r}}{j} = \frac{r e^{j\varphi}}{j} = \frac{r e^{j\varphi}}{e^{j90^\circ}} = r e^{j(\varphi - 90^\circ)}. \quad (5.93)$$

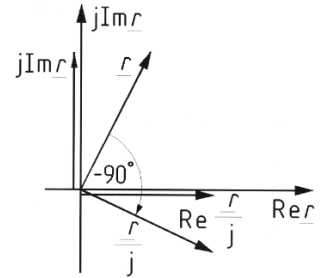


Bild 5.17: Division des komplexen Zeigers \underline{r} durch die imaginäre Einheit j

Die Multiplikation eines Zeigers mit j bewirkt bei unverändertem Betrag eine Drehung des Zeigers um $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$. Die Division eines Zeigers durch j bewirkt eine Drehung um $-\pi/2 \hat{=} -90^\circ$, ebenfalls unter Beibehaltung seines Betrags.

Wie aus Bild 5.17 ersichtlich, gilt daher

$$\operatorname{Re} \frac{\underline{r}}{j} = \operatorname{Im} \underline{r}. \quad (5.94)$$

Aus Gl. (5.93) und Gl. (5.75) folgt ferner für den Kehrwert von j

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j90^\circ}} = e^{-j90^\circ} = -j. \quad (5.95)$$

Eine Division durch j ist daher gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit $-j$.

Die Bildung des konjugiert Komplexen von Produkten oder Quotienten von Zeigern kann einzeln mit den beteiligten Zeigern erfolgen:

$$(\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2)^* = r_1 r_2 e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 e^{-j\varphi_1} \cdot r_2 e^{-j\varphi_2} = (\underline{r}_1)^* \cdot (\underline{r}_2)^* \quad (5.96)$$

$$\left(\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right)^* = \frac{r_1}{r_2} e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1 e^{-j\varphi_1}}{r_2 e^{-j\varphi_2}} = \frac{(\underline{r}_1)^*}{(\underline{r}_2)^*} \quad (5.97)$$

Real- und Imaginärteil

Real- und Imaginärteil der Summe bzw. Differenz zweier Zeiger sind gleich der Summe der Real- und Imaginärteile der einzelnen Zeiger

$$\operatorname{Re} (\underline{r}_1 \pm \underline{r}_2) = \operatorname{Re} \underline{r}_1 \pm \operatorname{Re} \underline{r}_2 \quad (5.98)$$

$$\operatorname{Im} (\underline{r}_1 \pm \underline{r}_2) = \operatorname{Im} \underline{r}_1 \pm \operatorname{Im} \underline{r}_2, \quad (5.99)$$

wie Bild 5.16 veranschaulicht. Eine entsprechende Rechenregel für Produkte und Quotienten von Zeigern gibt es *nicht*:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right) \neq \frac{\operatorname{Re} \underline{r}_1}{\operatorname{Re} \underline{r}_2} \quad (5.100)$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right) \neq \frac{\operatorname{Im} \underline{r}_1}{\operatorname{Im} \underline{r}_2} \quad (5.101)$$

Betragsbildung

Der Betrag eines Produktes bzw. eines Quotienten zweier Zeiger ist gleich dem Produkt bzw. dem Quotienten der Beträge der einzelnen Zeiger:

$$|\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2| = \left| r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \right| = r_1 r_2 = |\underline{r}_1| \cdot |\underline{r}_2| \quad (5.102)$$

$$\left| \frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|\underline{r}_1|}{|\underline{r}_2|} \quad (5.103)$$

Eine entsprechende Rechenregel für den Betrag von Summen bzw. Differenzen von Zeigern gibt es *nicht*:

$$|\underline{r}_1 \pm \underline{r}_2| \neq |\underline{r}_1| \pm |\underline{r}_2| \quad (5.104)$$

vielmehr gilt die aus der Geometrie und Vektorrechnung bekannte *Dreiecksungleichung*

$$|\underline{r}_1 + \underline{r}_2| \leq |\underline{r}_1| + |\underline{r}_2| \quad (5.105)$$

auch für Zeiger.

5.3.3 Komplexe Gleichungen

Unter Beachtung der im vorigen Abschnitt aufgeführten Besonderheiten gelten für das Rechnen mit komplexen Größen grundsätzlich die selben Rechenregeln wie für reelle Größen.

Wenn zwei komplexe Größen $\underline{r}_1 = a_1 + j b_1$ und $\underline{r}_2 = a_2 + j b_2$ gleich sein sollen, folgen aus der *einen komplexwertigen* Bedingung

$$a_1 + j b_1 = a_2 + j b_2 \quad (5.106)$$

zwei reellwertige Bedingungen

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2. \quad (5.107)$$

Entsprechend folgen, wenn die gleichgesetzten Größen in der Exponentialform $\underline{r}_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ und $\underline{r}_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$ vorliegen, aus der *komplexwertigen* Bedingung

$$r_1 e^{j\varphi_1} = r_2 e^{j\varphi_2} \quad (5.108)$$

die zwei *reellwertigen* Bedingungen

$$r_1 = r_2 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2. \quad (5.109)$$

Man kann also aus jeder komplexen Gleichung zwei reelle Gleichungen gewinnen, indem man entweder sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile gleichsetzt, oder indem man sowohl die Beträge als auch und die Argumente gleichsetzt.

5.3.4 Komplexe Spannungen und Ströme

Die Länge der Zeiger für Sinusgrößen wird durch den Betrag der jeweiligen Größe festgelegt. In diesem Buch ist das bei *rotierenden Zeigern* der *Scheitelwert*, z. B. \hat{u} oder \hat{i} und bei *ruhenden Zeigern* in der Regel der *Effektivwert*, z. B. U oder I .

Die Lage der Zeiger ergibt sich bei ruhenden Zeigern aus den Nullphasenwinkeln (z. B. φ_u oder φ_i) der jeweiligen Sinusgröße.

Die Operationen, die mit Zeigern bei Addition, Subtraktion, Differenziation und Integration der entsprechenden Sinusgrößen vorgenommen werden müssen, lassen sich mittels der komplexen Rechnung auf einfache algebraische Operationen zurückführen. Wegen dieses Vorteils werden die zunächst als rein geometrische Objekte eingeführten Zeiger in die komplexe Ebene übertragen und durch komplexe Größen dargestellt, die ebenfalls als (komplexe) Zeiger bezeichnet werden. Dabei wechselt man aus dem mathematisch aufwändigen *Zeitbereich* in einen sogenannten *Bildbereich* über, in dem die erforderlichen Operationen wesentlich einfacher sind. In der Mathematik nennt man einen solchen Vorgang eine *Transformation*. Die Darstellung und Berechnung von Sinusstromnetzwerken mit Hilfe von Zeigern nennt man auch die *symbolische Methode*.

5.3.4.1 Komplexe Scheitelwertzeiger

Bild 5.18 zeigt den in der komplexen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden *komplexen Drehzeiger* \underline{u} mit dem Betrag \hat{u} in zwei verschiedenen Lagen, die zu den Zeitpunkten $t = 0$ bzw. $t > 0$ gehören.

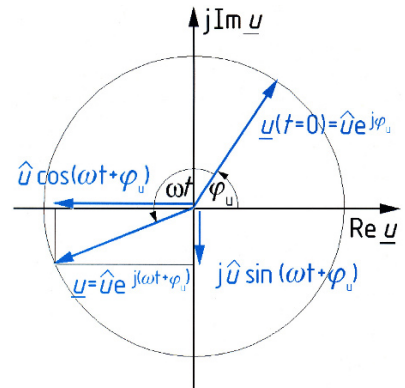


Bild 5.18: Komplexer Drehzeiger $\underline{u} = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Zeiger um seinen Nullphasenwinkel φ_u gegenüber der positiven reellen Achse verdreht, zum zweiten dargestellten Zeitpunkt um den Winkel $\omega t + \varphi_u$.

Nach Gl. (5.71) kann dieser *rotierende Scheitelwertzeiger* durch die komplexe Zeitfunktion

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad (5.110)$$

beschrieben werden. Der komplexe Ausdruck

$$e^{j\omega t} \quad (5.111)$$

bewirkt die Rotation des Zeigers mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung der komplexen Ebene, ohne seinen Betrag zu beeinflussen. Er wird daher als *Drehoperator* bezeichnet.

Durch Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse gemäß Bild 5.9 erhält man, wie in Bild 5.18 dargestellt, die Zeitfunktion der Sinusgröße

$$u(t) = \text{Im } \underline{u}(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (5.112)$$

Beispiel 5.3: Komplexer Spannungszeiger und Augenblickswert der Spannung

Für die Sinusspannung mit $U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ und $\varphi_u = -60^\circ$ sind die Funktion des zugehörigen komplexen Drehzeigers (rotierenden Scheitelwertzeigers) \underline{u} und der Augenblickswert u für den Zeitpunkt $t = 12 \text{ ms}$ anzugeben.

Mit Gl. (5.43) erhält man den Scheitelwert $\hat{u} = \sqrt{2}U = 325,3 \text{ V}$ und nach Gl. (5.29) die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 314,2 \text{ s}^{-1}$. Der Winkel -60° entspricht im Bogenmaß $-\pi/3$. Damit folgt aus Gl. (5.110) für den komplexen Drehzeiger

$$\underline{u} = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = 325,3 \text{ V } e^{j(314,2 \text{ s}^{-1} t - \pi/3)}. \quad (5.113)$$

Aus Gl. (5.112) erhält man für $t = 12 \text{ ms}$ den Augenblickswert der Spannung

$$u = \text{Im } \underline{u} = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = 325,3 \text{ V } \sin(314,2 \text{ s}^{-1} \cdot 12 \text{ ms} - \pi/3) = 132,3 \text{ V}. \quad (5.114)$$

Die Drehung der Zeiger braucht nur bei der (selten erforderlichen) Bestimmung der Augenblickswerte berücksichtigt zu werden. Man kann daher in den meisten Fällen auf den Drehoperator $e^{j\omega t}$ verzichten. Wenn man z. B. aus dem komplexen Drehzeiger der Spannung

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \hat{\underline{u}} e^{j\omega t} \quad (5.115)$$

diesen Drehoperator eliminiert (indem man $t = 0$ setzt oder durch $e^{j\omega t}$ dividiert), bleibt ein von der Zeit unabhängiger Wert, der *ruhende Scheitelwertzeiger*

$$\hat{\underline{u}} = \hat{u} e^{j\varphi_u} \quad (5.116)$$

übrig, der auch als die *komplexe Amplitude* der Sinusgröße in Gl. (5.115) bezeichnet wird.

5.3.4.2 Komplexe Effektivwertzeiger

Amplitude und Effektivwert unterscheiden sich bei Sinusgrößen durch den Scheitelfaktor $\xi = \sqrt{2}$. Daher wird neben der komplexen Amplitude aus Gl. (5.116) der *komplexe Effektivwert*

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u} \quad (5.117)$$

definiert, der als *ruhender Effektivwertzeiger* darstellbar ist und sich nur in seinem Betrag um den Faktor $1/\sqrt{2}$ vom ruhenden Scheitelwertzeiger $\hat{\underline{u}}$ unterscheidet. Man gelangt so zu der gleichen Darstellung wie in Bild 5.11, mit dem einzigen Unterschied, dass sich die Zeiger nun in

der komplexen Ebene befinden. Diese Überlegungen gelten für alle Sinusgrößen, so z. B. auch für Sinusstrom, für den der komplexe Effektivwert

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i} \quad (5.118)$$

ist. Bei der Berechnung von Sinusstromnetzwerken verwendet man fast immer ruhende Effektivwertzeiger. Man bezeichnet diese Zeiger als komplexe Spannung \underline{U} , komplexer Strom \underline{I} , usw. Mit diesen Zeigern werden von den drei zur eindeutigen Beschreibung von Sinusgrößen erforderlichen Kennwerten (vgl. Abschnitt 5.2.3) lediglich die Effektivwerte und die Nullphasenwinkel symbolisch dargestellt. Die – bei allen Sinusgrößen in einem Sinusstromnetzwerk gleiche – Kreisfrequenz ω wird als zusätzlicher Kennwert als bekannt vorausgesetzt.

Da sich ein Effektivwertzeigerdiagramm wie in Bild 5.19a aus der Momentaufnahme der ursprünglich rotierenden Zeiger zum Zeitpunkt $t = 0$ herleiten lässt, hängt der Winkel, unter dem ein Effektivwertzeigerdiagramm in der komplexen Ebene erscheint, ausschließlich von der Wahl dieses zeitlichen Nullpunktes ab. Häufig wählt man ihn wie in Bild 5.19b so, dass einer der Zeiger auf die positive reelle Achse fällt. Dieser Zeiger dient dann als *Bezugszeiger*, gegen den die Phasenverschiebungswinkel der anderen Zeiger gemessen werden.

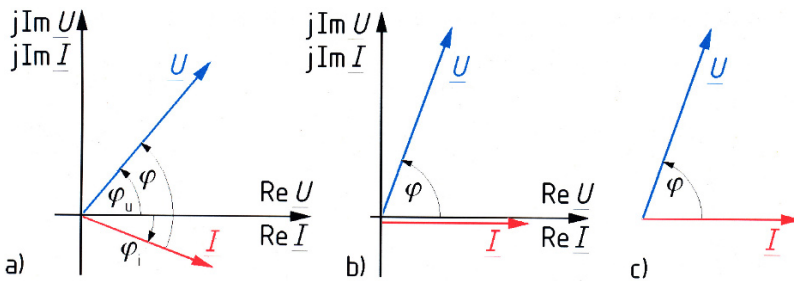


Bild 5.19: Komplexe Effektivwertzeiger \underline{U} und \underline{I} mit ihren Nullphasenwinkeln φ_u , φ_i (a), mit dem komplexen Strom \underline{I} als Bezugszeiger (b) und ohne Darstellung der Achsen (c)

Wegen der willkürlichen Wählbarkeit des Zeitpunktes $t = 0$ liefert die *Winkelposition* eines Effektivwertzeigers keine Information über die zugehörige Sinusgröße. Insofern ist die Lage der reellen und der imaginären Achse für ein Effektivwertzeigerdiagramm belanglos. Man stellt daher solche Zeigerdiagramme wie in Bild 5.19c ganz ohne Achsenkreuz dar.

Unabhängig von der Wahl des zeitlichen Nullpunktes bleibt, wie der Vergleich der Bilder 5.19a und b zeigt, die Lage der einzelnen Zeiger *relativ zueinander* stets dieselbe. Z. B. hat der Winkel zwischen der komplexen Spannung \underline{U} und dem komplexen Strom \underline{I} in den Bildern 5.19a und 5.19b den selben Wert

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i. \quad (5.119)$$

Er bezeichnet wie in Bild 5.6 und gemäß Gl. (5.34) den *Phasenverschiebungswinkel* φ , um den die Spannung u dem Strom i voraussieht. Der Phasenverschiebungswinkel φ ist in U-I-Zeigerdiagrammen durch einen Einfachpfeil zu kennzeichnen, der wie in Bild 5.19 vom Stromzeiger \underline{I} zum Spannungszeiger \underline{U} gerichtet ist. Wenn der Pfeil in mathematisch positiver Richtung weist, ist φ positiv, sonst negativ.

Die Korrespondenzen zwischen den Operationen mit Sinusgrößen im Zeitbereich, mit geometrischen Zeigern und mit komplexen Zeigern sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Tabelle 5.1: Rechenoperationen mit Sinusgrößen in unterschiedlichen Darstellungsformen

	<i>Zeitfunktionen</i>	<i>allgemeine Zeigerdiagramme</i>	<i>komplexe Größen</i>
<i>Addition</i>	Überlagerung der Zeitfunktionen	geometrische Addition der Zeiger	Addition der komplexen Größen
<i>Multiplikation mit -1</i>	Vorzeichenumkehr der Zeitfunktion, d. h. Phasendrehung der Sinusfunktion um 180°	Richtungsumkehr des Zeigers	Multiplikation der komplexen Größe mit -1
<i>Multiplikation mit einem positiven reellen Faktor</i>	Multiplikation der Amplitude der Sinus-schwingung mit dem positiven reellen Faktor	Multiplikation des Betrags des Zeigers mit dem positiven reellen Faktor	Multiplikation der komplexen Größe mit dem positiven reellen Faktor
<i>Differenziation</i>	Differenziation der Zeitfunktion, d. h. Phasenverschiebung der Sinusfunktion um +90° und Multiplikation der Amplitude mit ω	Drehung des Zeigers um +90° und Multiplikation seines Betrags mit ω	Multiplikation der komplexen Größe mit $j\omega$
<i>Integration</i>	Integration der Zeitfunktion, d. h. Phasenverschiebung der Sinusfunktion um -90° und Division der Amplitude durch ω	Drehung des Zeigers um -90° und Division seines Betrags durch ω	Division der komplexen Größe durch $j\omega$

5.3.5 Komplexe Widerstände und Leitwerte

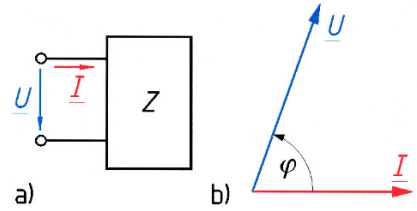
In diesem Abschnitt werden nur passive Zweipole betrachtet. Es wird angenommen, dass die Zählpfeile für die Klemmengrößen Strom und Spannung ein *Verbraucher-Zählpfeilsystem* bilden, wie z. B. in Bild 5.20a dargestellt.

In Sinusstromnetzwerken hat die an einem Zweipol anliegende Sinusspannung $u(t)$ in der Regel eine andere Phasenlage als der durch den Zweipol fließende Sinusstrom $i(t)$. Bei Verwendung der komplexen Effektivwertzeiger \underline{U} und \underline{I} ergeben sich dann Zeigerdiagramme wie in Bild 5.20b.

Dividiert man bei einem *passiven* Zweipol die komplexe Klemmenspannung \underline{U} durch den komplexen Klemmenstrom \underline{I} , erhält man eine komplexe Größe, die als *Impedanz* (oder *komplexer Widerstand*) des Zweipols bezeichnet wird:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \quad (5.120)$$

Bild 5.20: Zweipol mit Zählpfeilen für die komplexe Spannung \underline{U} und den komplexen Strom \underline{I} im Verbraucher-Zählpfeilsystem (a) und Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b)



Diese Definition entspricht der des Gleichstromwiderstandes in Gl. (2.5) mit dem Unterschied, dass alle beteiligten Größen nun komplex sind. Zur Berechnung der Impedanz ist die Kenntnis der Nullphasenwinkel φ_u und φ_i der Klemmengrößen nicht erforderlich, sondern nur des Phasenverschiebungswinkels $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, der gleich dem Argument der Impedanz ist. So erhält man z. B. aus den Effektivwertzeigern nach Bild 5.19a und b, die unterschiedliche Nullphasenwinkel haben, die selbe Impedanz \underline{Z} .

Wie jede komplexe Größe lässt sich die Impedanz sowohl in der Exponential- als auch in der Komponentenform darstellen:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z} = R + jX \quad (5.121)$$

Der Betrag Z der Impedanz \underline{Z} wird als *Scheinwiderstand* bezeichnet, ihr Realteil R als *Wirkwiderstand* und ihr Imaginärteil X als *Blindwiderstand* oder *Reaktanz*.

Zwischen Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand bestehen über den Phasenverschiebungswinkel φ nach Gl. (5.63) bis (5.68) die Beziehungen

$$R = Z \cos \varphi, \quad (5.122)$$

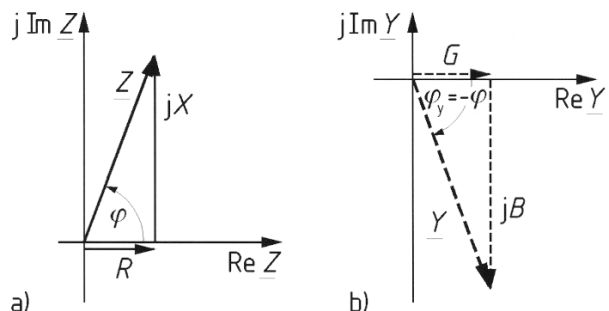
$$X = Z \sin \varphi, \quad (5.123)$$

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (5.124)$$

$$\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{X}{R}, \quad (5.125)$$

die sich auch unmittelbar aus dem Zeigerdiagramm in Bild 5.21a ablesen lassen.

Bild 5.21: Impedanzzeigerdiagramm (a) und Admittanzzeigerdiagramm (b) des Zweipols in Bild 5.20



Die Division des komplexen Stroms \underline{I} durch die komplexe Spannung \underline{U} bei einem passiven Zweipol ergeben dessen *Admittanz* (die auch als *komplexer Leitwert* bezeichnet wird)

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\varphi_i}}{U e^{j\varphi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi}. \quad (5.126)$$

Sie ist in Bild 5.21b ebenfalls als Zeiger dargestellt. Gl. (5.126) zeigt, dass das Argument φ_Y der Admittanz

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y} = \operatorname{Re} \underline{Y} + j \operatorname{Im} \underline{Y} = G + jB \quad (5.127)$$

den gleichen Betrag wie der Phasenverschiebungswinkel φ , jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Der Betrag Y der Admittanz \underline{Y} wird als *Scheinleitwert* bezeichnet, ihr Realteil G heißt *Wirkleitwert*, der Imaginärteil B *Blindleitwert* oder *Suszeptanz*.

Zwischen Wirk-, Blind- und Scheinleitwert bestehen über den Winkel φ_Y nach Gl. (5.63) bis (5.68) die Beziehungen

$$G = Y \cos \varphi_Y, \quad (5.128)$$

$$B = Y \sin \varphi_Y, \quad (5.129)$$

$$Y = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad (5.130)$$

$$\varphi_Y = \operatorname{Arctan} \frac{B}{G}. \quad (5.131)$$

Da die Klemmengrößen des selben Zweipols betrachtet wurden, folgt aus den Definitionen Gl. (5.120) für die Impedanz \underline{Z} und Gl. (5.126) für die Admittanz \underline{Y}

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (5.132)$$

Setzt man beide Größen in der Exponentialform ein, erhält man

$$Y e^{j\varphi_Y} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}, \quad (5.133)$$

$$Y = \frac{1}{Z}, \quad (5.134)$$

$$\varphi_Y = -\varphi. \quad (5.135)$$

Wenn man in Gl. (5.132) beide Größen in der Komponentenform einsetzt und mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert, erhält man:

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (5.136)$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (5.137)$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (5.138)$$

Löst man Gl. (5.132) nach \underline{Z} auf, ergibt sich entsprechend:

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (5.139)$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad (5.140)$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (5.141)$$

Das Klemmenverhalten von Ohmschen Widerständen in Gleichstromnetzwerken kann gleichwertig entweder mittels ihres Widerstandswertes R oder ihres Leitwertes $G = 1/R$ beschrieben werden. Ebenso ist es offenbar auch möglich, das Klemmenverhalten von passiven Zweipolen in Sinusstromnetzwerken gleichwertig entweder mittels ihres komplexen Widerstandswertes \underline{Z} oder ihres komplexen Leitwertes \underline{Y} zu beschreiben. Beide Größen bestehen jeweils aus Wirk- und Blindanteil.

Die Gln. (5.137), (5.138), (5.140) und (5.141) zeigen, dass bei passiven Zweipolen in Sinusstromnetzwerken im Gegensatz zu Ohmschen Widerständen im Allgemeinen der Wirkleitwert G *nicht* der Kehrwert des Wirkwiderstandes R und der Blindleitwert B *nicht* der Kehrwert des Blindwiderstandes X ist. Die Gln. (5.138) und (5.141) zeigen außerdem, dass Blindwiderstand X und Blindleitwert B eines Zweipols stets *entgegengesetzte Vorzeichen* haben, was durch Bild 5.21 verdeutlicht wird.

Anders als Zeiger für Sinusgrößen, die *rotieren* oder *als ruhend betrachtet* werden, ruhen Zeiger für Impedanzen und Admittanzen *tatsächlich*, da ihre Argumente nicht von der Zeit abhängen. Daher ist es bei Impedanz- und Admittanzzeigerdiagrammen *immer* erforderlich, die Achsen der komplexen Ebene darzustellen, um die Werte von φ bzw. φ_Y eintragen zu können, was durch Bild 5.21 verdeutlicht wird.

5.4 Leistung in Sinusstromnetzwerken

Bei Gleichstromnetzwerken ist die in einem Zweipol umgesetzte Leistung als Produkt der konstanten, vorzeichenbehafteten Klemmengrößen U und I ebenfalls eine konstante, vorzeichenbehaftete Größe

$$P = U I . \quad (5.142)$$

Wenn der Strom i und die Spannung u zeitabhängig sind, ist die *Augenblicksleistung*

$$p(t) = u(t) i(t) . \quad (5.143)$$

5.4.1 Wirkleistung

Für viele praktische Fragestellungen ist der zeitliche Verlauf der Augenblicksleistung $p(t)$ nur von geringem Interesse. Wesentlich wichtiger ist ihr arithmetischer Mittelwert \bar{p} , der mit dem Symbol P bezeichnet und *Wirkleistung* genannt wird. Aus Gl. (5.143) folgt mit Gl. (5.9) der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung *beliebiger* Ströme und Spannungen mit der gemeinsamen Periodendauer T

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) i(t) dt . \quad (5.144)$$

Das Integral in Gl. (5.144) beschreibt die während einer Periode (je nach verwendetem Zählpeilsystem) aufgenommene oder abgegebene elektrische Energie. Nach Division durch die Periodendauer T ergibt sich somit die Wirkleistung P als der Mittelwert der pro Periode umgesetzten Energie. Die Einheit der Wirkleistung ist in Übereinstimmung mit Gl. (2.57) das Watt.

Die Messung der Wirkleistung P kann mit einem Wattmeter in einer Schaltung nach Bild 2.60a oder 2.30b erfolgen. Wegen der Trägheit des Messwerks kann der Zeiger bei Strömen und Spannungen mit Frequenzen oberhalb einiger Hertz dem Augenblickswert der Leistung $p(t)$ nicht mehr folgen und verharrt daher beim arithmetischen Mittelwert \bar{p} , der gleich der Wirkleistung P ist.

5.4.2 Scheinleistung

Bei der Herleitung des Effektivwertes in Abschnitt 5.1.7 wurde die von einem Ohmschen Widerstand aufgenommene Wirkleistung berechnet. Die Rechnung wurde dadurch erheblich vereinfacht, dass das Produkt der Klemmengrößen $u(t)i(t)$ durch den Ausdruck $Ri^2(t)$ ersetzt werden konnte. Das Klemmenverhalten passiver Zweipole in Sinusstromnetzwerken zeichnet sich aber dadurch aus, dass die Augenblickswerte von Klemmenspannung u und Klemmenstrom i im Allgemeinen *nicht* proportional zueinander sind. Dadurch liefert Gl. (5.144) zur Berechnung der Wirkleistung im Allgemeinen einen Wert, der *kleiner* als das Produkt der Effektivwerte der Klemmengrößen UI ist. Da dieses Produkt bei der Berechnung von Leistungen in Sinusstromkreisen als *Bezugsgröße* von erheblicher Bedeutung ist, erhielt es die eigene Bezeichnung *Scheinleistung*

$$S = UI. \quad (5.145)$$

Die Größen U und I in Gl. (5.145) sind keine vorzeichenbehafteten Gleichgrößen, sondern Effektivwerte, die nicht negativ werden können. Daher kann auch die Scheinleistung in keinem Fall negative Werte annehmen. Daraus folgt, dass es nicht möglich ist, unter Berücksichtigung des Zählpeilsystems an einem betrachteten Zweipol eine Aussage darüber zu machen, ob dieser Zweipol Scheinleistung abgibt oder aufnimmt. Man kann daher nur von *umgesetzter* Scheinleistung sprechen. Das Aufstellen von Leistungsbilanzen für Scheinleistungen ist aus diesem Grund nicht möglich.

Um Verwechslungen mit der Wirkleistung P auszuschließen, soll als Einheit der Scheinleistung S nicht das Watt, sondern das *Voltampere*

$$[S] = 1 \text{ VA} \quad (5.146)$$

verwendet werden.

5.4.3 Komplexe Leistung

Ein Ohmscher Widerstand mit dem Widerstandswert R nimmt die Wirkleistung

$$P = RI^2 \quad (5.147)$$

auf. In Analogie hierzu wird für einen beliebigen passiven Zweipol mit der Impedanz $\underline{Z} = R + jX$, durch den ein Sinusstrom mit dem Effektivwert I fließt, die *komplexe Leistung* \underline{S} definiert:

$$\underline{S} = \underline{Z}I^2 = \text{Re } \underline{S} + j \text{Im } \underline{S} = RI^2 + jXI^2 = P + jQ \quad (5.148)$$

Wie Gl. (5.148) zeigt, sind bei passiven Zweipolen die komplexe Leistung \underline{S} und die Impedanz \underline{Z} durch den Effektivwert I des Klemmenstroms, also einen positiven reellen Proportionalitätsfaktor, miteinander verknüpft. Daher hat die komplexe Leistung \underline{S} bei passiven Zweipolen stets das selbe Argument φ wie die Impedanz \underline{Z} .

Eine zu Gl. (5.148) analoge Gleichung, die die komplexe Leistung mittels des Effektivwertes U der Klemmenspannung und der Admittanz \underline{Y} des passiven Zweipols ausdrückt, lautet

$$\underline{S} = Z e^{j\varphi} I^2 = Z e^{j\varphi} \frac{U^2}{Z^2} = \frac{1}{Z} e^{j\varphi} U^2 = Y e^{-j\varphi} U^2 = \underline{Y}^* U^2 = G U^2 - j B U^2. \quad (5.149)$$

Der Betrag $S = Z I^2 = Y U^2$ der komplexen Leistung ist

$$S = U I, \quad (5.150)$$

also die bereits in Gl. (5.145) definierte Scheinleistung. Der Imaginärteil der komplexen Leistung aus den Gln. (5.148) und (5.149)

$$Q = X I^2 = -B U^2 \quad (5.151)$$

heißt *Blindleistung*. Ihre technische Bedeutung wird bei der Untersuchung des Leistungsumsatzes von Induktivitäten und Kapazitäten in den Abschnitten 5.5.2.3 und 5.5.3.3 erläutert.

Die komplexe Leistung \underline{S} lässt sich auch direkt aus den komplexen Klemmengrößen \underline{I} und \underline{U} berechnen. Aus Gl. (5.148) folgt mit Gl. (5.120) unter Verwendung des konjugiert komplexen Stromes $\underline{I}^* = I e^{-j\varphi_i}$

$$\underline{S} = \frac{U}{\underline{I}} I^2 = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} I^2 = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = \underline{U} \underline{I}^*. \quad (5.152)$$

Gl. (5.152) gilt für beliebige, also auch aktive Zweipole und sollte daher stets der Ausgangspunkt für die Leistungsberechnung aus komplexen Größen sein.

Aus Gl. (5.152) folgen die weiteren Zusammenhänge

$$\underline{S} = U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U I e^{j\varphi}, \quad (5.153)$$

$$S = |\underline{S}| = U I, \quad (5.154)$$

$$P = \operatorname{Re} \underline{S} = U I \cos \varphi, \quad (5.155)$$

$$Q = \operatorname{Im} \underline{S} = U I \sin \varphi. \quad (5.156)$$

Die Gln. (5.155) und (5.156) zeigen auf, wie Wirk- und Blindleistungen mittels der auch im Zeitbereich definierten Effektivwerte der Klemmengrößen und ihres Phasenverschiebungswinkels berechnet werden können.

Da nach den Gln. (5.155) und (5.156) Realteil P und Imaginärteil Q der komplexen Leistung \underline{S} nicht von der Zeit abhängen, wird die komplexe Leistung so wie die Impedanz und die Admittanz durch *tatsächlich ruhende* Zeiger wie in Bild 5.22 dargestellt.

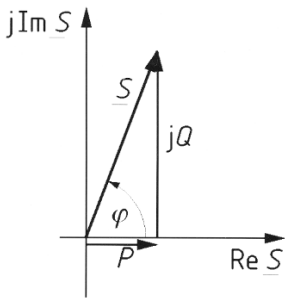


Bild 5.22: Leistungszeigerdiagramm des Zweipols in Bild 5.20

5.4.4 Leistungsfaktor

Der *Leistungsfaktor* λ ist eine für die Energietechnik sehr wichtige Kenngröße *passiver* Zweipole. Er ist *allgemeingültig* definiert als das Verhältnis von aufgenommener Wirkleistung zu umgesetzter Scheinleistung

$$\lambda = \frac{P}{S}. \quad (5.157)$$

Aus den Gln. (5.154) und (5.155) folgt die *nur für Sinusstromnetzwerke gültige* Definition

$$\lambda = \cos \varphi. \quad (5.158)$$

Da der Phasenverschiebungswinkel in Abschnitt 5.2.2.4 nur für *gleichfrequente Sinusgrößen* definiert wurde, kann Gl. (5.158) bei Zweipolen, deren Klemmengrößen *keine gleichfrequenten Sinusgrößen* sind, nur eingesetzt werden, wenn statt des Phasenverschiebungswinkels der in Abschnitt 9.2.4.2 eingeführte *fiktive Phasenverschiebungswinkel* verwendet wird.

5.5 Ideale passive Zweipole bei Sinusstrom

Zweipole, die von sich aus zwischen ihren Klemmen keine elektrische Spannung aufbauen können, werden nach Abschnitt 1.3.3 als *passive Zweipole* bezeichnet. Die einzigen in Gleichstromnetzwerken zu berücksichtigenden passiven Zweipole sind die Widerstände.

Die am häufigsten in elektrischen und elektronischen Schaltungen auftretenden passiven Bauelemente sind Widerstände, Kondensatoren und Spulen. Kondensatoren und Spulen haben Eigenschaften, die sie fundamental von Widerständen unterscheiden:

- Sie können elektrische Energie, die sie über ihre Klemmen aufgenommen haben, speichern und (zumindest teilweise) auch wieder über ihre Klemmen abgeben.
- Der Widerstand, den sie einem zeitlich veränderlichen Strom entgegensetzen, hängt von der Frequenz des Stromes ab.
- Ihre Klemmengrößen $u(t)$ und $i(t)$ sind *nicht* proportional zueinander.

Die entscheidende Kenngröße zur Beschreibung des Verhaltens von Kondensatoren ist ihre elektrische Kapazität C (Abschnitt 3.3.5.1). Die entsprechende Kenngröße von Spulen ist ihre Induktivität L (Abschnitt 4.3.1.5).

Neben dem *gewünschten* Verhalten, das durch die Parameter L bzw. C beschrieben wird, weisen *alle* Bauelemente auch Eigenschaften auf, die *unerwünscht*, aber *prinzipiell unvermeidbar* sind. So haben Kondensatoren und Spulen immer auch einen *parasitären Widerstand*, der dazu führt, dass ein Teil der über die Klemmen aufgenommenen Energie in Wärme umgewandelt wird. Widerstände und Kondensatoren weisen immer eine *parasitäre Induktivität* auf. Diese rührt daher, dass jeder Strom, der durch diese Bauelemente fließt, ein magnetisches Feld ähnlich wie bei einer Spule erzeugt. Widerstände und Spulen weisen im Betrieb eine Spannung zwischen ihren Klemmen auf, die zu einem elektrischen Feld zwischen den Klemmen ähnlich wie bei einem Kondensator führt. Diese Eigenschaft wird als *parasitäre Kapazität* bezeichnet.

In vielen Fällen reicht es zur Beschreibung und Untersuchung des Verhaltens von Schaltungen aus, diese parasitären Effekte zu vernachlässigen. Dann wird das Verhalten von realen Widerständen, Kondensatoren und Spulen durch *idealisierte Zweipole* nachgebildet, die nur noch die gewünschten Eigenschaften haben und daher als „idealer Widerstand“, „idealer Kondensator“ und „ideale Spule“ oder kurz als Widerstand, Kapazität und Induktivität bezeichnet werden.

Durch geeignetes Zusammenschalten solcher idealen Zweipole können *Ersatzschaltungen* für die realen passiven Zweipole gebildet werden, die die Wirkungen der parasitären Effekte nachbilden.

In den folgenden drei Abschnitten werden die idealisierten *passiven Grundzweipole* Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C behandelt. Es wird angenommen, dass sie *linear* und *zeitinvariant* sind, d. h. dass ihre Eigenschaften weder von den Klemmengrößen noch von der Zeit abhängen.

Das Missverständnis, Kapazitäten und Induktivitäten seien nichtlineare Zweipole, da sie keine lineare U-I-Kennlinie wie Widerstände aufweisen, ist weit verbreitet. (Solche Kennlinien sind für Kapazitäten und Induktivitäten übrigens gar nicht definiert.) *Allgemeingültig* wird ein Zweipol dann als *linear* bezeichnet, wenn die Beziehung zwischen seinen Klemmengrößen $u(t)$ und $i(t)$ durch eine *lineare Differenzialgleichung* (beliebiger Ordnung) beschrieben wird. Aus dieser Definition folgt die Eigenschaft linearer Zweipole, auf Anregung mit einer Sinusgröße im eingeschwungenen Zustand mit einer gleichfrequenten Sinusgröße zu reagieren. Das Verhältnis der Amplituden dieser Sinusgrößen ist bei fester Frequenz nur von den Eigenschaften des Zweipols (das sind bei den passiven Grundzweipolen die Parameter R , C , L) abhängig.

5.5.1 Ohmscher Widerstand

Auch bei Sinusstrom wird in einem Widerstand R elektrische Energie irreversibel in Wärme umgesetzt. In Analogie zu dieser nicht umkehrbaren Energieumwandlung werden auch andere Energieumwandlungen, wie z. B. in Motoren in mechanische Energie, durch Widerstände modelliert.

5.5.1.1 Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel

In Bild 5.23a ist das Schaltungssymbol für einen Ohmschen Widerstand R dargestellt; Strom- und Spannungszählpfeile sind im Verbraucher-Zählpfeilsystem eingetragen.

Hierfür gilt nach dem Ohmschen Gesetz der Zusammenhang

$$u = Ri. \tag{5.159}$$

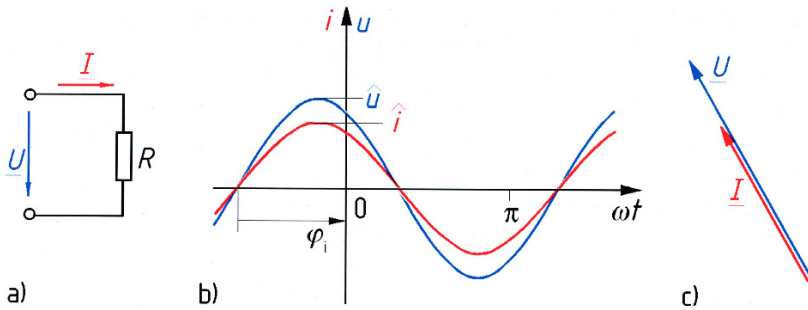


Bild 5.23: Strom und Spannung am Ohmschen Widerstand R im Verbraucher-Zählpeilsystem (a), zugehöriges Zeitdiagramm (b) und (vergrößertes) Effektivwertzeigerdiagramm (c)

Gl. (5.159) kann als *lineare Differenzialgleichung* nullter Ordnung aufgefasst werden. Somit sind Ohmsche Widerstände *lineare* Zweipole. Bei sinusförmigem Klemmenstromverlauf $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ folgt aus Gl. (5.159) für die Klemmenspannung

$$u = R \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (5.160)$$

der in Bild 5.23b dargestellte, mit dem Strom i *gleichphasige* sinusförmige Verlauf. Die Amplitude der Spannung ist $R \hat{i}$. Zum gleichen Ergebnis kommt man bei Anwendung der komplexen Rechnung. Wenn man den komplexen Strom \underline{I} mit dem positiven reellen Faktor R multipliziert, ergibt sich die komplexe Spannung

$$\underline{U} = R \underline{I}. \quad (5.161)$$

Entsprechend gilt für den komplexen Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}. \quad (5.162)$$

Durch die Multiplikation mit einem positiven reellen Faktor wird die Richtung eines komplexen Zeigers nicht verändert. Die Effektivwertzeiger \underline{I} und \underline{U} in Bild 5.23c haben daher dieselbe Richtung und bringen so ebenfalls die *Gleichphasigkeit* der Zeitfunktionen $i(t)$ und $u(t)$ zum Ausdruck.

5.5.1.2 Wirkwiderstand und Wirkleitwert

Aus Gl. (5.161) folgt mit Gl. (5.120) die in Bild 5.24a dargestellte *Impedanz* eines Ohmschen Widerstandes

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R. \quad (5.163)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.121) zeigt, besteht dieser komplexe Widerstand nur aus seinem Realteil $R_R = \operatorname{Re} \underline{Z}_R = R$, dem *Wirkwiderstand* R , während der *Blindwiderstand* $X_R = \operatorname{Im} \underline{Z}_R = 0$ ist.

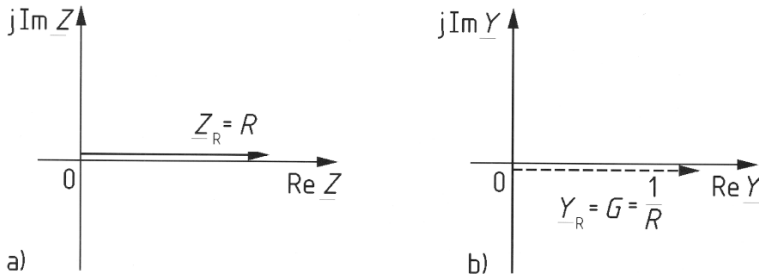


Bild 5.24: Impedanzzeigerdiagramm (a) und Admittanzzeigerdiagramm (b) eines Ohmschen Widerstandes

Für den *Scheinwiderstand* gilt

$$Z_R = |\underline{Z}_R| = R. \quad (5.164)$$

Das Argument der Impedanz ist der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_R = \arg \underline{Z}_R = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_R}{\operatorname{Re} \underline{Z}_R} = \arctan \frac{0}{R} = 0. \quad (5.165)$$

Für die in Bild 5.24b dargestellte *Admittanz* eines Ohmschen Widerstandes erhält man aus Gl. (5.162)

$$\underline{Y}_R = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}. \quad (5.166)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.127) zeigt, ist der *Blindleitwert* $B_R = \operatorname{Im} \underline{Y}_R = 0$. Für den *Wirkleitwert* gilt

$$G_R = \operatorname{Re} \underline{Y}_R = \frac{1}{R}. \quad (5.167)$$

Für den *Scheinleitwert* folgt

$$Y_R = |\underline{Y}_R| = \frac{1}{R}. \quad (5.168)$$

also in Übereinstimmung mit Gl. (5.134) der Kehrwert des Scheinwiderstandes Z_R . Das Argument der Admittanz ist wie das der Impedanz

$$\varphi_{Y_R} = \arg \underline{Y}_R = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}_R}{\operatorname{Re} \underline{Y}_R} = \arctan \frac{B_R}{G_R} = \arctan \frac{0}{1/R} = 0. \quad (5.169)$$

Der Wirkwiderstand R hat in der Praxis zwar den *gleichen physikalischen Charakter* wie der Gleichstromwiderstand, kann jedoch einen *anderen Wert* als dieser annehmen, wenn z. B. in einem Leiter *Stromverdrängung* [DS12] auftritt oder in dem ihn umgebenden magnetischen bzw. elektrischen Wechselfeld Verluste entstehen.

5.5.1.3 Wirkleistung

Nach Gl. (5.143) und Gl. (5.159) gilt bei einem Ohmschen Widerstand R für die Augenblicksleistung

$$p = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}. \quad (5.170)$$

Bei sinusförmigem Stromverlauf $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ folgt die Augenblicksleistung der in Bild 5.25b dargestellten Funktion

$$p = Ri^2 = R\hat{i}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) = \frac{R\hat{i}^2}{2} [1 - \cos(2(\omega t + \varphi_i))]. \quad (5.171)$$

Die hierin vorgenommene Umformung nach der Formel $\sin^2 x = 0,5[1 - \cos(2x)]$ zeigt ebenso wie das Zeitdiagramm in Bild 5.25b, dass die Augenblicksleistung p mit dem Doppelten der Frequenz f von Strom i und Spannung u um ihren Mittelwert pulsiert. Charakteristisch für den Ohmschen Widerstand ist die Tatsache, dass die von ihm aufgenommene Augenblicksleistung p zu keinem Zeitpunkt negativ wird. Das bedeutet, dass entsprechend Bild 5.25a elektrische Energie immer in Richtung des Zählpfeils von p , also in den Widerstand hinein, fließt und aus diesem nicht wieder zurückgewonnen werden kann. Die Energieumwandlung in einem Wirkwiderstand ist *irreversibel*, d. h. nicht umkehrbar.

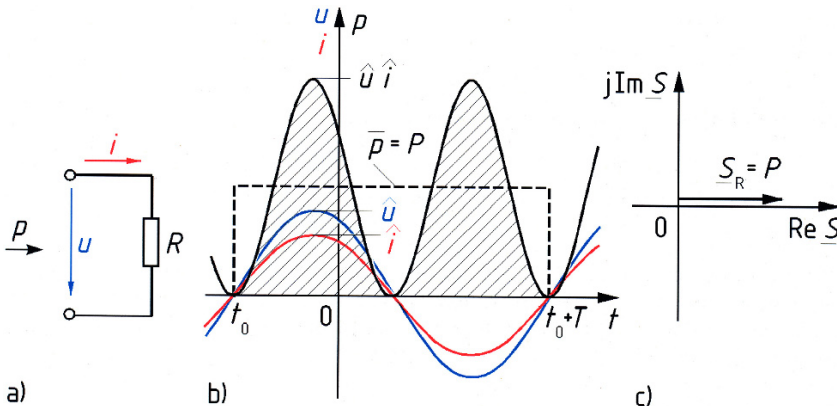


Bild 5.25: Ohmscher Widerstand R mit Verbraucher-Zählpfeilsystem (a), Strom i , Spannung u , Augenblicksleistung p im Zeitdiagramm (b) und Leistungszeigerdiagramm (c)

Die *Wirkleistung* P ist der arithmetische Mittelwert \bar{p} der Augenblicksleistung. Mit Gl. (5.144) und Gl. (5.171) erhält man

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{R\hat{i}^2}{2} [1 - \cos(2(\omega t + \varphi_i))] dt. \quad (5.172)$$

Zweckmäßigerweise wählt man als Integrationsbeginn t_0 den Zeitpunkt eines Nulldurchgangs des Stromes. Das Resultat der Integration, die während einer Periodendauer T aufgenommene

Energie, lässt sich anschaulich als die in Bild 5.25b schraffierte Fläche unter der Leistungskurve darstellen.

Wenn man diese Fläche gleichmäßig über die als Strecke dargestellte Integrationsdauer T verteilt, erhält man ein Rechteck, dessen Höhe dem arithmetischen Mittelwert $\bar{p} = P$ entspricht. Nach Auswertung wie in Gl. (5.41) und unter Verwendung von Gl. (5.42) folgt

$$P = \frac{R \hat{i}^2}{2} = R I^2 = U I = G U^2. \quad (5.173)$$

Dies ist der gleiche Zusammenhang, wie er in Gl. (2.59) für Gleichstrom gilt. Das rührt daher, dass nach Abschnitt 5.1.7 der Effektivwert so definiert ist, dass ein Wechselstrom mit dem Effektivwert I während jeder Periode einem Ohmschen Widerstand R die gleiche elektrische Energie zuführt wie ein Gleichstrom der Stromstärke I .

In Bild 5.25c ist der komplexe Leistungszeiger \underline{S}_R dargestellt. Wegen $\varphi_R = 0$ liegt er ebenso wie der Impedanzzeiger \underline{Z}_R auf der positiven reellen Achse. *Blindleistung* Q tritt an einem Ohmschen Widerstand nicht auf.

5.5.2 Induktivität

Die Eigenschaft der *Spule* oder *Drossel*, magnetische Feldenergie zu speichern, wird durch ihre Induktivität L beschrieben, die in Gl. (4.105) definiert ist. Betrachtet werden in diesem Abschnitt Zweipole, die durch den Wert ihrer Induktivität L vollständig beschrieben und daher auch so bezeichnet werden. Eine Induktivität kann man sich als *ideale Spule* vorstellen, bei der nur der Einfluss des magnetischen Feldes zu berücksichtigen ist, während der Leiterwiderstand und die kapazitiven Wirkungen der Spulenwindungen vernachlässigbar klein sind.

5.5.2.1 Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel

In Bild 5.26a ist das Schaltzeichen für eine Induktivität L dargestellt; Strom- und Spannungszählpfeile sind im Verbraucher-Zählpfeilsystem eingetragen. Hierfür gilt nach Gl. (4.120) der Zusammenhang

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (5.174)$$

bzw. (in symbolischer Schreibweise)

$$i = \frac{1}{L} \int u \, dt. \quad (5.175)$$

Gl. (5.174) ist eine *lineare Differenzialgleichung* erster Ordnung. Daher sind Induktivitäten *lineare* Zweipole.

Mit Gl. (5.58) folgt bei sinusförmigem Klemmenstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ aus Gl. (5.174) für die Klemmenspannung

$$u = L \frac{d}{dt} [\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)] = \omega L \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \quad (5.176)$$

der in Bild 5.26b dargestellte, ebenfalls sinusförmige Verlauf, der gegenüber dem Strom i um den Winkel $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$ voreilt. Die Amplitude der Spannung ist $\omega L \hat{i}$.

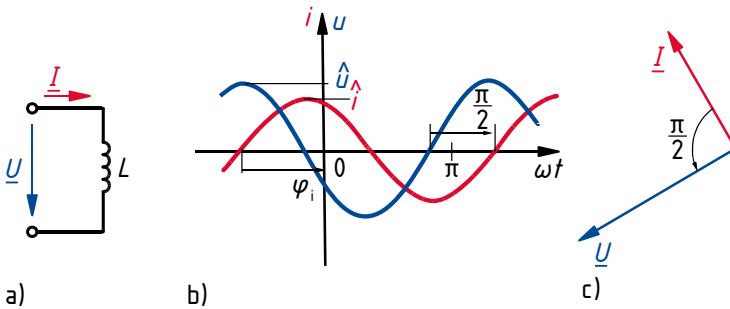


Bild 5.26: Strom und Spannung an der Induktivität L im Verbraucher-Zählpeilsystem (a), zugehöriges Zeitdiagramm (b) und (vergrößertes) Effektivwertzeigerdiagramm (c)

Zum gleichen Ergebnis kommt man bei Anwendung der komplexen Rechnung, wenn man gemäß Tabelle 5.1 in Gl. (5.174) die Differenziation der Zeitfunktion i durch die Multiplikation des komplexen Stroms \underline{I} mit dem Faktor $j\omega$ ersetzt. Unter Beibehaltung der Multiplikation mit dem positiven reellen Faktor L ergibt sich die komplexe Spannung

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}. \quad (5.177)$$

Man erhält also die komplexe Klemmenspannung \underline{U} , indem man den komplexen Klemmenstrom \underline{I} mit dem Faktor $j\omega L$ multipliziert. Außer der Multiplikation des Effektivwertes I mit ωL bedeutet dies, wie in Bild 5.26c dargestellt, eine Drehung des Zeigers $\omega L \underline{I}$ um den Winkel $\pi/2 \cong 90^\circ$.

Die Auflösung von Gl. (5.177) nach dem komplexen Strom

$$\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \underline{U} \quad (5.178)$$

zeigt, dass man den Zeiger \underline{I} erhält, indem man den Zeiger \underline{U} durch den Ausdruck $j\omega L$ dividiert. Außer der Division des Effektivwertes U durch ωL bedeutet dies in Übereinstimmung mit Bild 5.26c eine Drehung des Zeigers $\underline{U}/(\omega L)$ um den Winkel $-\pi/2 \cong -90^\circ$.

5.5.2.2 Induktiver Blindwiderstand und induktiver Blindleitwert

Dividiert man Gl. (5.177) durch den komplexen Strom \underline{I} , so erhält man für die Induktivität L die in Bild 5.27a dargestellte Impedanz

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ} \sim \omega. \quad (5.179)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.121) zeigt, ist der Wirkwiderstand $R_L = \operatorname{Re} \underline{Z}_L = 0$. Für den induktiven Blindwiderstand gilt

$$X_L = \operatorname{Im} \underline{Z}_L = \omega L \sim \omega. \quad (5.180)$$

Für den Scheinwiderstand gilt

$$Z_L = |\underline{Z}_L| = \omega L \sim \omega. \quad (5.181)$$

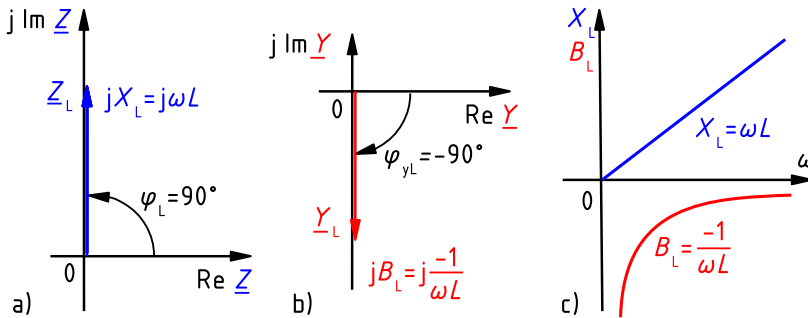


Bild 5.27: Impedanz- (a) und Admittanzzeigerdiagramm (b) einer Induktivität L sowie Frequenzgang (c) des induktiven Blindwiderstandes X_L und des induktiven Blindleitwertes B_L

Impedanz, Blind- und Scheinwiderstand einer Induktivität steigen proportional mit der Frequenz der Klemmengrößen an. Daher wirkt eine Induktivität für sehr niedrige Frequenzen fast wie ein Kurzschluss und für sehr hohe Frequenzen fast wie eine Unterbrechung.

Das Argument der Impedanz ist der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_L = \arg \underline{Z}_L = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_L}{\operatorname{Re} \underline{Z}_L} = \arctan \frac{X_L}{R_L} = \arctan \frac{\omega L}{0} = 90^\circ. \quad (5.182)$$

An Induktivitäten eilt der Strom also der Spannung um 90° nach. (Merksatz: „An Induktivitäten Ströme sich verspäten.“)

Dividiert man Gl. (5.178) durch die komplexe Spannung \underline{U} , erhält man für die Induktivität L unter Berücksichtigung von Gl. (5.95) die in Bild 5.27b dargestellte *Admittanz*

$$\underline{Y}_L = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{j\omega L} = j \frac{-1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j90^\circ} \sim \frac{1}{\omega}. \quad (5.183)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.127) zeigt, ist der *Wirkleitwert* $G_L = \operatorname{Re} \underline{Y}_L = 0$. Für den *induktiven Blindleitwert* gilt

$$B_L = \operatorname{Im} \underline{Y}_L = \frac{-1}{\omega L} \sim \frac{1}{\omega}; \quad (5.184)$$

das ist der *negative* Kehrwert des Blindwiderstandes in Gl. (5.180).

Der *Scheinleitwert* ist

$$Y_L = \frac{1}{\omega L} \sim \frac{1}{\omega}, \quad (5.185)$$

also in Übereinstimmung mit Gl. (5.134) der Kehrwert des Scheinwiderstandes Z_L .

Das Argument der Admittanz ist

$$\varphi_{Y_L} = \arg \underline{Y}_L = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}_L}{\operatorname{Re} \underline{Y}_L} = \arctan \frac{B_L}{G_L} = \arctan \frac{-1/(\omega L)}{0} = -90^\circ \quad (5.186)$$

und damit, wie in Gl. (5.135) allgemein formuliert, das Negative des Phasenverschiebungswinkels φ_L aus Gl. (5.182).

Wie die oben aufgeführten Gleichungen zeigen, hängen bei einer konstanten Induktivität L alle Betriebsparameter außer dem Phasenverschiebungswinkel von der Kreisfrequenz ω ab. Das bedeutet aber *nicht*, dass die Induktivität L selbst frequenzabhängig oder nichtlinear ist!

In Bild 5.27c sind die Verläufe des induktiven Blindwiderstandes und des induktiven Blindleitwertes über der Frequenz aufgetragen. Solche Darstellungen als Funktion der Frequenz nennt man *Frequenzgang*.

Beispiel 5.4: Induktivitätsberechnung aus den Klemmengrößen

An einer Spule mit vernachlässigbar kleinem Wirkwiderstand R liegt eine Sinusspannung mit $U = 125 \text{ V}$ und $f = 40 \text{ Hz}$. Es fließt ein Strom mit $I = 10 \text{ A}$.

Welche Induktivität L hat die Spule?

Mit Gl. (5.120) und (5.180) ergibt sich

$$Z_L = \frac{U}{I} = \omega L. \quad (5.187)$$

Hieraus folgt für die Induktivität

$$L = \frac{U}{\omega I} = \frac{U}{2\pi f I} = \frac{125 \text{ V}}{2\pi \cdot 40 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ A}} = 49,7 \text{ mH}. \quad (5.188)$$

Man kann also durch Messung von Spannung, Strom und Frequenz die Induktivität L bestimmen, sofern der Wirkwiderstand R gegenüber dem Blindwiderstand X_L vernachlässigbar klein ist.

Beispiel 5.5: Frequenzabhängigkeit eines induktiven Blindwiderstandes

Haushaltsgeräte mit Stromwendermotoren können Funkstörungen verursachen, da das Bürsttenfeuer am Stromwender eine Quelle hochfrequenter Störspannungen ist. Eine in die Netzzuleitung des Motors geschaltete Entstörspule weist für die Netzfrequenz einen geringen Blindwiderstand, für hochfrequente Störungen aber einen großen Blindwiderstand auf, wodurch das Eindringen der Störungen in das Netz behindert wird.

Welchen Blindwiderstand weist z. B. die Induktivität $L = 0,2 \text{ mH}$ für die Netzfrequenz $f_N = 50 \text{ Hz}$ und die Mittelwellenfrequenz $f_M = 1 \text{ MHz}$ auf?

Bei Netzfrequenz erhält man nach Gl. (5.180) den Blindwiderstand

$$X_{LN} = \omega_N L = 2\pi f_N L = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0,2 \text{ mH} = 0,06283 \Omega. \quad (5.189)$$

Mit $f_M/f_N = 1 \text{ MHz}/50 \text{ Hz} = 20.000$ wächst dieser Blindwiderstand für die Mittelwellenfrequenz auf

$$X_{LM} = \frac{f_M}{f_N} X_{LN} = 20.000 \cdot 0,06283 \Omega = 1257 \Omega. \quad (5.190)$$

5.5.2.3 Induktive Blindleistung

Nach Gl. (5.143) und Gl. (5.174) gilt für die in einer Induktivität umgesetzte Augenblicksleistung

$$p = i u = i L \frac{di}{dt}. \quad (5.191)$$

Bei sinusförmigem Stromverlauf $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ folgt die Augenblicksleistung der in Bild 5.28b dargestellten Funktion

$$p = \omega L \hat{i}^2 \cos(\omega t + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{2} \omega L \hat{i}^2 \sin[2(\omega t + \varphi_i)]. \quad (5.192)$$

Die hierin vorgenommene Umformung nach der Formel $\cos x \sin x = 0,5 \sin(2x)$ zeigt ebenso wie das Zeitdiagramm in Bild 5.28b, dass die Frequenz der Augenblicksleistung p doppelt so groß ist wie die Frequenz f von Strom i und Spannung u .

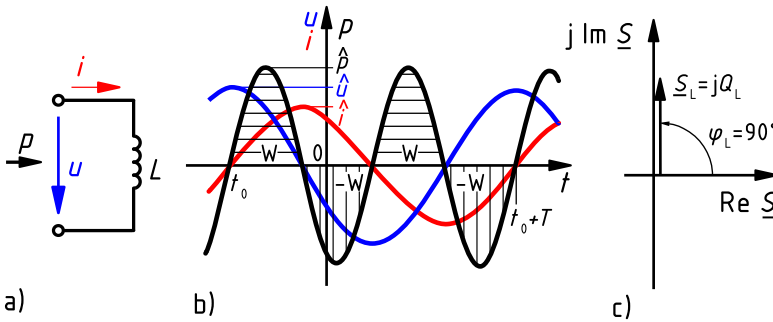


Bild 5.28: Induktivität L mit Verbraucher-Zählpeilsystem (a), Strom i , Spannung u und Augenblicksleistung p im Zeitdiagramm (b) und Leistungszeigerdiagramm (c)

Charakteristisch für jeden Blindwiderstand ist die Tatsache, dass der arithmetische Mittelwert der in ihm umgesetzten Augenblicksleistung $\bar{p} = 0$ ist.

Während der Viertelperioden, in denen (bei Anwendung des Verbraucher-Zählpeilsystems gemäß Bild 5.28a) Spannung u und Strom i dasselbe Vorzeichen haben, nimmt die Induktivität L (in Richtung des Zählpeils von p) Energie auf, wirkt also als *Verbraucher*. In dieser Zeit sinkt der Betrag der Spannung von \hat{u} auf null ab; der Betrag des Stroms steigt von null auf \hat{i} an, sodass am Ende einer solchen Viertelperiode nach Gl. (4.127) in der Induktivität L die Energie $W = 0,5 L \hat{i}^2$ gespeichert ist. Diese Energie entspricht einer der waagrecht schraffierten Flächen in Bild 5.28b.

Während der jeweils folgenden Viertelperiode gibt die Induktivität L bei betragsmäßig steigender Spannung u , aber sinkendem Strom i die gespeicherte Energie W (entsprechend einer der senkrecht schraffierten Flächen in Bild 5.28b) vollständig wieder ab, wirkt also als *Erzeuger*.

Die während einer Periode insgesamt in der Induktivität umgesetzte Energie ist somit null. An einer Induktivität tritt also keine Wirkleistung P auf.

Analog zu Gl. (5.173) wird die *induktive Blindleistung*

$$Q_L = \frac{1}{2} \omega L \hat{i}^2 = \omega L I^2 = X_L I^2 \quad (5.193)$$

eingeführt, die mit dem Scheitelwert \hat{p} der Augenblicksleistung nach Gl. (5.192) identisch ist.

Um Verwechslungen von Wirk- und Blindleistung zu vermeiden, ist für die Blindleistung Q die gesetzliche Einheit

$$[Q] = 1 \text{ var} \quad (5.194)$$

zu verwenden (Tabelle 1.2). Der Einheitenname Var ist aus „Volt-Ampere-reaktiv“ (reaktiv, weil an Reaktanzen auftretend) hervorgegangen. Keinesfalls soll für die Blindleistung die Einheit Watt verwendet werden.

In Bild 5.28c ist der komplexe Leistungszeiger \underline{S}_L dargestellt. Da $P = 0$ ist und nach Gl. (5.193) $Q_L > 0$ gilt, liegt er ebenso wie der Impedanzzeiger \underline{Z}_L auf der positiven imaginären Achse.

5.5.3 Kapazität

Die Eigenschaft eines *Kondensators* als Speicher für die Energie des elektrischen Feldes wird durch seine Kapazität C beschrieben, wie sie in Gl. (3.86) definiert ist. Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist diese Kapazität C , die man sich als einen *idealen Kondensator* vorstellen kann, bei dem nur der Einfluss des elektrischen Feldes zu berücksichtigen ist, während Leitungs- und dielektrische Verluste sowie die Wirkungen des magnetischen Feldes vernachlässigbar klein sind.

5.5.3.1 Spannung, Strom und Phasenverschiebungswinkel

In Bild 5.29a ist das Schaltzeichen für eine Kapazität C dargestellt; Strom- und Spannungszählpfeile sind im Verbraucher-Zählpfeilsystem eingetragen.

Hierfür gilt nach Gl. (3.92) der Zusammenhang

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (5.195)$$

bzw. (in symbolischer Schreibweise)

$$u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.196)$$

Gl. (5.195) ist eine *lineare Differenzialgleichung* erster Ordnung. Daher sind Kapazitäten *lineare* Zweipole.

Mit Gl. (5.58) folgt bei sinusförmiger Klemmenspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ aus Gl. (5.195) für den Klemmenstrom

$$i = C \frac{d}{dt} [\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)] = \omega C \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega C \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u + \pi/2) \quad (5.197)$$

der in Bild 5.29b dargestellte, ebenfalls sinusförmige Verlauf, der gegenüber der Spannung u um den Winkel $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$ voreilt. Die Amplitude des Stroms ist $\omega C \hat{u}$.

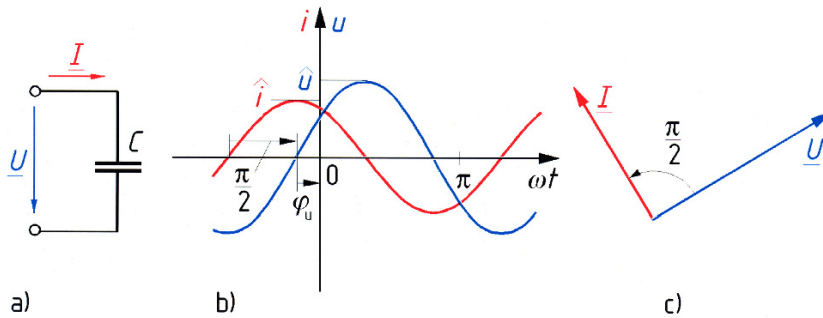


Bild 5.29: Spannung und Strom an der Kapazität C im Verbraucher-Zählpeilsystem (a), zugehöriges Zeitdiagramm (b) und (vergrößertes) Effektivwertzeigerdiagramm (c)

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man bei Anwendung der komplexen Rechnung, wenn man gemäß Tabelle 5.1 in Gl. (5.195) die Differenziation der Zeitfunktion u durch die Multiplikation der komplexen Spannung \underline{U} mit dem Faktor $j\omega$ ersetzt. Unter Beibehaltung der Multiplikation mit dem positiven reellen Faktor C ergibt sich der komplexe Strom

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}. \quad (5.198)$$

Man gewinnt also den Zeiger \underline{I} , indem man den Zeiger \underline{U} mit dem Faktor $j\omega C$ multipliziert. Außer der Multiplikation des Effektivwertes U mit ωC bedeutet dies, wie in Bild 5.29c dargestellt, eine Drehung des Zeigers $\omega C \underline{U}$ um $\pi/2 \hat{=} 90^\circ$. Die Auflösung von Gl. (5.198) nach der komplexen Spannung

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \quad (5.199)$$

zeigt, dass man den Zeiger \underline{U} erhält, indem man den Zeiger \underline{I} durch den Ausdruck $j\omega C$ dividiert. Außer der Division des Effektivwertes I durch ωC bedeutet dies in Übereinstimmung mit Bild 5.29c eine Drehung des Zeigers $\underline{I}/(\omega C)$ um den Winkel $-\pi/2 \hat{=} -90^\circ$.

5.5.3.2 Kapazitiver Blindwiderstand und Blindleitwert

Dividiert man Gl. (5.199) durch den komplexen Strom \underline{I} , erhält man für die Kapazität C unter Berücksichtigung von Gl. (5.95) die in Bild 5.30a dargestellte *Impedanz*

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = j \frac{-1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} \sim \frac{1}{\omega}. \quad (5.200)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.121) zeigt, ist der *Wirkwiderstand* $R_C = \operatorname{Re} \underline{Z}_C = 0$.

Für den *kapazitiven Blindwiderstand* gilt³

$$X_C = \operatorname{Im} \underline{Z}_C = \frac{-1}{\omega C} \sim \frac{1}{\omega}. \quad (5.201)$$

³Bedauerlicherweise wird der kapazitive Blindwiderstand auch heute noch in den meisten Schulbüchern falsch angegeben als $X_C = 1/(\omega C)$, obwohl er seit Jahrzehnten in der DIN anders definiert ist.

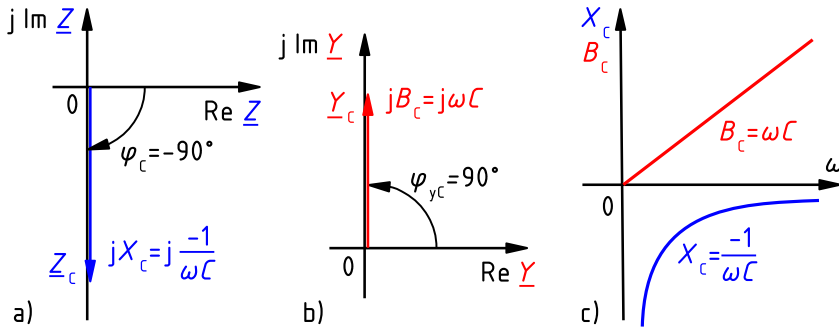


Bild 5.30: Impedanz- (a) und Admittanzzeigerdiagramm (b) einer Kapazität C sowie Frequenzgang (c) des kapazitiven Blindwiderstandes X_C und des kapazitiven Blindleitwertes B_C

Der *Scheinwiderstand* ist

$$Z_C = |\underline{Z}_C| = \frac{1}{\omega C} \sim \frac{1}{\omega}. \quad (5.202)$$

Das Argument der Impedanz ist der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_C = \arg \underline{Z}_C = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_C}{\operatorname{Re} \underline{Z}_C} = \arctan \frac{X_C}{R_C} = \arctan \frac{-\frac{1}{\omega C}}{0} = -90^\circ. \quad (5.203)$$

An Kapazitäten eilt der Strom also der Spannung um 90° vor. (Merksatz: „Am Kondensator eilt der Strom vor.“)

Dividiert man Gl. (5.198) durch die komplexe Spannung \underline{U} , erhält man für die Kapazität C die in Bild 5.30b dargestellte *Admittanz*

$$\underline{Y}_C = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = j\omega C = \omega C e^{j90^\circ} \sim \omega. \quad (5.204)$$

Wie der Vergleich mit Gl. (5.127) zeigt, ist der *Wirkleitwert* $G_C = \operatorname{Re} \underline{Y}_C = 0$. Der *kapazitive Blindleitwert* ist

$$B_C = \operatorname{Im} \underline{Y}_C = \omega C \sim \omega, \quad (5.205)$$

also der *negative* Kehrwert des Blindwiderstandes in Gl. (5.201).

Für den *Scheinleitwert* folgt

$$Y_C = |\underline{Y}_C| = \omega C \sim \omega, \quad (5.206)$$

also in Übereinstimmung mit Gl. (5.134) der Kehrwert des Scheinwiderstandes Z_C .

Das Argument der Admittanz ist

$$\varphi_{Y_C} = \arg \underline{Y}_C = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}_C}{\operatorname{Re} \underline{Y}_C} = \arctan \frac{B_C}{G_C} = \arctan \frac{\omega C}{0} = 90^\circ \quad (5.207)$$

und damit, wie in Gl. (5.135) allgemein formuliert, das Negative des Phasenverschiebungswinkels φ_C aus Gl. (5.203).

Kapazitiver Blindwiderstand X_C und kapazitiver Blindleitwert B_C hängen nach den Gln. (5.201) und (5.205) von der Kreisfrequenz ω ab. Beide Frequenzgänge sind in Bild 5.30c dargestellt.

Beispiel 5.6: Frequenzabhängigkeit des Einflusses einer parasitären Kapazität

Die in der Nachrichten- und Informationstechnik gebräuchlichen hohen Frequenzen erfordern meist eine Berücksichtigung der verhältnismäßig kleinen, durch die Geometrie der Leitungen und Bauelemente einer Schaltung bedingten parasitären Kapazitäten C , die niederohmige Blindwiderstände X_C zwischen zwei Schaltungsknoten darstellen.

In einer Schaltung wird bei der Frequenz $f = 1 \text{ MHz}$ und der Spannung $U = 600 \text{ mV}$ durch eine solche Kapazität C ein Strom $I = 0,3 \text{ mA}$ verursacht.

- a) Wie groß sind Blindleitwert B_C und parasitäre Kapazität C ?

Aus den Gln. (5.205) und (5.206) folgt

$$B_C = Y_C = \omega C = \frac{I}{U} = \frac{0,3 \text{ mA}}{600 \text{ mV}} = 0,5 \text{ mS}. \quad (5.208)$$

Hieraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{B_C}{\omega} = \frac{B_C}{2\pi f} = \frac{0,5 \text{ mS}}{2\pi \cdot 1 \text{ MHz}} = 79,6 \text{ pF}. \quad (5.209)$$

- b) Wie groß ist bei gleichbleibender Spannung U der Strom I' , wenn die Frequenz auf $f' = 20 \text{ MHz}$ erhöht wird?

Blindleitwert und Strom wachsen nach Gl. (5.206) proportional mit der Frequenz. Man erhält

$$I' = \frac{f'}{f} I = \frac{20 \text{ MHz}}{1 \text{ MHz}} \cdot 0,3 \text{ mA} = 6 \text{ mA}. \quad (5.210)$$

5.5.3.3 Kapazitive Blindleistung

Nach Gl. (5.143) und Gl. (5.195) gilt für die in einer Kapazität umgesetzte Augenblicksleistung

$$p = u i = u C \frac{du}{dt}. \quad (5.211)$$

Bei sinusförmigem Spannungsverlauf $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ folgt die Augenblicksleistung der in Bild 5.31b dargestellten Funktion

$$p = \omega C \hat{u}^2 \cos(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{2} \omega C \hat{u}^2 \sin[2(\omega t + \varphi_u)]. \quad (5.212)$$

Die hierin vorgenommene Umformung nach der Formel $\cos x \sin x = 0,5 \sin(2x)$ zeigt ebenso wie das Zeitdiagramm in Bild 5.31b, dass die Frequenz der Augenblicksleistung p doppelt so groß ist wie die Frequenz f von Spannung u und Strom i . Charakteristisch für einen Blindwiderstand ist die Tatsache, dass der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung $\bar{p} = 0$ ist.

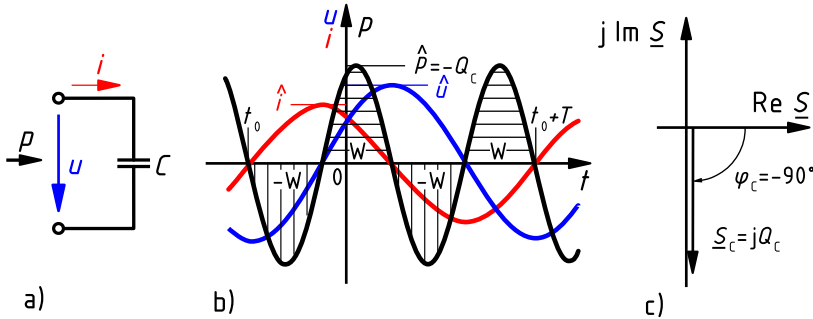


Bild 5.31: Kapazität C mit Verbraucher-Zählfeilsystem (a), Strom i , Spannung u und Augenblicksleistung p im Zeitdiagramm (b) und Leistungszeigerdiagramm (c)

Während der Viertelperioden, in denen (bei Anwendung des Verbraucher-Zählfeilsystems nach Bild 5.31a) Strom i und Spannung u dasselbe Vorzeichen haben, nimmt die Kapazität C (in Richtung des Zählpfeils von \hat{i}) Energie auf, wirkt also als *Verbraucher*. In dieser Zeit sinkt der Betrag des Stroms von \hat{i} auf null ab. Der Betrag der Spannung steigt von null auf \hat{u} an, sodass am Ende einer solchen Viertelperiode nach Gl. (3.98) in der Kapazität C die Energie $W = 0,5 C \hat{u}^2$ gespeichert ist. Diese Energie entspricht einer der waagrecht schraffierten Flächen in Bild 5.31b.

Während der jeweils folgenden Viertelperiode gibt die Kapazität C bei betragsmäßig steigendem Strom i , aber sinkender Spannung u die gespeicherte Energie W (entsprechend einer der senkrecht schraffierten Flächen in Bild 5.31b) vollständig wieder ab, wirkt also als *Erzeuger*.

Die während einer Periode insgesamt in der Kapazität umgesetzte Energie ist somit null. An einer Kapazität tritt also keine Wirkleistung P auf.

Wie in Gl. (5.193) für die Induktivität wird auch für die Kapazität eine *kapazitive Blindleistung*

$$Q_C = \frac{-1}{\omega C} I^2 = X_C I^2 \quad (5.213)$$

eingeführt. Wie der Vergleich mit Gl. (5.212) zeigt, ist sie das Negative des Scheitelwertes \hat{p} der Augenblicksleistung

$$-\hat{p} = -\frac{\omega C \hat{u}^2}{2} = -\omega C U^2 = -\omega C \left(\frac{I}{\omega C} \right)^2 = \frac{-1}{\omega C} I^2 = X_C I^2 = Q_C. \quad (5.214)$$

Für die Einheit Var der Blindleistung gelten die Erläuterungen zu Gl. (5.194).

Bild 5.31c zeigt den komplexen Leistungszeiger \underline{S}_C einer Kapazität C . Da $P = 0$ und $Q_C < 0$ ist, liegt er ebenso wie der Impedanzzeiger \underline{Z}_C auf der negativen imaginären Achse.

5.5.4 Gegenüberstellung der idealen passiven Zweipole

In den Abschnitten 5.5.1 bis 5.5.3 wird gezeigt, dass Ohmsche Widerstände R , Induktivitäten L und Kapazitäten C , an deren Klemmen jeweils eine Sinusspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ anliegt, von einem Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$ durchflossen werden. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Zweipole *linear* und *zeitinvariant* sind. Nichtlineare Wechselstromkreise werden in Abschnitt 9.2 behandelt.

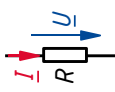

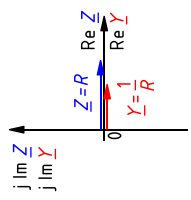
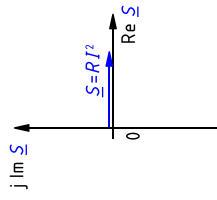
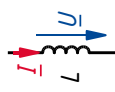
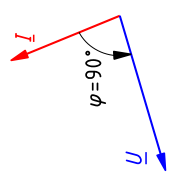
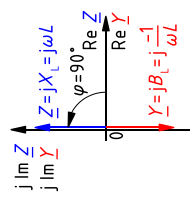
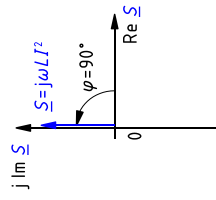
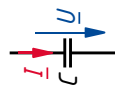
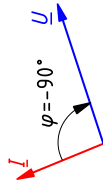
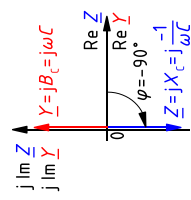
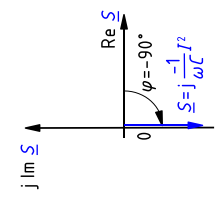
Da Strom und Spannung sinusförmig sind, können beide Größen nach Abschnitt 5.3.4.2 als Effektivwertzeiger \underline{I} bzw. \underline{U} dargestellt werden. In Tabelle 5.2 werden diese Effektivwertzeigerdiagramme sowie die Zeigerdiagramme für Impedanz \underline{Z} , Admittanz \underline{Y} und komplexe Leistung \underline{S} der drei passiven Grundzweipole einander gegenübergestellt.

Beim Widerstand R haben die Effektivwertzeiger \underline{I} und \underline{U} dieselbe Richtung und beschreiben so die Gleichphasigkeit von Strom und Spannung; der Phasenverschiebungswinkel ist $\varphi = 0$. Bei der Induktivität L und der Kapazität C stehen die Zeiger \underline{I} und \underline{U} senkrecht aufeinander. Im Fall der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus; bei der Kapazität eilt die Spannung dem Strom um 90° nach. Da der Phasenverschiebungswinkel φ stets vom Stromzeiger \underline{I} zum Spannungszeiger \underline{U} zu messen ist, erhält man für die Induktivität $\varphi = 90^\circ$ und für die Kapazität $\varphi = -90^\circ$.

Die Kapazität C ist der *duale Zweipol* zur Induktivität L (Tabelle 5.2). Dies zeigt sich z. B. in Bezug auf die Blindleistung Q : Wenn man eine Kapazität C in Reihe mit einer Induktivität L vom selben Sinusstrom i durchfließen lässt oder wenn man eine Kapazität C parallel zu einer Induktivität L an dieselbe Sinusspannung u legt, ergibt der Vergleich der Bilder 5.28b und 5.31b, dass die Kapazität C immer dann Energie aufnimmt, wenn die Induktivität L Energie abgibt, und umgekehrt. Die beiden Elemente L und C bilden dann einen *Schwingkreis* (Kapitel 7). Die *Gegenphasigkeit* der Augenblicksleistungen an Induktivität und Kapazität wird durch die unterschiedlichen Vorzeichen der Blindleistungen Q_L und Q_C ausgedrückt.

Die an sich willkürliche Vereinbarung, dass bei Vorliegen des Verbraucher-Zählpfeilsystems induktive Blindleistung Q_L nach Gl. (5.193) positiv, kapazitive Blindleistung Q_C nach Gl. (5.213) hingegen negativ gezählt wird, ist nach [dind] verbindlich festgelegt.

Tabelle 5.2: Verhalten der idealen passiven Grundzweipole in Sinusstrom-Netzwerken

Schaltzeichen	Zusammenhang zwischen Strom und Spannung Zeitfunktionen, komplexe Größen		Komplexer Widerstand und Leitwert komplexe Größen, Phasenwinkel		Zeigerdiagramme		Komplexe Leistung	
	Effektivwert- Zeigerdiagramme			Phasenwinkel	Zeigerdiagramme	Wirksamkeit, Blindleistung, Leistungsfaktor	Zeigerdiagramme	
 <p>Widerstand</p>	$u = Ri$ $i = \frac{1}{R} u$ $\underline{U} = R \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{1}{R} \cdot \underline{U}$		$\underline{Z} = R$ $\underline{Y} = \frac{1}{R}$ $\varphi = 0^\circ$		$P = RI^2$ $= \frac{1}{R} U^2$ $Q = 0$ $\cos \varphi = 1$			
 <p>Induktivität</p>	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$ $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$		$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$ $= j \frac{-1}{\omega L}$ $\varphi = 90^\circ$		$P = 0$ $Q = \omega L I^2$ $= \frac{1}{\omega L} U^2$ $\cos \varphi = 0$			
 <p>Kapazität</p>	$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$ $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$		$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ $= j \frac{-1}{\omega C}$ $\underline{Y} = j\omega C$ $\varphi = -90^\circ$		$P = 0$ $Q = -\frac{1}{\omega C} I^2$ $= -\omega C U^2$ $\cos \varphi = 0$			

5.6 Kirchhoffsche Gesetze

Die Kirchhoffschen Gesetze sind einfache Spezialfälle von allgemeiner gültigen Gesetzen (Kontinuitätsgleichung, Induktionsgesetz). Zur Analyse von Gleichstromnetzwerken, in denen alle Ströme und Spannungen zeitlich konstant sind, dürfen sie uneingeschränkt eingesetzt werden.

Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen in einer Schaltung führen dazu, dass der Raum, in dem sich die Schaltung befindet, von einem *zeitvarianten* magnetischen und elektrischen Feld erfüllt ist. In diesem Fall sind die Kirchhoffschen Gesetze *nicht* mehr gültig.

Sofern aber die *Wirkungen*, die dieses elektromagnetische Feld auf die einzelnen Teile der Schaltung ausübt, durch eine *Ersatzschaltung* aus konzentrierten Elementen mit idealisierten Eigenschaften hinreichend genau *nachgebildet* werden, dürfen zur Analyse dieses *Modells* wieder die Kirchhoffschen Gesetze verwendet werden.

Die nachfolgend dargestellten Schaltbilder sind daher als *Ersatzschaltbilder* aufzufassen, die das Ergebnis eines solchen Modellierungsprozesses sind, wie er in Beispiel 5.7 demonstriert wird. Sie enthalten die in Abschnitt 5.5 behandelten Grundzweipole.

5.6.1 Knotensatz

Wenn man die elektrische Stromdichte \vec{J} über die Oberfläche eines *abgeschlossenen* Volumens integriert, erhält man den durch diese Hüllfläche *austretenden* Strom

$$i(t) = \oint \vec{J} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} Q(t), \quad (5.215)$$

der nach der *Kontinuitätsgleichung* Gl. (3.14) gleich der zeitlichen *Abnahme* der in dem Volumen gespeicherten Ladung Q sein muss.

Für Gleichströme, also $i(t) = I = \text{const}$ gilt, da alle Ableitungen nach der Zeit null werden,

$$I = \oint \vec{J} d\vec{A} = 0. \quad (5.216)$$

Anderenfalls müsste nach Gl. (5.215) die Ladung im Volumen zeitlich *linear* ab- bzw. zunehmen, was nicht möglich ist, da sich im Volumen nur eine endliche Ladungsmenge befinden kann.

Für Gleichstrom führt Gl. (5.216) unmittelbar auf den Knotensatz Gl. (2.79), demzufolge die Summe der aus einem abgeschlossenen Volumen (z. B. einem Schaltungsknoten) herausfließenden Gleichströme (hineinfließende werden negativ gezählt) null ist.

Bei *zeitvarianten* Vorgängen ist es jedoch durchaus möglich, dass die Summe der aus einem Volumen austretenden Ströme *zeitweilig* von null verschiedene, positive oder negative Werte annimmt. Dies ist nach Gl. (5.215) gleichbedeutend mit einer *zeitweiligen* Ab- oder Zunahme der im Volumen vorhandenen Ladung. Nur wenn das betrachtete Volumen auf einen Punkt zusammenschrumpft, zu einem Gebiet also, in dem wegen seiner verschwindenden räumlichen Ausdehnung keine Ladung gespeichert werden kann, gilt auch für zeitvariante Vorgänge

$$i(t) = \oint \vec{J} d\vec{A} = 0. \quad (5.217)$$

Bei *Ersatzschaltbildern* für Sinusstromnetzwerke geht man wie bei den Gleichstromnetzwerken davon aus, dass die Verbindungsleitungen zwischen den konzentrierten Elementen *widerstandslos* sind (Abschnitt 1.3.8) und die Knoten keine räumliche Ausdehnung und damit auch *keine Ladungsspeicherfähigkeit* besitzen (Abschnitt 2.2.1.1). Für die Knoten derartiger Netzwerke folgt aus Gl. (5.217) in Analogie zu Gl. (2.79)

$$\sum_{\nu=1}^n i_{\nu}(t) = 0 \quad (5.218)$$

bzw. in Analogie zu Gl. (2.78)

$$\sum_{\mu=1}^p i_{zu,\mu}(t) = \sum_{\nu=1}^q i_{ab,\nu}(t) \quad (5.219)$$

und bei Anwendung der komplexen Rechnung

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{I}_{\nu} = 0 \quad (5.220)$$

bzw.

$$\sum_{\mu=1}^p \underline{I}_{zu,\mu} = \sum_{\nu=1}^q \underline{I}_{ab,\nu} \quad (5.221)$$

Falls die (tatsächlich immer vorhandene) Ladungsspeicherfähigkeit von Knoten realer Schaltungen einschließlich der direkt mit ihnen verbundenen Leitungsstücke nicht vernachlässigt werden kann, ist dies bei der Modellbildung durch eine oder mehrere *Kapazitäten* zu berücksichtigen.

5.6.2 Maschensatz

Wenn man die elektrische Feldstärke \vec{E} längs eines *geschlossenen* Weges integriert, erhält man nach dem *Induktionsgesetz* Gl. (4.93) die *Umlaufspannung*

$$u(t) = \oint \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi(t), \quad (5.222)$$

die bei rechtswendiger Zuordnung der Zählpfeile für Spannung und magnetischen Fluss Φ gleich der zeitlichen *Abnahme* des magnetischen Flusses ist, der die vom Integrationsweg umrandete Fläche durchsetzt. Ist innerhalb der Fläche *kein zeitvarianter magnetischer Fluss* vorhanden, wird die rechte Seite von Gl. (5.222) null, so dass auch die Umlaufspannung

$$U = \oint \vec{E} \, d\vec{l} = 0 \quad (5.223)$$

wird. Dieser Fall liegt in Gleichstromnetzwerken vor, in denen die fließenden Ströme nur *zeitlich konstante* Magnetfelder erzeugen und in denen keine zeitvarianten *äußeren* Magnetfelder auftreten dürfen. Gl. (5.223) ist der Maschensatz für Gleichstromnetzwerke.

Treten in einem Netzwerk *zeitvariante* Ströme auf, die in einer betrachteten Masche einen *zeitvarianten* magnetischen Fluss $\Phi(t)$ verursachen, muss man nach Gl. (5.222) davon ausgehen,

dass die Umlaufspannung $u(t) \neq 0$ ist. Für Sinusstromnetzwerke ist also die Anwendung des Maschensatzes nur zulässig, wenn man wie in Beispiel 5.7 in einer *Ersatzschaltung* die Wirkungen sowohl äußerer Magnetfelder als auch der Magnetfelder, die durch die Ströme in der Schaltung selbst erzeugt werden, durch konzentrierte Elemente modelliert (Spannungsquellen, Induktivitäten, Gegeninduktivitäten, vgl. Bild 5.32). Nur im Fall einer hinreichend genauen Modellierung dieser Induktionswirkungen darf auch für Sinusstromnetzwerke in Analogie zu Gl. (2.84)

$$\sum_{\nu=1}^n u_{\nu}(t) = 0 \quad (5.224)$$

angesetzt werden bzw. bei Anwendung der komplexen Rechnung

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{U}_{\nu} = 0. \quad (5.225)$$

Beispiel 5.7: Modell eines von einem zeitvarianten Magnetfeld durchsetzten Stromkreises

Für einen Stromkreis, der von einem zeitlich sinusförmig veränderlichen magnetischen Feld durchsetzt wird, soll ein Ersatzschaltbild aus konzentrierten Elementen erstellt werden. Hierzu soll vereinfachend angenommen werden, dass alle magnetischen Wirkungen des Stromkreises nach Bild 5.32a durch eine Spule mit N Windungen modelliert werden, die vom *fremderzeugten* magnetischen Wechselfluss $\Phi_1(t)$ vollständig durchsetzt wird. Die induzierte Summenspannung u (Zählpfeil dem des Flusses Φ_1 rechtswendig zugeordnet) bewirkt einen Sinusstrom i (Zählpfeil gleichsinnig mit dem von u), der seinerseits nach dem Durchflutungssatz Gl. (4.19) in der Spule einen zusätzlichen magnetischen Wechselfluss $\Phi_2(t)$ erzeugt (Zählpfeil dem des Stroms i rechtswendig zugeordnet). Der Wirkwiderstand der Spule sei R_{Sp} , ihre Selbstinduktivität habe den Wert L .

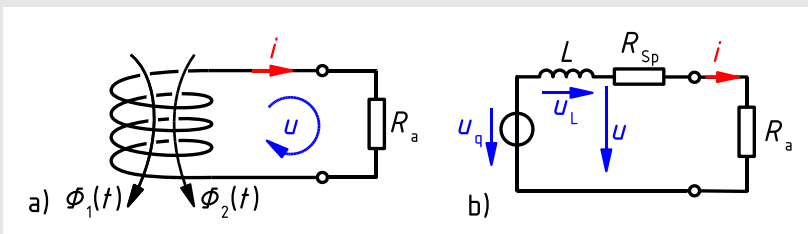


Bild 5.32: Von einem fremderzeugten Wechselfluss Φ_1 durchsetzte Spule mit induziertem Strom i und selbsterzeugtem Fluss Φ_2 (a) sowie Ersatzschaltung der Anordnung aus konzentrierten Elementen (b)

Aus dem Induktionsgesetz Gl. (5.222) folgt für die Umlaufspannung

$$u(t) = -N \frac{d}{dt} (\Phi_1(t) + \Phi_2(t)) = (R_{Sp} + R_a) i(t). \quad (5.226)$$

Sie fällt am Spulenwiderstand R_{Sp} und dem Abschlusswiderstand R_a ab und lässt sich

hinsichtlich ihres Zustandekommens in zwei Anteile u_q und u_L zerlegen. Die Spannung

$$u_q(t) = -N \frac{d}{dt} \Phi_1(t)$$

ist auf den fremderzeugten Fluss Φ_1 zurückzuführen und wirkt in dem Stromkreis wie eine Quellenspannung. Ihr Zählpfeil bildet zusammen mit dem Stromzählpfeil ein Erzeuger-Zählpfeilsystem. Der durch den Fluss Φ_2 erzeugten Spannung u_L wird in Bild 5.32b die entgegengesetzte Zählpfeilrichtung nach Art des Verbraucher-Zählpfeilsystems zugeordnet. Mit der hieraus resultierenden Vorzeichenumkehr und Gl. (4.108) erhält man

$$u_L(t) = +N \frac{d}{dt} \Phi_2(t) = L \frac{d}{dt} i(t).$$

Aus Gl. (5.226) folgt hiermit die Spannungsgleichung

$$u_q(t) - L \frac{d}{dt} i(t) = R_{Sp} i(t) + R_a i(t),$$

die auch die Maschengleichung für die Ersatzschaltung in Bild 5.32b darstellt und für Sinusgrößen in die komplexe Gleichung

$$\underline{U}_q = j\omega L \underline{I} + R_{Sp} \underline{I} + R_a \underline{I} \quad (5.227)$$

übergeht.

5.7 Reihen- und Parallelschaltung passiver Zweipole

Sinusstromnetzwerke lassen sich mit den in Kapitel 2 für Gleichstromnetzwerke beschriebenen Methoden berechnen, wenn man statt der Rechnung mit den Gleichgrößen I und U und den reellen Größen R und G die komplexe Rechnung mit den komplexen Größen \underline{I} , \underline{U} sowie \underline{Z} und \underline{Y} anwendet.

5.7.1 Reihenschaltung passiver Zweipole

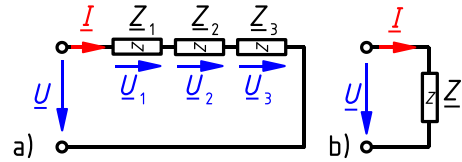
Da für Sinusstromnetzwerke der Maschensatz gilt, ergeben sich bei der Reihenschaltung von durch ihre Impedanz beschriebenen passiven Zweipolen analoge Zusammenhänge wie bei der in Abschnitt 2.2.4 beschriebenen Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen.

5.7.1.1 Gesamtimpedanz

Der Zweipol in Bild 5.33a besteht aus einer *Reihenschaltung* von beliebigen Impedanzen⁴ \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 . Für diesen Zweipol soll ein Ersatz-Zweipol mit der Impedanz \underline{Z} nach Bild 5.33b bestimmt werden, der *gleiches Klemmenverhalten* aufweist. Das heißt unter Berücksichtigung der Zählpfeile in Bild 5.33: Wird an die beiden Zweipole die gleiche Spannung \underline{U} gelegt, müssen durch sie die gleichen Ströme \underline{I} fließen.

⁴Als Schaltzeichen für allgemeine Impedanzen wird hier das um ein „Z“ erweiterte Schaltzeichen für Widerstände verwendet.

Bild 5.33: Reihenschaltung von drei Impedanzen \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 (a) sowie Impedanz \underline{Z} der Ersatzschaltung (b)



Für den Zweipol in Bild 5.33a gilt der Maschensatz

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3. \quad (5.228)$$

Die Teilspannungen \underline{U}_ν in Bild 5.33a und die Gesamtspannung \underline{U} in Bild 5.33b lassen sich als Produkte der jeweiligen Impedanzen \underline{Z}_ν bzw. \underline{Z} und des Stroms \underline{I} ausdrücken:

$$\underline{Z} \underline{I} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \underline{Z}_3 \underline{I} \quad (5.229)$$

Division von Gl. (5.229) durch den Strom \underline{I} ergibt die gesuchte Beziehung

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3. \quad (5.230)$$

Für die Reihenschaltung einer beliebigen Anzahl n von Impedanzen \underline{Z}_ν ist Gl. (5.230) in Analogie zu Gl. (2.111) verallgemeinerbar zu

$$\underline{Z} = \sum_{\nu=1}^n \underline{Z}_\nu = \sum_{\nu=1}^n (R_\nu + jX_\nu) = \sum_{\nu=1}^n R_\nu + j \sum_{\nu=1}^n X_\nu. \quad (5.231)$$

Bei einer Reihenschaltung von Impedanzen addieren sich die Einzelimpedanzen zur Gesamtimpedanz.

Wegen Ungleichung (5.105) ist der Gesamtscheinwiderstand Z von Reihenschaltungen im Allgemeinen *kleiner* als die Summe der Einzelscheinwiderstände Z_ν .

5.7.1.2 Spannungsteilerregel

In einer Reihenschaltung nach Bild 5.33a wird die Spannung \underline{U} in die Teilspannungen \underline{U}_ν aufgeteilt. Da in einer solchen Spannungsteilerschaltung alle Impedanzen \underline{Z}_ν vom selben Strom \underline{I} durchflossen werden, lassen sich die Teilspannungen und die Gesamtspannung als

$$\underline{U}_\nu = \underline{Z}_\nu \underline{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (5.232)$$

beschreiben. Hieraus folgt für das Verhältnis zweier Spannungen analog zu Gl. (2.115)

$$\frac{\underline{U}_\mu}{\underline{U}_\nu} = \frac{\underline{Z}_\mu}{\underline{Z}_\nu} \quad (5.233)$$

und speziell

$$\frac{\underline{U}_\nu}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_\nu}{\underline{Z}}. \quad (5.234)$$

Bei einer Reihenschaltung von Impedanzen verhalten sich die komplexen Teilspannungen zueinander wie die Impedanzen, über denen sie abfallen.

Durch Betragbildung gemäß Gl. (5.103) erhält man aus Gl. (5.233) bzw. (5.234)

$$\frac{U_\mu}{U_\nu} = \frac{Z_\mu}{Z_\nu} \quad (5.235)$$

bzw. speziell

$$\frac{U_\nu}{U} = \frac{Z_\nu}{Z}. \quad (5.236)$$

Bei einer Reihenschaltung von Impedanzen verhalten sich die Effektivwerte der Teilspannungen zueinander wie die Scheinwiderstände, über denen sie abfallen.

Beispiel 5.8: Reihenschaltung von Impedanzen

Die Impedanzen $\underline{Z}_1 = 100 \Omega e^{j32^\circ}$, $\underline{Z}_2 = 100 \Omega e^{-j47^\circ}$ und $\underline{Z}_3 = 100 \Omega e^{j63^\circ}$ liegen nach Bild 5.33a in Reihe an einer Sinusspannung mit dem Effektivwert $U = 100 \text{ V}$ und dem Nullphasenwinkel φ_u . Gesucht sind die Gesamtimpedanz \underline{Z} sowie Betrag und Phasenlage der Teilspannung \underline{U}_1 .

Mit Gl. (5.230) erhält man die Gesamtimpedanz

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 100 \Omega e^{j32^\circ} + 100 \Omega e^{-j47^\circ} + 100 \Omega e^{j63^\circ} = 210 \Omega e^{j19,2^\circ},$$

einfacher nachvollziehbar in der Komponentenform

$$\underline{Z} = (84,8 + j53,0) \Omega + (68,2 - j73,1) \Omega + (45,4 + j89,1) \Omega = (198,4 + j69,0) \Omega.$$

Aus der Spannungsteilerregel Gl. (5.233) folgt die Teilspannung

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}} U = \frac{100 \Omega e^{j32^\circ}}{210 \Omega e^{j19,2^\circ}} \cdot 100 \text{ V } e^{j\varphi_u} = 47,6 \text{ V } e^{j(\varphi_u + 12,8^\circ)} = U_1 e^{j\varphi_{u1}}.$$

Die Teilspannung \underline{U}_1 hat also den Effektivwert $U_1 = 47,6 \text{ V}$ und eilt der Gesamtspannung \underline{U} um $\varphi_{u1} - \varphi_u = 12,8^\circ$ voraus.

5.7.1.3 Reihenschaltungen der Grundzweipole

In diesem Abschnitt wird das Sinusstromverhalten von RL-, RC- und RLC-Reihenschaltungen untersucht. Für jeden Schaltungstyp werden die Beziehung zwischen den Klemmengrößen sowie Impedanz, Admittanz, komplexe Leistung und Leistungsfaktor berechnet und die zugehörigen Zeigerdiagramme dargestellt.

Die Schaltungen werden in Form von drei Beispielen behandelt, die von den Lernenden nach Möglichkeit selbst bearbeitet werden sollten, um Routine in der Anwendung der Gesetze und Rechenregeln zur Analyse von Sinusstromnetzwerken und dem Skizzieren qualitativer Zeigerdiagramme zu gewinnen. Da der Lösungsweg bei allen Beispielen prinzipiell identisch ist, wird er nur beim ersten Beispiel ausführlich dargestellt und diskutiert. Insbesondere das Ausprobieren verschiedener Wege zur Berechnung der komplexen Leistung kann die Sicherheit im Umgang mit den komplexen Größen der Sinusstromtechnik sehr fördern.

In allen Schaltungen wird das Verbraucher-Zählpeilsystem verwendet. Da in Reihenschaltungen alle Zweipole vom gleichen Strom durchflossen werden, ist bei den U-I-Zeigerdiagrammen stets der Stromzeiger der Bezugszeiger. Seine Lage wurde bewusst willkürlich gewählt.

Beispiel 5.9: Sinusstromverhalten von RL-Reihenschaltungen

Für die in Bild 5.34a dargestellte RL-Reihenschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Impedanz, Scheinwiderstand, Admittanz, Scheinleistungwert, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

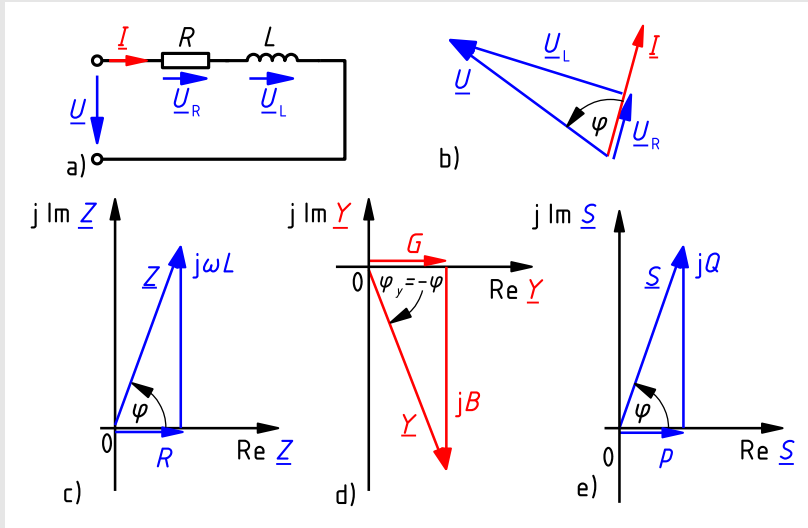


Bild 5.34: RL-Reihenschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Impedanz (c), die Admittanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Die Addition der komplexen Teilspannungen $\underline{U}_R = R\underline{I}$ und $\underline{U}_L = j\omega L\underline{I}$ nach den Gln. (5.161) und (5.177) ergibt die komplexe Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} = (R + j\omega L)\underline{I}, \quad (5.237)$$

die das Klemmenverhalten des Zweipols beschreibt. Das U-I-Zeigerdiagramm ist in Bild 5.34b dargestellt. Bezugszeiger in einer Reihenschaltung ist der Strom, dessen Lage wegen seines nicht vorgegebenen Nullphasenwinkels frei wählbar ist. Die Spannung \underline{U}_R über dem Widerstand ist gleichphasig zum Strom. Die Spannung \underline{U}_L über der Induktivität eilt dem Strom um 90° voraus.

Die Gesamtimpedanz ist die Summe der Einzelimpedanzen

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L = R + jX = Z e^{j\varphi}, \quad (5.238)$$

deren Zeigerdiagramm Bild 5.34c zeigt. Strom-Spannungs- und Impedanzzeigerdiagramm sind kongruent, da sie sich nur um den komplexen Proportionalitätsfaktor \underline{I} unterscheiden. Im Impedanzzeigerdiagramm liegt der Zeiger des Widerstandes R auf der positiven reellen

Achse, die daher eingezeichnet werden muss. Der Scheinwiderstand der Schaltung

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{Z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{Z})^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} > 0 \quad (5.239)$$

ist der Betrag ihrer Impedanz.

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen den Klemmengrößen stimmt immer mit dem Argument der Impedanz

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}}{\operatorname{Re} \underline{Z}} = \arctan \frac{\omega L}{R} > 0 \quad (5.240)$$

überein. Im U-I-Zeigerdiagramm wird dieser Winkel vom Strom- zum Spannungszeiger eingezeichnet, im Impedanzzeigerdiagramm von der reellen Achse zum Zeiger \underline{Z} .

Die Admittanz der Schaltung ist der Kehrwert der Impedanz, den man durch konjugiert komplexes Erweitern in Real- und Imaginärteil aufteilt:

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} \quad (5.241)$$

Wirkleitwert G und Blindleitwert B der Schaltung sind *nicht* die Kehrwerte ihres Wirkwiderstandes R bzw. ihres Blindwiderstandes X . In die Umrechnung zwischen diesen Größen gemäß Gl. (5.241) geht die Frequenz mit ein. Es ist also *nicht* möglich, das Klemmenverhalten dieser Schaltung durch eine Parallelschaltung aus einem *festen* Wirkleitwert G und einem *festen* Blindleitwert B für *beliebige* Frequenzen nachzubilden, sondern immer nur für eine bestimmte Frequenz.

Den Scheinleitwert kann man über den Kehrwert des Scheinwiderstandes nach Gl. (5.239) oder als Betrag der Admittanz Gl. (5.241) berechnen. Man erhält auf beiden Wegen das selbe Ergebnis, da Wurzelausdrücke im Nenner durch Erweitern entfernt werden sollten:

$$Y = \frac{1}{Z} = |\underline{Y}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} > 0 \quad (5.242)$$

Das Argument der Admittanz

$$\varphi_Y = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}}{\operatorname{Re} \underline{Y}} = \arctan \frac{-\omega L}{R} = -\arctan \frac{\omega L}{R} = -\varphi \quad (5.243)$$

folgt aus Gl. (5.241). Es hat wegen Gl. (5.78) stets den gleichen Betrag wie der Phasenverschiebungswinkel, aber das umgekehrte Vorzeichen. Bild 5.34d zeigt das Admittanzzeigerdiagramm der Schaltung.

Aus Gl. (5.152) folgt mit Gl. (5.86) die komplexe Leistung in der kartesischen Form

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (R \underline{I} + j\omega L \underline{I}) \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I}^2 = R \underline{I}^2 + j\omega L \underline{I}^2 = P + jQ \quad (5.244)$$

bzw. in der Exponentialform

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = Z I^2 e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I^2 e^{j\varphi}. \quad (5.245)$$

Das Argument von \underline{S} stimmt, wie man an Gl. (5.244) erkennt, mit dem Phasenverschiebungswinkel überein. Das Leistungszeigerdiagramm ist in Bild 5.34e dargestellt. Es ist zum Impedanzzeigerdiagramm kongruent, da sich beide nach Gl. (5.244) nur um den reellen Proportionalitätsfaktor I^2 unterscheiden.

Der Leistungsfaktor des Zweipols ist nach Gl. (5.158)

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (5.246)$$

Beispiel 5.10: Sinustromverhalten von RC-Reihenschaltungen

Für die in Bild 5.35a dargestellte RC-Reihenschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Impedanz, Scheinwiderstand, Admittanz, Scheinleitwert, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

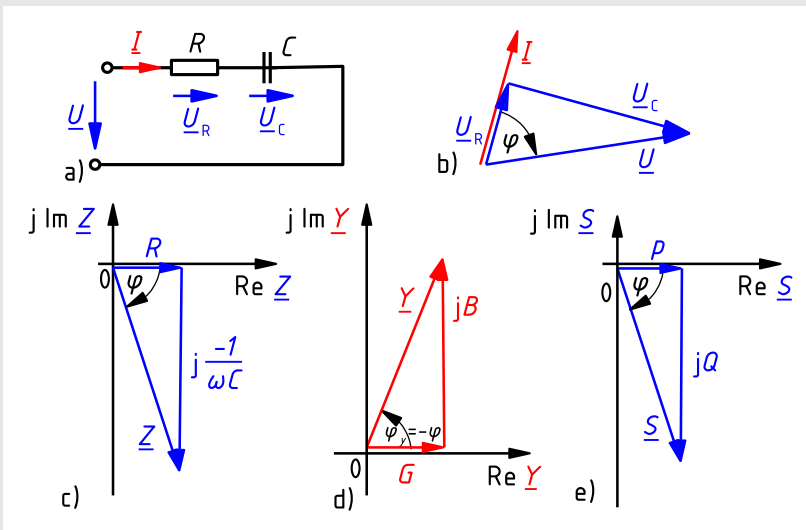


Bild 5.35: RC-Reihenschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Impedanz (c), die Admittanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Aus den Teilspannungen $\underline{U}_R = R \underline{I}$ und $\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$ folgt die Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}. \quad (5.247)$$

Das U-I-Zeigerdiagramm ist Bild 5.35b zu entnehmen.

Die Impedanz

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C} = R + j\frac{-1}{\omega C} = Z e^{j\varphi} \quad (5.248)$$

ist in Bild 5.35c als Zeigerdiagramm dargestellt. Der Scheinwiderstand beträgt

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad (5.249)$$

und der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan \frac{-1}{\omega C R} = -\arctan \frac{1}{\omega C R} < 0. \quad (5.250)$$

Die Admittanz des Zweipols, deren Zeigerdiagramm Bild 5.35d zeigt, ist

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\frac{-1}{\omega C}} = \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}. \quad (5.251)$$

Aus Gl. (5.152) folgt die komplexe Leistung in kartesischer Form

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \left(R \underline{I} + j\frac{-1}{\omega C} \underline{I} \right) \underline{I}^* = R I^2 + j\frac{-1}{\omega C} I^2 \quad (5.252)$$

bzw. in Exponentialform

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} I^2 e^{j\varphi}, \quad (5.253)$$

deren Zeigerdiagramm in Bild 5.35e dargestellt ist, sowie der Leistungsfaktor

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}. \quad (5.254)$$

Beispiel 5.11: Sinusstromverhalten von RLC-Reihenschaltungen

Für die in Bild 5.36a dargestellte RLC-Reihenschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Impedanz, Scheinwiderstand, Admittanz, Scheinleitwert, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

Aus den Teilspannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C nach den Gln. (5.161), (5.177) und (5.199) ergibt sich die Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}. \quad (5.255)$$

Das U-I-Zeigerdiagramm zeigt Bild 5.36b.

Das Zeigerdiagramm der Impedanz

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z e^{j\varphi} \quad (5.256)$$

ist in Bild 5.36c dargestellt.

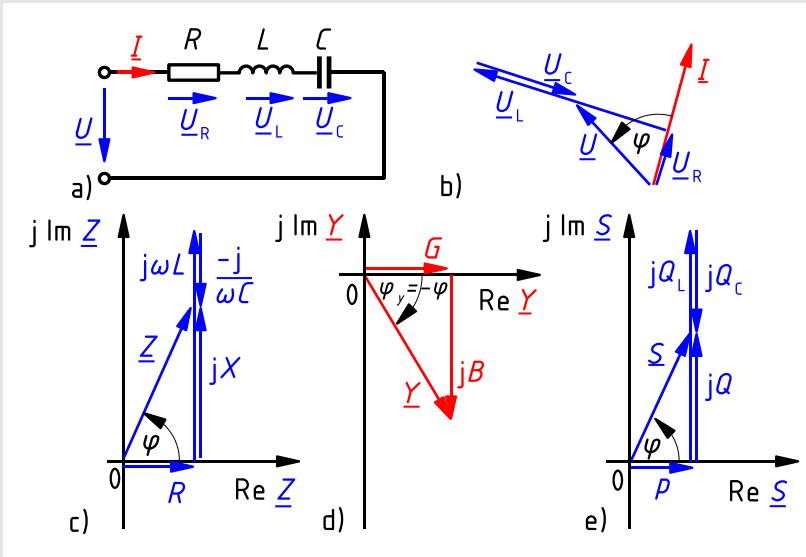


Bild 5.36: RLC-Reihenschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Impedanz (c), die Admittanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Der Scheinwiderstand beträgt

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (5.257)$$

und der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (5.258)$$

Je nach Dimensionierung der Schaltung und der Kreisfrequenz der Klemmengrößen kann der Phasenverschiebungswinkel der Schaltung positiv, null oder negativ sein.

Für die Admittanz, deren Zeigerdiagramm Bild 5.36d zeigt, erhält man

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + j \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (5.259)$$

Die komplexe Leistung setzt sich bei dieser Schaltung gemäß

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = (R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})) \underline{I} \underline{I}^* = R I^2 + j(\omega L I^2 - \frac{1}{\omega C} I^2) \\ &= P + j(Q_L + Q_C)\end{aligned}\quad (5.260)$$

aus Wirkleistung P , induktiver Blindleistung Q_L und kapazitiver Blindleistung Q_C zusammen. Bild 5.36e zeigt das Leistungszeigerdiagramm. Der Leistungsfaktor der Schaltung ist

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (5.261)$$

Aus Bild 5.36b, c und e ersieht man, dass sich die induktiven und die kapazitiven Anteile bei Spannung, Impedanz und komplexer Leistung teilweise kompensieren. *Die induktive und die kapazitive Teilspannung können daher jeweils größer sein als die Gesamtspannung.*

Im Fall $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ überwiegt der induktive Blindwiderstand; die Schaltung verhält sich dann *ohmsch-induktiv* und der Phasenverschiebungswinkel φ ist positiv wie in Bild 5.36.

Wenn hingegen $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ ist, liegt *ohmsch-kapazitives* Verhalten mit negativem Phasenverschiebungswinkel φ vor.

Für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ verhält sich die Schaltung rein ohmsch mit dem Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 0$, der Spannung $\underline{U} = \underline{U}_R$, der Impedanz $\underline{Z} = R$ und der Leistung $\underline{S} = P$.

Das frequenzabhängige Verhalten dieser Schaltung, die einen elementaren Reihenschwingkreis darstellt, wird in Abschnitt 7.2.2 genauer untersucht.

Beispiel 5.12: Gleicher Scheinwiderstand einer RLC-Reihenschaltung bei verschiedenen Frequenzen

Die Reihenschaltung von Wirkwiderstand $R = 100 \Omega$, Induktivität $L = 250 \text{ mH}$ und Kapazität $C = 15 \mu\text{F}$ liegt gemäß Bild 5.36a an einer Sinusspannung mit $U = 36 \text{ V}$.

Bei welchen Kreisfrequenzen fließt durch die Schaltung der Strom $I = 0,2 \text{ A}$?

Der Scheinwiderstand $Z = U/I = 36 \text{ V}/0,2 \text{ A} = 180 \Omega$ kann nach Bild 5.37 sowohl im ohmsch-kapazitiven als auch im ohmsch-induktiven Bereich auftreten.

Für den Blindwiderstand gilt nach Gl. (5.124)

$$X = \pm \sqrt{Z^2 - R^2} = \pm \sqrt{180^2 - 100^2} \Omega = \pm 149,7 \Omega$$

sowie nach Gl. (5.256)

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Daraus folgt für die gesuchten Kreisfrequenzen die quadratische Gleichung

$$\omega^2 - \frac{X}{L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

mit der Lösung

$$\omega = \frac{X}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{X}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

in der das negative Vorzeichen ausgeschlossen wird, da negative Kreisfrequenzen physikalisch nicht sinnvoll sind.

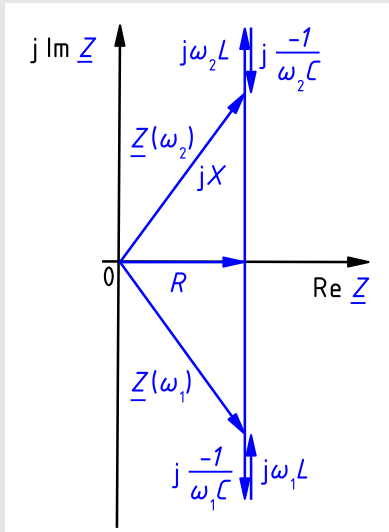


Bild 5.37: Gleiche Scheinwiderstände Z einer RLC-Reihenschaltung bei verschiedenen Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2

Mit $X = \pm 149,7 \Omega$ und den gegebenen Werten erhält man die beiden Kreisfrequenzen

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{149,7 \Omega}{2 \cdot 0,25 \text{ H}} + \sqrt{\left(\frac{149,7 \Omega}{2 \cdot 0,25 \text{ H}}\right)^2 + \frac{1}{0,25 \text{ H} \cdot 15 \mu\text{F}}},$$

also

$$\omega_1 = 298 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \omega_2 = 896 \text{ s}^{-1}.$$

5.7.2 Parallelschaltung passiver Zweipole

Da für Sinusstromnetzwerke der Knotensatz gilt, ergeben sich bei der Parallelschaltung von Impedanzen bzw. Admittanzen analoge Zusammenhänge wie bei der in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Parallelschaltung von Gleichstromwiderständen bzw. -leitwerten.

5.7.2.1 Gesamtadmittanz

Der Zweipol in Bild 5.38a besteht aus einer *Parallelschaltung* beliebiger Admittanzen⁵ $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ und $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$. Für diesen Zweipol soll ein Ersatz-Zweipol mit der Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ nach Bild 5.38b bestimmt werden, der *gleiches Klemmenverhalten* aufweist.

⁵Aus didaktischen Gründen wird hier, wie auch in anderen Standardwerken ([CHSW11], [KMR08], [Lun91], [Phi00], [Sim89]) üblich, mit Admittanzen argumentiert, für die das gleiche Schaltsymbol verwendet wird wie für Impedanzen. Dies entspricht dem Vorgehen bei den Gleichstromnetzwerken, wo je nach Zweckmäßigkeit mit Widerständen oder Leitwerten gearbeitet und für beide das gleiche Schaltsymbol verwendet wird.

Das heißt unter Berücksichtigung der Zählpfeile in Bild 5.38: Wird an die beiden Zweipole die gleiche Spannung \underline{U} gelegt, müssen durch sie die gleichen Ströme \underline{I} fließen.

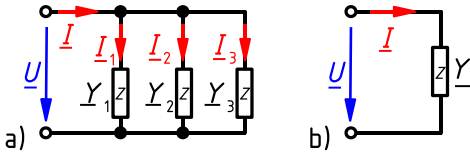


Bild 5.38: Parallelschaltung (a) von drei Admittanzen \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 und \underline{Y}_3 sowie Gesamtadmittanz \underline{Y} der Ersatzschaltung (b)

Der Knotensatz liefert für die Schaltung in Bild 5.38a

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \quad (5.262)$$

Die Teilströme \underline{I}_ν in Bild 5.38a und der Gesamtstrom \underline{I} in Bild 5.38b lassen sich als Produkte der jeweiligen Admittanzen \underline{Y}_ν bzw. \underline{Y} und der Spannung \underline{U} ausdrücken:

$$\underline{Y} \underline{U} = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} + \underline{Y}_3 \underline{U} \quad (5.263)$$

Division von Gl. (5.263) durch die Spannung \underline{U} ergibt die gesuchte Beziehung

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3. \quad (5.264)$$

Für die Parallelschaltung einer beliebigen Anzahl n von Admittanzen \underline{Y}_ν darf Gl. (5.264) in Analogie zu Gl. (2.93) verallgemeinert werden zu

$$\underline{Y} = \sum_{\nu=1}^n \underline{Y}_\nu = \sum_{\nu=1}^n (G_\nu + jB_\nu) = \sum_{\nu=1}^n G_\nu + j \sum_{\nu=1}^n B_\nu. \quad (5.265)$$

Bei Parallelschaltungen von Admittanzen addieren sich die Einzeladmittanzen zur Gesamtadmittanz.

Wegen Ungleichung (5.105) ist der Gesamtscheinleitwert Y von Parallelschaltungen im Allgemeinen *kleiner* als die Summe der Einzelscheinleitwerte Y_ν .

Setzt man für die Admittanzen die entsprechenden Impedanzen ein, folgt aus Gl. (5.265) analog zu Gl. (2.95)

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_\nu} \quad (5.266)$$

und speziell für die Parallelschaltung von zwei Impedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 analog zu Gl. (2.100)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (5.267)$$

Beispiel 5.13: Strom durch eine Parallelschaltung mehrerer Impedanzen

Durch vier parallel geschaltete Impedanzen fließen beim Anlegen einer Sinusspannung folgende Ströme: $I_1 = 0,4 \text{ A}$ bei $\cos \varphi_1 = 0,2$ induktiv, $I_2 = 0,8 \text{ A}$ bei $\cos \varphi_2 = 1$, $I_3 = 0,7 \text{ A}$ bei $\cos \varphi_3 = 0,7$ induktiv und $I_4 = 0,6 \text{ A}$ bei $\cos \varphi_4 = 0,5$ kapazitiv.

Der Betrag des Gesamtstroms I und der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ der Schaltung sollen berechnet werden.

Da nichts anderes vorgegeben ist, wird zweckmäßigerweise für die Spannung der Nullphasenwinkel $\varphi_u = 0$ gewählt (Bild 5.39).

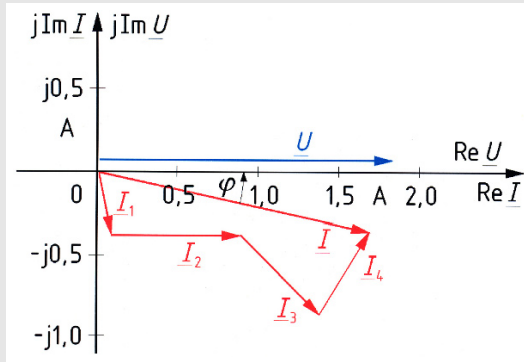


Bild 5.39: Addition von vier komplexen Strömen nach Beispiel 5.13

Für die Nullphasenwinkel der Ströme folgt dann aus Gl. (5.119)

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi = -\varphi$$

mit $\varphi > 0$ für ohmsch-induktive und $\varphi < 0$ für ohmsch-kapazitive Zweipole.

Man erhält, wie Bild 5.39 zeigt, aus der Summe der Ströme $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4$ den komplexen Gesamtstrom

$$\underline{I} = 0,4 \text{ A } e^{-j78,46^\circ} + 0,8 \text{ A } e^{j0^\circ} + 0,7 \text{ A } e^{-j45,57^\circ} + 0,6 \text{ A } e^{j60^\circ} = 1,71 \text{ A } e^{-j12,6^\circ}$$

mit dem gesuchten Betrag

$$I = 1,71 \text{ A}$$

und den Leistungsfaktor der Parallelschaltung

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi_i) = \cos 12,56^\circ = 0,976.$$

5.7.2.2 Stromteilerregel

In einer Parallelschaltung nach Bild 5.38a wird der Strom \underline{I} in die Teilströme \underline{I}_ν aufgeteilt. Da in einer solchen Stromteilerschaltung alle Admittanzen $\underline{Y}_\nu = 1/\underline{Z}_\nu$ an derselben Spannung \underline{U} liegen, lassen sich die Teilströme bzw. der Gesamtstrom als

$$\underline{I}_\nu = \underline{Y}_\nu \underline{U} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad (5.268)$$

beschreiben. Hieraus folgt für das Verhältnis zweier Ströme analog zu Gl. (2.103)

$$\frac{\underline{I}_\mu}{\underline{I}_\nu} = \frac{\underline{Y}_\mu}{\underline{Y}_\nu} = \frac{\underline{Z}_\nu}{\underline{Z}_\mu} \quad (5.269)$$

bzw. speziell analog zu Gl. (2.104)

$$\frac{\underline{I}_\nu}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_\nu}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_\nu}. \quad (5.270)$$

Bei einer Parallelschaltung von Admittanzen verhalten sich die komplexen Teilströme zueinander wie die Admittanzen, durch die sie fließen.

Für den häufig auftretenden Spezialfall der Parallelschaltung von zwei Impedanzen $\underline{Z}_1 = 1/\underline{Y}_1$ und $\underline{Z}_2 = 1/\underline{Y}_2$ gilt speziell in Analogie zu Gl. (2.105)

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1}, \quad (5.271)$$

woraus mit Gl. (5.267) die zu Gl. (2.106) analoge Beziehung

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (5.272)$$

folgt. (Eine entsprechende Gleichung für das Verhältnis $\underline{I}_2/\underline{I}$ ergibt sich aus Gl. (5.272) durch Vertauschung der Indizes 1 und 2.)

Bei einer Parallelschaltung von zwei Impedanzen verhält sich ein komplexer Teilstrom zum komplexen Gesamtstrom wie die Impedanz des anderen Zweiges zur Summe der Impedanzen beider Zweige.

Durch Betragsbildung gemäß Gl. (5.103) erhält man aus den Gln. (5.269) bzw. (5.270)

$$\frac{I_\mu}{I_\nu} = \frac{Y_\mu}{Y_\nu} = \frac{Z_\nu}{Z_\mu} \quad (5.273)$$

bzw. speziell

$$\frac{I_\nu}{\underline{I}} = \frac{Y_\nu}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Z}}{Z_\nu}. \quad (5.274)$$

Bei einer Parallelschaltung von Admittanzen verhalten sich die Effektivwerte der Teilströme zueinander wie die Scheinleitwerte, durch die sie fließen.

5.7.2.3 Parallelschaltungen der Grundzweipole

In diesem Abschnitt wird das Sinusstromverhalten von GC-, GL- und GCL-Parallelschaltungen untersucht. Für jeden Schaltungstyp werden die Beziehung zwischen den Klemmengrößen sowie Impedanz, Admittanz, komplexe Leistung und Leistungsfaktor berechnet und die zugehörigen Zeigerdiagramme dargestellt.

Die Schaltungen werden wie in Abschnitt 5.7.1.3 in Form von drei Beispielen behandelt. Da der Lösungsweg bei allen Beispielen prinzipiell identisch ist, wird er nur beim ersten Beispiel ausführlich dargestellt und diskutiert.

In allen Schaltungen wird das Verbraucher-Zählpfeilsystem verwendet. Da in Parallelschaltungen alle Zweipole an der gleichen Spannung liegen, ist bei den U-I-Zeigerdiagrammen stets der Spannungszeiger der Bezugszeiger. Seine Lage wurde bewusst willkürlich gewählt.

Beispiel 5.14: Sinusstromverhalten von GC-Parallelschaltungen

Für die in Bild 5.40a dargestellte GC-Parallelschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Admittanz, Scheinleitwert, Impedanz, Scheinwiderstand, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

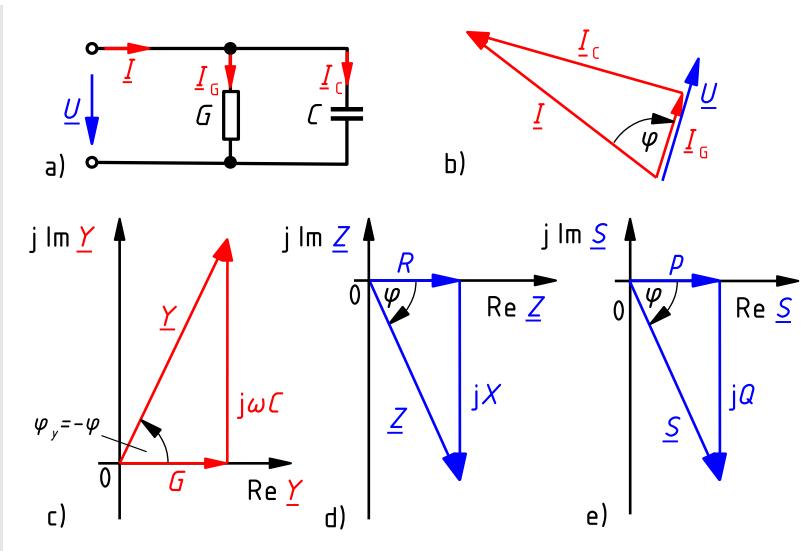


Bild 5.40: GC-Parallelschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Admittanz (c), die Impedanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Aus den Gln. (5.162) und (5.167) sowie Gl. (5.198) folgen die Teilströme $\underline{I}_G = G\underline{U}$ und $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$ durch die beiden parallelen Zweige, deren Summe nach Gl. (5.220) den Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = G\underline{U} + j\omega C\underline{U} = (G + j\omega C)\underline{U} \quad (5.275)$$

ergibt. Bild 5.40b zeigt das U-I-Zeigerdiagramm. Bezugszeiger ist die den beiden Zweigen gemeinsame Spannung \underline{U} . Die Lage dieses Zeigers ist wegen seines nicht bekannten Nullphasenwinkels frei wählbar. Der Strom \underline{I}_G durch den Wirkleitwert ist gleichphasig mit der Klemmenspannung, der Strom \underline{I}_C durch die Kapazität eilt der Klemmenspannung um 90° voraus.

Die Admittanz ist die Summe der Einzeladmittanzen

$$\underline{Y} = \underline{Y}_G + \underline{Y}_C = G + j\omega C = Y e^{j\varphi_Y}. \quad (5.276)$$

Das in Bild 5.40c dargestellte Admittanzzeigerdiagramm ist zum U-I-Zeigerdiagramm kongruent, da sich beide nur um den komplexen Proportionalitätsfaktor \underline{U} unterscheiden.

Der Betrag der Admittanz ist der Scheinleitwert

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \quad (5.277)$$

ihr Argument

$$\varphi_Y = \text{Arctan} \frac{B}{G} = \text{Arctan} \frac{\omega C}{G} > 0.$$

Die Impedanz ist der Kehrwert der Admittanz

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + j\omega C} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2}}_R + j \underbrace{\frac{-\omega C}{G^2 + \omega^2 C^2}}_X = \frac{1}{Y} e^{-j\varphi_Y}. \quad (5.278)$$

Die Ersatzgrößen R und X sind offensichtlich sogar bei festen Werten G und C frequenzabhängig!

Das Argument der Impedanz ist der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \text{Arctan} \frac{X}{R} = \text{Arctan} \frac{-\omega C}{G} = -\text{Arctan} \frac{\omega C}{G} = -\varphi_Y < 0, \quad (5.279)$$

der bis auf das umgekehrte Vorzeichen mit dem Argument der Admittanz übereinstimmt. Das Impedanzzeigerdiagramm ist in Bild 5.40d dargestellt.

Aus Gl. (5.152) folgt mit Gl. (5.275) die komplexe Leistung in kartesischer Form

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} \underline{U}^* \underline{Y}^* = \underline{Y}^* \underline{U}^2 = \underline{U} (G \underline{U} + j\omega C \underline{U})^* = G \underline{U}^2 - j\omega C \underline{U}^2 = P + jQ \quad (5.280)$$

bzw. in Exponentialform

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} \underline{U}^2 e^{j\varphi}. \quad (5.281)$$

Das Leistungszeigerdiagramm in Bild 5.40e ist kongruent zum Impedanzzeigerdiagramm in Bild 5.40d, da $\underline{S} = \underline{Z} \underline{I}^2$ mit \underline{Z} aus Gl. (5.278) und \underline{I} nach Gl. (5.275) gilt.

Der Leistungsfaktor des Zweipols ist

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}}. \quad (5.282)$$

Beispiel 5.15: Impedanz und Leistungsumsatz einer GC-Parallelschaltung

Der Ohmsche Widerstand $R_1 = 170 \Omega$ und die Kapazität $C_2 = 25 \mu\text{F}$ liegen gemäß Bild 5.40a parallel an einer Sinusspannung mit $U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

Gesucht sind die Impedanz \underline{Z} der Schaltung und die umgesetzte komplexe Leistung \underline{S} .

Nach Gl. (5.276) hat die Schaltung mit $G_1 = 1/R_1$ die Admittanz

$$\underline{Y} = G_1 + j\omega C_2 = \frac{1}{170 \Omega} + j 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 25 \mu\text{F} = (5,882 + j 7,854) \text{ mS}.$$

Hieraus folgt durch Kehrwertbildung die Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = (61,1 - j 81,6) \Omega.$$

Der Wirkwiderstand der Schaltung beträgt $R = 61,1 \Omega$ und stimmt nicht mit dem Ohmschen Widerstand $R_1 = 170 \Omega$ überein. Auch der Blindwiderstand $X = -81,6 \Omega$ der Schaltung ist nicht mit dem Blindwiderstand der Kapazität $X_2 = -1/(\omega C) = -127 \Omega$ identisch.

Mit Gl. (5.280) erhält man die komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{Y}^* \underline{U}^2 = \frac{1}{R_1} U^2 - j \omega C_2 U^2 = 311 \text{ W} - j 416 \text{ var} .$$

An der Schaltung wird Verbraucher-Zählpeilsystem verwendet. Da die berechnete Wirkleistung einen positiven Zahlenwert hat, nimmt der Zweipol Wirkleistung auf. Da der Zahlenwert der Blindleistung negativ ist, gibt die Schaltung Blindleistung ab. Insgesamt wirkt sie also, wie nicht anders zu erwarten, ohmsch-kapazitiv.

Beispiel 5.16: Sinusstromverhalten von GL-Parallelschaltungen

Für die in Bild 5.41a dargestellte GL-Parallelschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Admittanz, Scheinleitwert, Impedanz, Scheinwiderstand, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

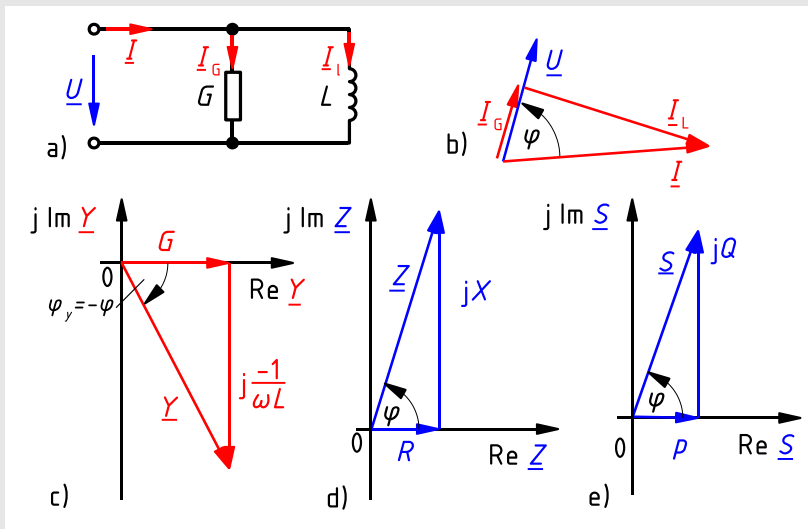


Bild 5.41: GL-Parallelschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Admittanz (c), die Impedanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Die Summe der Teilströme $\underline{I}_G = G \underline{U}$ und $\underline{I}_L = \frac{1}{j \omega L} \underline{U}$ ist der Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L = G \underline{U} + \frac{1}{j \omega L} \underline{U} . \quad (5.283)$$

Das U-I-Zeigerdiagramm ist Bild 5.41b zu entnehmen. Bild 5.41c zeigt das Zeigerdiagramm der Admittanz

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j \frac{-1}{\omega L} = Y e^{j\varphi_Y} . \quad (5.284)$$

Der Scheinleitwert ist

$$Y = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + \frac{1}{(\omega L)^2}} \quad (5.285)$$

und das Argument der Admittanz

$$\varphi_Y = \arctan \frac{B}{G} = \arctan \frac{-1}{\omega L G} = -\arctan \frac{1}{\omega L G} < 0. \quad (5.286)$$

Mit Gl. (5.135) folgt hieraus der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = -\varphi_Y = \text{Arctan} \frac{1}{\omega L G} > 0. \quad (5.287)$$

Für die Impedanz (Bild 5.41d) erhält man

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + j\frac{-1}{\omega L}} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}}}_R + j \underbrace{\frac{\frac{1}{\omega L}}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}}}_X = \frac{1}{Y} e^{-j\varphi_Y}. \quad (5.288)$$

Die in Bild 5.41e dargestellte komplexe Leistung lautet in kartesischer Form

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Y}^* U^2 = G U^2 + j \frac{1}{\omega L} U^2 = P + jQ \quad (5.289)$$

bzw. wegen $\underline{Y}^* = Y e^{-j\varphi_Y} = Y e^{j\varphi}$ mit Gl. (5.285) in der Exponentialform

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = \underline{Y}^* U^2 = \sqrt{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}} U^2 e^{j\varphi}. \quad (5.290)$$

Der Leistungsfaktor des Zweipols ist

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}}}. \quad (5.291)$$

Beispiel 5.17: Sinusstromverhalten von GCL-Parallelschaltungen

Für die in Bild 5.42a dargestellte GCL-Parallelschaltung sind mittels der komplexen Rechnung das Klemmenverhalten sowie Admittanz, Scheinleitwert, Impedanz, Scheinwiderstand, komplexe Leistung und Leistungsfaktor zu berechnen und mittels Zeigerdiagrammen darzustellen.

Die Teilströme \underline{I}_G , \underline{I}_C und \underline{I}_L nach den Gln. (5.162), (5.167), (5.198) und (5.178) ergeben den in Bild 5.42b dargestellten Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C + \underline{I}_L = G \underline{U} + j \omega C \underline{U} + \frac{1}{j \omega L} \underline{U} = \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \underline{U}. \quad (5.292)$$

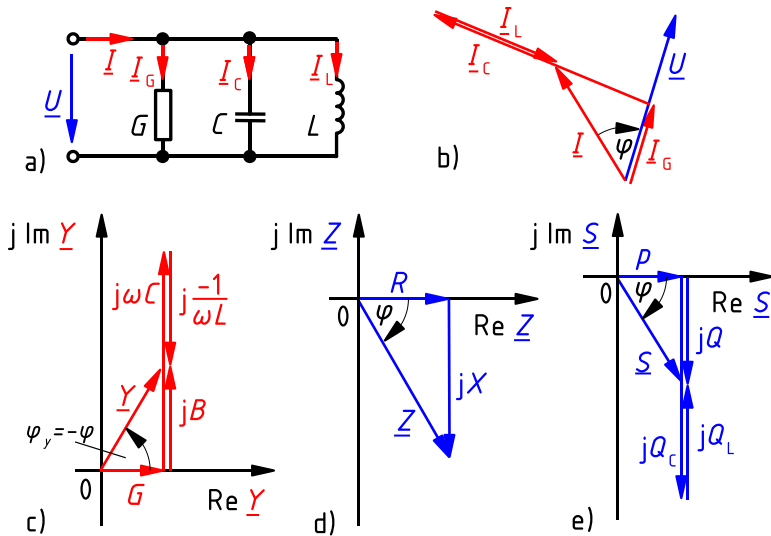


Bild 5.42: GCL-Parallelschaltung (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und den Zeigerdiagrammen für die Admittanz (c), die Impedanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Die Admittanz (Bild 5.42c) des Zweipols ist

$$\underline{Y} = G + jB = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y e^{j\varphi_Y}, \quad (5.293)$$

der Scheinleitwert

$$Y = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (5.294)$$

und das Argument der Admittanz

$$\varphi_Y = \text{Arctan} \frac{B}{G} = \text{Arctan} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \quad (5.295)$$

Hieraus folgt mit Gl. (5.66) der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = -\varphi_Y = \text{Arctan} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}. \quad (5.296)$$

Für die Impedanz (Bild 5.42d) erhält man

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}_R + j \underbrace{\frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}_X. \quad (5.297)$$

Die komplexe Leistung setzt sich gemäß Bild 5.42e aus Wirkleistung P , induktiver Blindleistung Q_L und kapazitiver Blindleistung Q_C zusammen gemäß

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Y}^* U^2 = G U^2 + j \left(\frac{1}{\omega L} U^2 - \omega C U^2 \right) = P + j(Q_L + Q_C). \quad (5.298)$$

Hieraus folgt der Leistungsfaktor der Schaltung

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}}. \quad (5.299)$$

Aus Bild 5.42b, c und e ist zu entnehmen, dass sich die induktiven und die kapazitiven Anteile bei Strom, Admittanz und Leistung teilweise kompensieren. *Der induktive und der kapazitive Teilstrom können daher größer sein als der Gesamtstrom.*

Im Fall $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ überwiegt der kapazitive Blindleitwert; die Schaltung verhält sich dann *ohmsch-kapazitiv* und der Phasenverschiebungswinkel φ ist negativ wie in Bild 5.42.

Wenn hingegen $\frac{1}{\omega L} > \omega C$ ist, liegt *ohmsch-induktives* Verhalten mit positivem Phasenverschiebungswinkel φ vor.

Für $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ verhält sich die Schaltung wie die RLC-Reihenschaltung nach Bild 5.36 rein ohmsch mit dem Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 0$ und der Admittanz $\underline{Y} = G$.

In Abschnitt 7.2.4.2. wird diese Schaltung als Parallelschwingkreis aufgefasst und ihr frequenzabhängiges Verhalten untersucht.

5.8 Gemischte Schaltungen

Ebenso wie bei den Gleichstromnetzwerken behalten auch für Sinusstromnetzwerke die für Reihen- und Parallelschaltungen hergeleiteten Regeln ihre Gültigkeit, wenn die beteiligten Zweipole wiederum aus Reihen- bzw. Parallelschaltungen bestehen. Dies wird anhand der Beispiele 5.18 und 5.19 verdeutlicht.

Beispiel 5.18: Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm und Admittanz einer gemischten Schaltung

Für den Zweipol in Bild 5.43a sollen das *qualitative* U-I-Zeigerdiagramm skizziert und die Admittanz \underline{Y} in allgemeiner Form berechnet werden.

In der Aufgabenstellung sind keinerlei Zahlenwerte vorgegeben. Daher kann kein *quantitatives* Zeigerdiagramm gezeichnet werden, aus dem mittels geeigneter Maßstäbe die Zahlenwerte von Strömen und Spannungen abgelesen werden könnten. Vielmehr kann nur ein *qualitatives* Zeigerdiagramm erstellt werden, in dem die Längen der Ausgangszeiger willkürlich angenommen werden. Von diesen Ausgangszeigern ausgehend werden dann weitere Zeiger konstruiert, wobei bekannte Winkelbeziehungen zwischen Zeigern (z. B. Vor- oder Nacheilung um 90°) sowie die Addition von Zeigern auch quantitativ richtig eingezeichnet werden müssen.

Zeigerdiagramme für gemischte Schaltungen werden in der Regel „von innen nach außen“ konstruiert, also beginnend mit dem Schaltungsteil, der strukturell (und daher oft auch

zeichnerisch) am weitesten von den Klemmen entfernt ist.

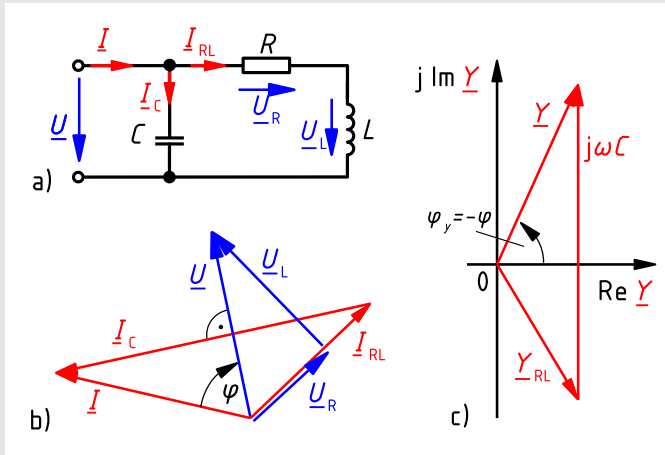


Bild 5.43: Gemischte Schaltung aus einer RL-Reihenschaltung mit dazu paralleler Kapazität C (a) mit Strom-Spannungs-Phasor diagramm (b) und Admittanzphasor diagramm (c)

Der innerste Schaltungsteil ist der Zweig mit der RL-Reihenschaltung. Bezugszeiger in Reihenschaltungen ist der Strom. Daher zeichnet man einen willkürlich gewählten Stromzeiger \underline{I}_{RL} und erhält entsprechend Bild 5.43b von diesem ausgehend die Zeiger der Teilspannungen \underline{U}_R (gleichphasig) und \underline{U}_L (um 90° voreilend) und die Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R \underline{I}_{RL} + j\omega L \underline{I}_{RL}. \quad (5.300)$$

Da diese auch an der Kapazität liegt, folgt nach Gl. (5.198) der gegenüber der Gesamtspannung um 90° voreilende Strom durch die Kapazität

$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U} \quad (5.301)$$

und mit diesem der Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_{RL} + \underline{I}_C. \quad (5.302)$$

Die Admittanz der Schaltung

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \quad (5.303)$$

ist die Summe des Kehrwertes der Impedanz der RL-Reihenschaltung nach Gl. (5.241) und der Admittanz der Kapazität nach Gl. (5.204), wie in Bild 5.43c dargestellt.

Die Phasor diagramme der Ströme in Bild 5.43b und der Admittanzen in Bild 5.43c sind kongruent.

Ob der Zweipol ohmsch-induktiv ($\varphi > 0$), rein ohmsch ($\varphi = 0$) oder wie in Bild 5.44 ohmsch-kapazitiv ($\varphi < 0$) wirkt, hängt von R , L und C sowie der Kreisfrequenz ω ab.

Beispiel 5.19: Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm und Impedanz einer gemischten Schaltung

Für den Zweipol in Bild 5.44a sollen das *qualitative* U-I-Zeigerdiagramm skizziert und die Impedanz \underline{Z} in allgemeiner Form berechnet werden.

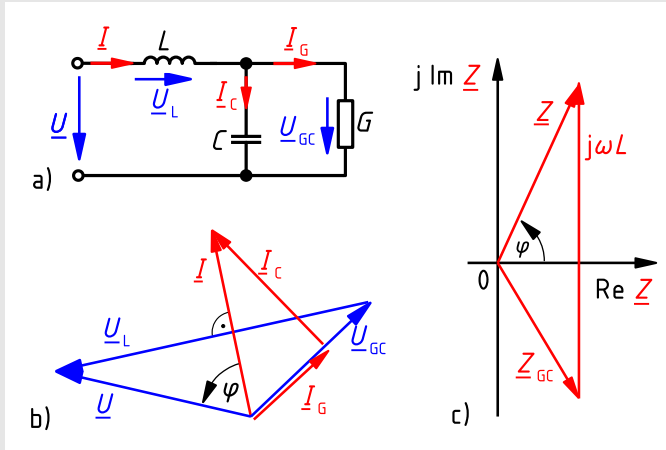


Bild 5.44: Reihenschaltung einer GC-Parallelschaltung und einer Induktivität L (a) mit Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b) und Impedanzzeigerdiagramm (c)

Der innerste Schaltungsteil ist hier die GC-Parallelschaltung. Bezugszeiger in Parallelschaltungen ist die Spannung. Ausgehend von der in Bild 5.44b willkürlich gewählten Spannung \underline{U}_{GC} erhält man aus den Teilströmen \underline{I}_G (gleichphasig) und \underline{I}_C (um 90° voreilend) den Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = G \underline{U}_{GC} + j\omega C \underline{U}_{GC}. \quad (5.304)$$

Hieraus folgt die dem Strom um 90° voreilende Spannung an der Induktivität

$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} \quad (5.305)$$

und die Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_{GC} + \underline{U}_L. \quad (5.306)$$

Die Impedanz der Schaltung

$$\underline{Z} = \frac{1}{G + j\omega C} + j\omega L \quad (5.307)$$

ist die Summe des Kehrwertes der Admittanz der GC-Parallelschaltung nach Gl. (5.278) und der Impedanz der Induktivität nach Gl. (5.179). Bild 5.44c zeigt das Impedanzzeigerdiagramm des Schaltung.

Die Zeigerdiagramme der Spannungen in Bild 5.44b und der Impedanzen in Bild 5.44c sind kongruent.

Ob der Zweipol an seinen Klemmen ohmsch-induktiv ($\varphi > 0$) wie in Bild 5.44, rein ohmsch ($\varphi = 0$) oder ohmsch-kapazitiv ($\varphi < 0$) wirkt, hängt von den Werten G , C und L sowie der Kreisfrequenz ω ab.

5.9 Analogien zwischen Gleich- und Sinusstromnetzwerken

Für geeignet modellierte Sinusstromnetzwerke aus konzentrierten Elementen gelten nach Abschnitt 5.6 die Kirchhoffschen Gesetze in analoger Form wie für Gleichstromnetzwerke. Deshalb sind zur Berechnung von Strömen und Spannungen sowie von Gesamtimpedanzen und –admittanzen in Sinusstromnetzwerken die gleichen Regeln anzuwenden wie bei Gleichstromnetzwerken, was bereits in den Abschnitten 5.7 und 5.8 für Reihen- und Parallelschaltungen sowie gemischte Schaltungen gezeigt wurde.

Um weitere in Kapitel 2 für Gleichstromnetzwerke beschriebene Berechnungsverfahren für Sinusstromnetzwerke übernehmen zu können, sind die in Tabelle 5.1 aufgeführten Gleichgrößen durch die entsprechenden komplexen Größen zu ersetzen. Zu diesen Verfahren gehören

- die Berechnung *ein- und mehrstufiger Spannungsteiler* analog zu Abschnitt 2.2.5,
- die Berechnung von *Brückenschaltungen* analog zu Abschnitt 2.2.6,
- die *Stern-Dreieck-Transformation* und *Dreieck-Stern-Transformation* passiver Zweipole analog zu Abschnitt 2.2.7
- sowie alle Verfahren zur *Berechnung linearer Netzwerke* analog zu Abschnitt 2.4,

die daher nicht nochmals grundlegend behandelt zu werden brauchen.

Die in Tabelle 5.1 aufgeführten Entsprechungen können problemlos zur Berechnung von komplexen Strömen und Spannungen sowie Impedanzen und Admittanzen in Sinusstromnetzwerken verwendet werden. Sie dürfen jedoch *nicht* zur Berechnung von Leistungen in Sinusstromnetzwerken genutzt werden: Während das Produkt der Klemmengrößen U und I in Gleichstromnetzwerken die über die Klemmen transportierte elektrische Leistung $P = UI$ beschreibt, ist das formal analoge Produkt $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}$ sinnlos. Vielmehr entspricht der Gleichung $P = UI$ für Gleichstromnetzwerke die Gleichung $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ zur Berechnung der komplexen Leistung bei Sinusstromnetzwerken.

Tabelle 5.3: Einander entsprechende Größen bei der Berechnung von Gleichstrom- und Sinusstromnetzwerken

<i>Gleichstromnetzwerke</i>		<i>Sinusstromnetzwerke</i>	
Gleichspannung	U	komplexe Spannung	\underline{U}
Gleichstrom	I	komplexer Strom	\underline{I}
Gleichstromwiderstand	R	komplexer Widerstand, Impedanz	\underline{Z}
Gleichstromleitwert	G	komplexer Leitwert, Admittanz	\underline{Y}

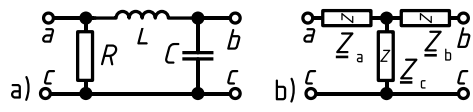
Die Beispiele 5.20 und 5.21 zur Stern-Dreieck-Transformation sollen die Anwendung der in Tabelle 5.3 aufgeführten Analogien, aber auch deren Grenzen aufzeigen.

Beispiel 5.20: Umrechnung einer Π -Schaltung in eine äquivalente T-Schaltung

Wegen der Anordnung der drei Zweipole in dem Zweitor in Bild 5.45a wird eine solche Schaltungsstruktur als Π -Schaltung bezeichnet. Der Wirkwiderstand $R = 5 \text{ k}\Omega$ und die Blindwiderstände $X_L = \omega L = 10 \text{ k}\Omega$ und $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -20 \text{ k}\Omega$ bei der betrachteten Betriebsfrequenz sind gegeben.

Gesucht sind die Elemente der T-Schaltung nach Bild 5.45b, die gleiches Klemmenverhalten aufweist.

Bild 5.45: Zweitor in Π -Schaltung (a) und T-Ersatzschaltung (b)



Beide Schaltungen in Bild 5.45 können nicht nur als Zweitore, sondern auch als Dreipole mit den Klemmen a, b und c aufgefasst werden. Die Π -Schaltung ist eine Dreieck-, die T-Schaltung eine Sternschaltung. Unter Beachtung von Tabelle 5.3 sind daher die Gln. (2.134) bis (2.136) für die *Dreieck-Stern-Transformation* anwendbar und man erhält

$$\underline{Z}_a = \frac{j X_L R}{R + j X_L + j X_C} = \frac{j 50 \text{ k}\Omega^2}{(5 - j 10) \text{ k}\Omega} = (-4 + j 2) \text{ k}\Omega,$$

$$\underline{Z}_b = \frac{j X_L j X_C}{R + j X_L + j X_C} = \frac{200 \text{ k}\Omega^2}{(5 - j 10) \text{ k}\Omega} = (8 + j 16) \text{ k}\Omega,$$

$$\underline{Z}_c = \frac{j X_C R}{R + j X_L + j X_C} = \frac{-j 100 \text{ k}\Omega^2}{(5 - j 10) \text{ k}\Omega} = (8 - j 4) \text{ k}\Omega.$$

Wegen ihres negativen Realteils ist die Impedanz \underline{Z}_a nicht realisierbar. Trotzdem bildet die T-Schaltung nach Bild 5.45b mit den oben berechneten Werten das Klemmenverhalten der gegebenen Π -Schaltung für die betrachtete Betriebsfrequenz richtig nach.

Da die Blindwiderstände der Induktivität und der Kapazität in Bild 5.45a frequenzabhängig sind, gelten die berechneten Werte nur für diese eine Frequenz. Dies ist ein fundamentaler Unterschied gegenüber der Gleichstromtechnik, in der eine Netzwerkumformung wie die hier betrachtete *uneingeschränkte* Äquivalenz bedeutet. Auf diese Problematik wird in Abschnitt 5.12.4.1 näher eingegangen.

Beispiel 5.21: Klemmenverhalten einer Sinusstrom-Brückenschaltung

Die Brückenschaltung in Bild 5.46a enthält den Wirkwiderstand $R = 5 \text{ k}\Omega$ und die Blindwiderstände $X_L = \omega L = 10 \text{ k}\Omega$ und $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -20 \text{ k}\Omega$. Sie liegt an einer Sinusspannung mit $U = 100 \text{ V}$.

Gesucht sind der Klemmenstrom I und seine Phasenverschiebung gegenüber der Klemmenspannung U .

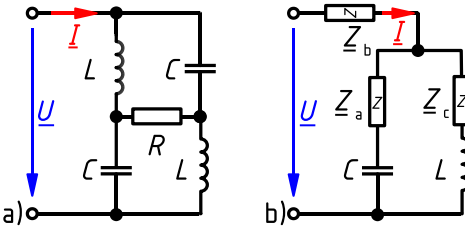


Bild 5.46: Sinusstrom-Brückenschaltung (a) mit Ersatzschaltung (b)

Die obere Dreieckschaltung in Bild 5.46a kann wie in Beispiel 5.20 in die äquivalente Sternschaltung umgewandelt werden, sodass sich die Schaltung in Bild 5.46b mit der Impedanz

$$\underline{Z} = \underline{Z}_b + \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_a + jX_C} + \frac{1}{\underline{Z}_c + jX_L}}$$

ergibt. Mit den vorgegebenen sowie den in Beispiel 5.20 berechneten Werten ergibt sich

$$\underline{Z} = (8 + j16) \text{ k}\Omega + \frac{1}{\frac{1}{(-4 + j2) \text{ k}\Omega} - j20 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{(8 - j4) \text{ k}\Omega + j10 \text{ k}\Omega} \underline{Z} = (22,5 + j17,5) \text{ k}\Omega.$$

Hieraus folgt der komplexe Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100 \text{ V } e^{j\varphi_u}}{(22,5 + j17,5) \text{ k}\Omega} = \frac{100 \text{ V } e^{j\varphi_u}}{28,5 \text{ k}\Omega e^{j37,87^\circ}} = 3,51 \text{ mA } e^{j(\varphi_u - 37,9^\circ)}.$$

Der Klemmenstrom hat also den Effektivwert 3,51 mA und eilt der Klemmenspannung um 37,9° nach.

5.10 Dualitätsbeziehungen bei Sinusstromnetzwerken

Die Rechengänge in den Beispielen 5.18 und 5.19 weisen hinsichtlich der *Struktur* der auftretenden *Gleichungen* eine sehr große Ähnlichkeit auf. Das liegt daran, dass die zugehörigen Schaltungen *dual* zueinander sind: Bild 5.43a zeigt die Parallelschaltung einer Kapazität C und einer RL-Reihenschaltung, während in Bild 5.44a die Reihenschaltung einer Induktivität L und einer GC-Parallelschaltung dargestellt ist.

Die beiden Schaltungen mitsamt den zugehörigen Rechengängen lassen sich durch einen Austausch der *dualen Schaltungsstrukturen*, *Zweipoltypen* und *Größen* nach Tabelle 5.4 ineinander überführen. Die Gln. (5.303) und (5.307) zeigen die Entsprechungen besonders deutlich. An diesen beiden Gleichungen ist auch gut zu erkennen, dass die Kreisfrequenz ω jeweils unverändert bleibt. Sie gehört zu den *invarianten Größen*, die sich bei der Überführung einer Gleichung in die hierzu duale Gleichung nicht ändern.

Besonders zu beachten sind die Zusammenhänge zwischen den *teilinvarianten Größen*, bei denen sich Größen entsprechen, die bzgl. ihres Vorzeichens nicht übereinstimmen: Das Argument der komplexen Leistung $\underline{S} = U I e^{j\varphi}$ stimmt mit dem Phasenverschiebungswinkel φ überein, der auch das Argument der Impedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ ist.

Tabelle 5.4: Duale Entsprechungen in Sinusstromnetzwerken

<i>Schaltungen und Schaltungselemente</i>	Ringschaltung (Masche)		Sternschaltung (Knoten)	
	Reihenschaltung		Parallelschaltung	
	Leerlauf		Kurzschluss	
	ideale Spannungsquelle		ideale Stromquelle	
<i>Duale Größen</i>	komplexe Spannung	\underline{U}	komplexer Strom	\underline{I}
	Effektivwert	U	Effektivwert	I
	Nullphasenwinkel	φ_u	Nullphasenwinkel	φ_i
	komplexer Widerstand, Impedanz	\underline{Z}	komplexer Leitwert, Admittanz	\underline{Y}
	Scheinwiderstand	Z	Scheinleitwert	Y
	Argument	φ	Argument	φ_Y
	Wirkwiderstand	R	Wirkleitwert	G
	Blindwiderstand	X	Blindleitwert	B
	Induktivität	L	Kapazität	C
<i>Invariante Größen</i>	Frequenz		f	
	Kreisfrequenz		ω	
	Energie		W	
	Scheinleistung		S	
	Wirkleistung		P	
	Leistungsfaktor		$\cos \varphi$	
<i>Teilinvariante Größen</i>	komplexe Leistung	\underline{S}	Konjugiert komplexe Leistung	\underline{S}^*
	Blindleistung	Q	negative Blindleistung	$-Q$
	Phasenverschiebungswinkel	φ	negativer Phasenverschie- bungswinkel	$-\varphi$

Die Anwendung der dualen Entsprechungen nach Tabelle 5.4 führt wegen der Korrespondenz

$$\varphi \leftrightarrow \varphi_Y = -\varphi,$$

zu der Korrespondenz $\underline{S} = U I e^{j\varphi} \leftrightarrow I U e^{-j\varphi} = \underline{S}^*$,

aus der die Korrespondenz $\operatorname{Im} \underline{S} = Q \leftrightarrow \operatorname{Im} \underline{S}^* = -Q$ folgt.

Beispiel 5.22: Anwendung der Dualitätsbeziehungen bei der Schaltungsanalyse

Gegeben ist die RL-Reihenschaltung in Bild 5.47a. Für diese Schaltung sind in allgemeiner Form zu berechnen

- der Phasenverschiebungswinkel φ und der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ sowie Wirkleistung P und Blindleistung Q für den Fall, dass
- der Effektivwert des Stroms I bzw.
- der Effektivwert der Spannung U bekannt ist.

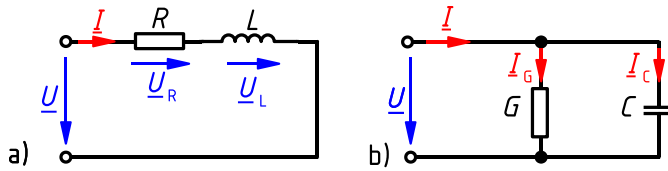


Bild 5.47: Beispiel für duale Schaltungen

Mittels Tabelle 5.4 sind anschließend die Ergebnisse auf die hierzu duale Schaltung in Bild 5.47b zu übertragen.

- a) Für den Phasenverschiebungswinkel und den Leistungsfaktor der RL-Reihenschaltung gilt

$$\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}}{\operatorname{Re} \underline{Z}} = \operatorname{Arctan} \frac{\omega L}{R} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} \underline{Z}}{|\underline{Z}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

- b) Aus der komplexen Leistung nach Gl. (5.244)

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2 = (R + j\omega L) I^2 = R I^2 + j\omega L I^2 = P + jQ$$

folgen die Wirkleistung $P = R I^2$ und die Blindleistung $Q = \omega L I^2$.

- c) Aus dem gegebenen Effektivwert der Spannung U folgt der Effektivwert des Stroms

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Aus $\underline{S} = \underline{Z} I^2$ ergeben sich die komplexe Leistung sowie Wirk- und Blindleistung

$$\underline{S} = \frac{R U^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega L U^2}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad P = \frac{R U^2}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad Q = \frac{\omega L U^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Übertragung der Ergebnisse mittels Tabelle 5.4 auf die Schaltung in 5.47b:

- a) Aufgrund der dualen Entsprechungen erhält man für das Argument der Admittanz, also den *negativen* Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_Y = \operatorname{Arctan} \frac{\omega C}{G} \quad \text{und daraus} \quad \varphi = -\varphi_Y = -\operatorname{Arctan} \frac{\omega C}{G}$$

und für den Leistungsfaktor

$$\cos \varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}}.$$

b) Aus der *konjugiert komplexen* Leistung

$$\underline{S}^* = \underline{Z} I^2 = (G + j\omega C)U^2 = G U^2 + j\omega C U^2 = P - jQ$$

folgt die Wirkleistung $P = G U^2$ und die Blindleistung $Q = -\omega C U^2$.

c) Bei gegebenem Strom gilt für die konjugiert komplexe Leistung sowie für Wirk- und Blindleistung

$$\underline{S}^* = \frac{G I^2}{G^2 + \omega^2 C^2} + j \frac{\omega C I^2}{G^2 + \omega^2 C^2}, \quad P = \frac{G I^2}{G^2 + \omega^2 C^2}, \quad Q = \frac{-\omega C I^2}{G^2 + \omega^2 C^2}.$$

5.11 Leistung in Sinusstromnetzwerken

5.11.1 Addition von Leistungen, Leistungsbilanzen

Die von einem Zweipol über seine Klemmen mit der Umgebung ausgetauschte Leistung ist in Analogie zur Leistungsberechnung bei Gleichstromnetzwerken durch den aus den Klemmengrößen \underline{U} und \underline{I} berechneten Wert der komplexen Leistung zusammen mit dem verwendeten Zählpeilsystem eindeutig ermittelbar. Die Interpretation, ob der Zweipol Leistung aufnimmt oder abgibt, muss im Unterschied zu Gleichstromnetzwerken jedoch nun *getrennt* für die Wirkleistung und die Blindleistung entsprechend Abschnitt 2.1.4.3 erfolgen.

Ist ein betrachteter Zweipol eine Zusammenschaltung beliebig vieler Einzelzweipole, so ergibt die *Summe* der für die Einzelzweipole berechneten komplexen Leistungen nur dann die vom Zweipol umgesetzte komplexe Gesamtleistung, wenn an allen Einzelzweipolen das gleiche Zählpeilsystem wie am Gesamtzweipol verwendet wird. Anderenfalls sind die Zahlenwerte der komplexen Leistungen für diejenigen Einzelzweipole *abzuziehen*, an denen ein anderes Zählpeilsystem als am Gesamtzweipol verwendet wird.

Im Falle eines einheitlich gewählten Zählpeilsystems gilt

$$P = \sum_{\nu=1}^n P_{\nu} \tag{5.308}$$

und

$$Q = \sum_{\nu=1}^n Q_{\nu}. \tag{5.309}$$

Die induktive und die kapazitive Blindleistung haben nach Abschnitt 5.4 bei gleichem Zählpeilsystem entgegengesetzte Vorzeichen. Enthält eine Schaltung sowohl Induktivitäten als auch Kapazitäten, so ist der *Betrag* der Gesamtblindleistung Q stets kleiner als die Summe der *Beträge* der einzelnen induktiven und kapazitiven Blindleistungen Q_L und Q_C . Diese Tatsache wird bei der Blindleistungskompensation genutzt (Abschnitt 5.11.2). Aus den Gln. (5.308) und (5.309) folgt wegen

$$\underline{S} = \sum_{\nu=1}^n (P_{\nu} + jQ_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^n P_{\nu} + j \sum_{\nu=1}^n Q_{\nu} = P + jQ$$

auch

$$\underline{S} = \sum_{\nu=1}^n \underline{S}_{\nu} \quad (5.310)$$

Für Sinusstromnetzwerke können *Leistungsbilanzen* analog zu Abschnitt 2.1.4.6 sowohl für die *Wirkleistungen* als auch für die *Blindleistungen* und daher auch für die *komplexen Leistungen* aufgestellt werden. Leistungsbilanzen für *Scheinleistungen* sind *nicht* möglich, da Scheinleistungen, wie bereits in Abschnitt 5.4.2 erwähnt, weder aufgenommen noch abgegeben, sondern nur umgesetzt werden können und stets ein positives Vorzeichen haben.

Beispiel 5.23: Leistungen in einer gemischten Schaltung

Betrachtet wird die Schaltung in Bild 5.48a mit $R = 60 \Omega$, $L = 300 \text{ mH}$ und $C = 57 \mu\text{F}$. Die Schaltung wird an einer Sinusspannung mit $U = 230 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ betrieben.

Gesucht sind die Wirk- und Blindleistungen der einzelnen Zweipole sowie Wirk- und Blindleistung der Gesamtschaltung.

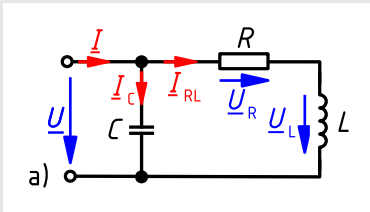
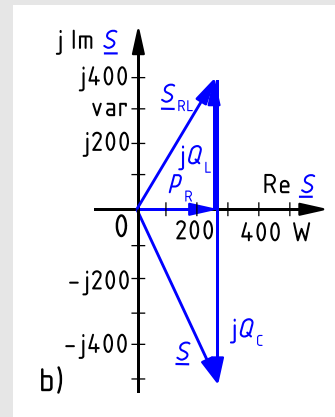


Bild 5.48: Kombinierte Reihen- und Parallelschaltung dreier Zweipole (a) und zugehöriges Leistungszeigerdiagramm (b)



Der Effektivwert des Stroms durch die RL-Reihenschaltung ist nach Gl. (5.239)

$$I_{RL} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{230 \text{ V}}{\sqrt{(60 \Omega)^2 + (100 \pi \text{ s}^{-1} \cdot 300 \text{ mH})^2}} = 2,059 \text{ A}.$$

Nach Gl. (5.244) gilt für die komplexe Leistung der RL-Reihenschaltung

$$\underline{S}_{RL} = \underline{Z}_{RL} I_{RL}^2 = R I_{RL}^2 + j \omega L I_{RL}^2 = P_R + j Q_L.$$

Der Berechnung komplexer Leistungen mittels der Gleichungen $\underline{S} = \underline{Z} I^2$ oder $\underline{S} = \underline{Y}^* U^2$ liegt implizit immer das Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS) zugrunde (vgl. entsprechende Anmerkung unter Gl. (2.59)).

Am Widerstand wird VZS verwendet und der Zahlenwert der Wirkleistung ist positiv. Daher nimmt der Widerstand R die Wirkleistung

$$P_R = R I_{RL}^2 = 60 \Omega \cdot (2,059 \text{ A})^2 = 254 \text{ W}$$

auf.

Da an der Induktivität ebenfalls VZS verwendet wird und der Zahlenwert der Blindleistung positiv ist, nimmt die Induktivität L die Blindleistung

$$Q_L = \omega L I_{RL}^2 = 100 \pi \text{s}^{-1} \cdot 300 \text{ mH} \cdot (2,059 \text{ A})^2 = 399 \text{ var}$$

auf. An der Kapazität wird ebenfalls VZS verwendet. Also nimmt sie nach Gl. (5.149) und (5.204) die komplexe Leistung

$$\underline{S}_C = \underline{Y}^* U^2 = -j \omega C U^2$$

auf. Diese Leistung besteht nur aus dem Blindanteil

$$Q_C = \text{Im}(\underline{S}_C) = -\omega C U^2 = -100 \pi \text{s}^{-1} \cdot 57 \mu\text{F} \cdot (230 \text{ V})^2 = -947 \text{ var},$$

dessen Vorzeichen negativ ist. Die Kapazität nimmt -947 var auf, gibt also 947 var ab.

Für die komplexe Gesamtleistung folgt aus der komponentenweisen Addition von \underline{S}_{RL} und \underline{S}_C nach Bild 5.48b

$$\underline{S} = \underline{S}_{RL} + \underline{S}_C = P_R + j(Q_L + Q_C) = 254 \text{ W} + j(399 - 947) \text{ var} = 254 \text{ W} - j 548 \text{ var}.$$

Die von der Schaltung insgesamt aufgenommene Wirkleistung ist mit der im (einigen) Wirkwiderstand R umgesetzten Leistung $P = 254 \text{ W}$ identisch. Die Gesamtblindleistung $Q = -j 548 \text{ var}$ ist negativ. Die Schaltung nimmt Wirkleistung auf und gibt Blindleistung ab, wirkt also ohmsch-kapazitiv.

5.11.2 Blindleistungskompensation

Die Wirkleistung $P = U I \cos \varphi$ beschreibt die Leistung, die ein Zweipol im zeitlichen Mittel über seine Klemmen mit der Umgebung in einer Richtung austauscht. Bei passiven Zweipolen wird diese Leistung immer aufgenommen und z. B. in Wärme oder mechanische Leistung umgesetzt.

Bild 5.49a (ohne die Kapazität C) zeigt einen ohmsch-induktiven Verbraucher an einer Sinusspannung \underline{U} . Der Strom \underline{I} , der durch den Verbraucher fließt, lässt sich gemäß Bild 5.49b in zwei Anteile zerlegen: den mit \underline{U} gleichphasigen *Wirkstrom* \underline{I}_w mit dem Betrag $I_w = I \cos \varphi$ und den um $+90^\circ$ oder -90° gegenüber \underline{U} phasenverschobenen *Blindstrom* \underline{I}_b mit dem Betrag $I_b = I |\sin \varphi|$.

Der Wirkstrom würde zur Erzeugung der *Wirkleistung* im Verbraucher ausreichen. Der Blindstrom bewirkt nur eine über die Klemmen des Verbrauchers pendelnde *Blindleistung* $Q = U I \sin \varphi$.

Obwohl die Blindleistung Q zur Energieübertragung keinen Beitrag liefert, führt der mit ihr verbundene Blindstrom I_b dazu, dass der durch den Verbraucher fließende Strom I größer ist als der Wirkstrom I_w . Ein größerer Strom verursacht aber größere *Stromwärmeverluste* in Zuleitung und Erzeuger oder erfordert dickere und damit teurere Zuleitungen und größere Generatoren, um die zulässigen Erwärmungen (z. B. in Kabeln und in den Generatorwicklungen) und die zulässigen Spannungsabfälle nicht zu überschreiten. Daher liegt es im Interesse von Energieversorgungsunternehmen, den vom Generator gelieferten Gesamtstrom möglichst auf den Wirkstromanteil \underline{I}_w zu reduzieren. Hierzu muss die Blindleistung möglichst nah an

den Verbrauchern *kompensiert* werden, damit der Blindstromanteil das Versorgungsnetz nicht belastet. Die zu kompensierende Blindleistung ist in der Praxis meist induktiv.

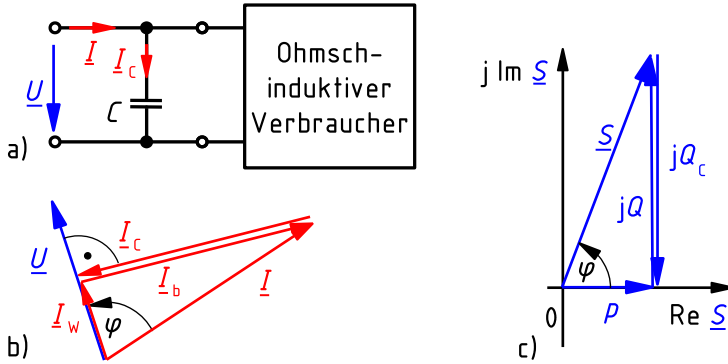


Bild 5.49: Ohmsch-induktiver Verbraucher mit parallelgeschalteter Kapazität C zur vollständigen Blindleistungskompensation (a), Strom-Spannungs- (b) und Leistungszeigerdiagramm (c)

Zur Kompensation induktiver Blindleistung werden ein oder mehrere *Kompensationskondensatoren* mit der Kapazität C nach Bild 5.49a parallel zum Verbraucher geschaltet. Der Verbraucher liegt somit weiter an der Versorgungsspannung \underline{U} . Die Kapazität C ist für eine *vollständige* Kompensation so zu bemessen, dass die Summe der induktiven Verbraucherblindleistung Q_L und der Blindleistung $Q_C = -\omega C U^2$ des Kompensationskondensators wie in Bild 5.49c

$$Q_L + Q_C = Q_L - \omega C U^2 = 0$$

ergibt. Die zur *Vollkompensation* erforderliche Kapazität ist also

$$C = \frac{Q_L}{\omega U^2}. \quad (5.311)$$

Große kapazitive Blindleistungen werden durch rotierende *Blindleistungsgeneratoren*, die auch als *Phasenschieber* bezeichnet werden, erzeugt [Fis11], [FH05]. Eine Blindleistungskompensation durch *Reihenschaltung* einer Kapazität zum Verbraucher ist in der Regel *nicht* ratsam (Ausnahme siehe Beispiel 5.25), da hierdurch ein *Reihenschwingkreis* (Abschnitt 7.2.4.1) entsteht, der nahe seiner Resonanzfrequenz betrieben wird, wodurch an den Klemmen des zu kompensierenden Verbrauchers eine Spannung auftritt, die nach Abschnitt 5.7.1.3 ein Vielfaches der Versorgungsspannung betragen kann.

In der Praxis wird meist nur eine Kompensation auf $\cos \varphi \approx 0,9$ angestrebt. Dadurch wird das Auftreten gefährlicher Resonanzerscheinungen zwischen Verbraucher und parallel liegendem Kompensationskondensator vermieden und der finanzielle Aufwand für die Kompensationseinrichtung verringert.

Größere Betriebe verfügen meist in der Schaltanlage über eine umschaltbare *Kondensatorbatterie*, deren Teile je nach dem aktuellen Leistungsfaktor der Verbraucher zu- oder abgeschaltet werden können. Große Versorgungsbereiche werden durch eigene Blindleistungsgeneratoren kompensiert.

Große Energieversorgungsnetze, über die zeitweise kaum elektrische Energie transportiert wird, z. B. innerhalb großer Unternehmen in Phasen ruhenden Fertigungsbetriebs, können wegen der parasitären Kapazitäten der *Kabel* und *Freileitungen* kapazitiv wirken. Zur Kompensation der benötigten kapazitiven Blindleistung, die als *Ladeleistung* bezeichnet wird, ist dann *induktive* Blindleistung erforderlich.

Beispiel 5.24: Blindleistungskompensation eines Wechselstrommotors

Ein Wechselstrommotor gibt eine mechanische Leistung von 1 kW bei einem elektromechanischen Wirkungsgrad von 85 % ab, sein Leistungsfaktor ist $\cos \varphi = 0,75$. Der Motor liegt an einem Sinusspannungsnetz mit $U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

Welche Kapazität muss zum Motor parallel geschaltet werden, um seine Blindleistung vollständig zu kompensieren? Welche Stromreduzierung wird dadurch erreicht?

Der Motor nimmt die elektrische Wirkleistung

$$P = P_{\text{mech}}/\eta = 1 \text{ kW}/0,85 = 1,18 \text{ kW}$$

auf. Die von ihm umgesetzte Scheinleistung beträgt

$$S = P/\cos \varphi = (1,18/0,75) \text{ kVA} = 1,57 \text{ kVA}$$

und der Betrag der von ihm umgesetzten Blindleistung

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{\cos \varphi}\right)^2 - P^2} = P\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = 1,04 \text{ kvar}.$$

Da Motoren induktive Verbraucher sind, ist der berechnete Betrag der Blindleistung gleich der aufgenommenen Blindleistung. Zur vollständigen Kompensation dieser Blindleistung ist ein Kondensator erforderlich, der die gesamte vom Motor benötigte Blindleistung liefert, also nach Gl. (5.311) die Kapazität

$$C = \frac{Q}{\omega U^2} = \frac{1,04 \text{ kvar}}{100 \pi \text{ s}^{-1} \cdot (230 \text{ V})^2} = 63 \mu\text{F}$$

hat. Unkompensiert nimmt der Motor aus dem Netz den Strom

$$I = S/U = 1,57 \text{ kVA}/230 \text{ V} = 6,8 \text{ A}$$

auf. Nach der Vollkompensation reduziert sich der Strom auf den Wirkanteil

$$I_w = P/U = (S/U) \cos \varphi = 1,18 \text{ kW}/230 \text{ V} = 6,8 \text{ A} \cdot 75 \% = 5,1 \text{ A},$$

also auf den durch $\cos \varphi$ gegebenen Anteil, hier um 25 %.

Beispiel 5.25: Betriebsschaltungen von Leuchtstofflampen

Eine Leuchtstofflampe (Abschnitt 10.2.4) wird am Wechselstromnetz mit $U = 230\text{ V}$, $f = 50\text{ Hz}$ betrieben. Zur Stabilisierung des Arbeitspunktes (Abschnitt 2.5.3) durch Begrenzung des Betriebsstroms (und zur Erzeugung der Zündspannung für die Lampe bei Betriebsbeginn) wird eine *Drosselspule* in Reihe mit der Leuchtstofflampe geschaltet. Beim Betriebsstrom $I_1 = 0,4\text{ A}$ durch die Reihenschaltung nimmt die Leuchtstofflampe die Leistung $P_L = 40\text{ W}$ bei $\cos \varphi_L = 1$ auf, die Drossel verursacht die Verlustleistung $P_D = 10,6\text{ W}$.

Obwohl Leuchtstofflampen nichtlineare Bauteile sind (in der Umgebung ihres Arbeitspunktes weisen sie eine fallende U-I-Kennlinie auf), wird das Klemmenverhalten der hier betrachteten Leuchtstofflampe durch einen linearen Wirkwiderstand R_L modelliert. Die in konventionellen Leuchtstofflampen-Schaltungen verwendeten Eisendrosseln sind stark nichtlinear. Dennoch wird die Drossel durch die Reihenschaltung der linearen Induktivität L_D und des linearen Widerstandes R_D modelliert.

Das Klemmenverhalten der Leuchtstofflampe mit der Drossel wird somit durch die lineare Ersatzschaltung gemäß Bild 5.50a beschrieben, deren Impedanz mit \underline{Z}_1 bezeichnet wird. Diese linearisierte Beschreibung des stark nichtlinearen Schaltungsverhaltens ermöglicht einerseits, die Schaltung mittels der komplexen Rechnung zu analysieren, andererseits dürfen die Ergebnisse dieser Berechnungen nur als Näherungslösungen betrachtet werden.

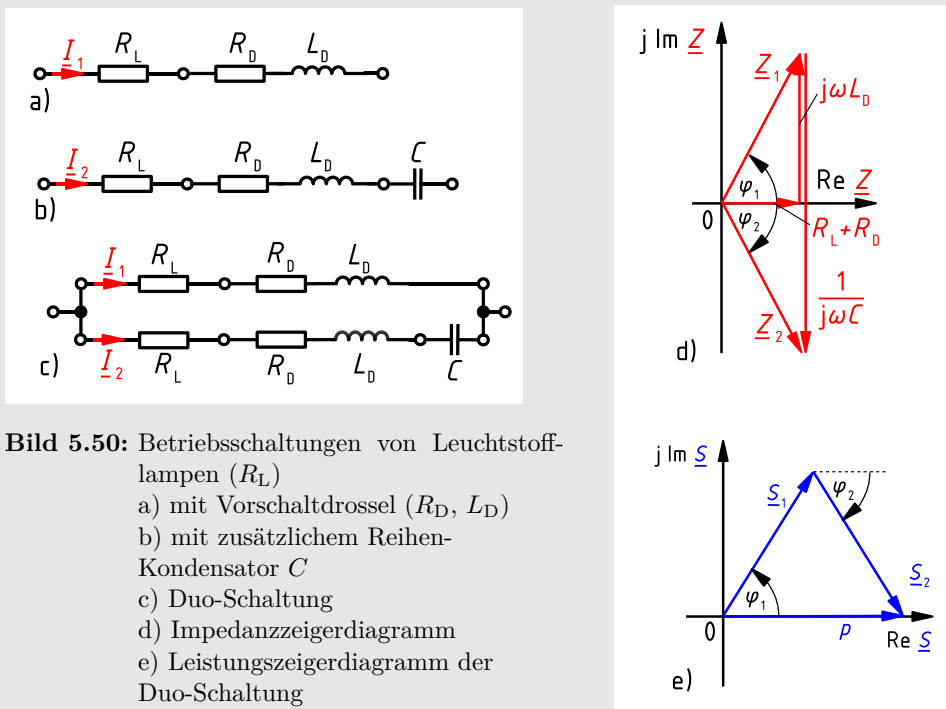


Bild 5.50: Betriebsschaltungen von Leuchtstofflampen (R_L)
a) mit Vorschalt-drossel (R_D, L_D)
b) mit zusätzlichem Reihen-Kondensator C
c) Duo-Schaltung
d) Impedanzzeigerdiagramm
e) Leistungszeigerdiagramm der Duo-Schaltung

- a) Wie groß sind die Schein-, Wirk- und Blindleistung sowie der Leistungsfaktor dieser Schaltung?

Mit der umgesetzten Scheinleistung

$$S_1 = U I_1 = 230 \text{ V} \cdot 0,4 \text{ A} = 92 \text{ VA}$$

und der insgesamt aufgenommenen Wirkleistung

$$P_1 = P_L + P_D = 50,6 \text{ W}$$

ergibt sich der Betrag der Blindleistung

$$|Q_1| = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = 76,84 \text{ var.}$$

Da bekannt ist, dass die Schaltung durch die Drossel ohmsch-induktiv wirkt, nimmt sie $Q_D = 76,84 \text{ var}$ Blindleistung auf. Der Leistungsfaktor der Betriebschaltung ist

$$\cos \varphi_1 = P_1/S_1 = 0,55.$$

- b) Wie groß sind die Induktivität und der Scheinwiderstand der Drosselspule sowie die über ihr abfallende Spannung?

Aus Gl. (5.193) folgt die Induktivität

$$L_D = \frac{Q_D}{\omega I_1^2} = \frac{76,84 \text{ var}}{100 \pi \text{ s}^{-1} \cdot (0,4 \text{ A})^2} = 1,53 \text{ H.}$$

Aus $Z_D I_1^2 = S_D = \sqrt{P_D^2 + Q_D^2}$ folgt der Scheinwiderstand der Drossel

$$Z_D = \frac{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2}}{I_1^2} = \frac{\sqrt{(10,6 \text{ W})^2 + (76,84 \text{ var})^2}}{(0,4 \text{ A})^2} = 485 \Omega$$

und daraus die über ihr abfallende Spannung

$$U_D = Z_D I_1 = 194 \text{ V.}$$

- c) Zu dieser Schaltung wird als Vorbereitung für Aufgabenteil d) gemäß Bild 5.50b ein (als verlustlos angenommener) Kondensator *in Reihe* geschaltet, dessen Kapazität C so zu dimensionieren ist, dass die Gesamtschaltung kapazitiv wirkt, der Scheinwiderstand Z_2 aber den Wert Z_1 aus Fall a) beibehält. Dann ändern sich der Strom und der Leistungsfaktor ebenfalls nicht, d. h. es gilt $I_2 = I_1$ und $\cos \varphi_2 = \cos \varphi_1$.

Nach Bild 5.50d ist diese Bedingung nur zu erfüllen, wenn $\varphi_2 = -\varphi_1$ und $Z_2 = Z_1^*$ werden. Dies wird erreicht, wenn $Z_C = 2 Z_D$, d. h. $1/(\omega C) = 2 \omega L_D$ ist. Hieraus folgt die Kapazität

$$C = \frac{1}{2 \omega^2 L_D} = \frac{1}{2 \cdot (100 \pi \text{ s}^{-1})^2 \cdot 1,53 \text{ H}} = 3,3 \mu\text{F.}$$

- d) Wie groß sind die insgesamt aufgenommene Wirk- und Blindleistung, wenn eine Schaltung nach Bild 5.50a und eine Schaltung nach Bild 5.50b als *Duo-Schaltung* nach Bild 5.50c parallelgeschaltet werden?

Die komplexen Leistungen \underline{S}_1 der Schaltung 5.50a und \underline{S}_2 der Schaltung 5.50b sind ebenso wie die zugehörigen Impedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 zueinander konjugiert komplex und addieren sich daher nach Bild 5.50e zu

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (P_1 + jQ_1) + (P_1 - jQ_1) = 2P_1 = 101,2 \text{ W} + j0 \text{ var}.$$

Die Wirkleistung verdoppelt sich beim Betrieb zweier Lampen auf $P = 101,2 \text{ W}$. Die Blindleistung reduziert sich bei der Duo-Schaltung rechnerisch auf $Q = 0 \text{ var}$. Tatsächlich wird auch eine optimal kompensierte Duo-Schaltung wegen des nicht sinusförmigen Klemmenstroms noch *Verzerrungs-Blindleistung* (Abschnitt 9.2.4.2) verursachen.

- e) Die Bedingung $Z_C = 2Z_D$ aus c) mit Z_D aus b) führt zu

$$U_C = Z_C I_1 = 2Z_D I_1 = 2U_D = 388 \text{ V}.$$

Die Spannung liegt also weit über der Spannung des Versorgungsnetzes und ist bei der Auswahl des Kondensators zu berücksichtigen. Der durch die Induktivität einer Drossel und die Kapazität des Kompensationskondensators gebildete *Reihenschwingkreis* (Abschnitt 7.2.4.1) wird in der Nähe seiner Resonanzfrequenz, die bei 71 Hz liegt, betrieben, wodurch diese Spannungsüberhöhung auch begründet werden kann.

5.11.3 Leistungsanpassung

Ebenso wie bei Gleichspannungsquellen ist auch bei Sinusspannungsquellen die verfügbare (d. h. maximal abgebbare) Leistung in der Praxis begrenzt. Dies trifft auch auf das Energieversorgungsnetz in Westeuropa zu, wurde hier aber im Allgemeinen nicht wahrgenommen, weil das Netz in der Vergangenheit so leistungsfähig war, dass die Versorgungsspannung – zumindest näherungsweise – als starr, d. h. belastungsunabhängig angesehen werden konnte.

Bei einzeln betriebenen Sinusspannungsquellen, z. B. bei Labornetzgeräten oder Signalgeneratoren, ist dies nicht der Fall. Vielmehr muss hier die Abhängigkeit der Klemmenspannung von der Belastung berücksichtigt werden. Analog zum Gleichstromkreis, siehe Gln. (2.38) und (2.39), gilt bei Sinusstromkreisen für das Modell der *Ersatz-Spannungsquelle* mit der *Innenimpedanz* \underline{Z}_i bzw. der *Ersatz-Stromquelle* mit der *Innenadmittanz* \underline{Y}_i (Ersatzschaltungen analog zu den Bildern 2.24 und 2.25)

$$\underline{U} = \underline{U}_0 - \underline{Z}_i \underline{I} \quad (5.312)$$

bzw.

$$\underline{I} = \underline{I}_k - \underline{Y}_i \underline{U}. \quad (5.313)$$

Wird nach Bild 5.51a die lineare Quelle an eine Lastimpedanz \underline{Z}_a angeschlossen, fließt der Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a} = \frac{U_0 e^{j\varphi_{u0}}}{(R_i + jX_i) + (R_a + jX_a)} \quad (5.314)$$

mit dem Betrag

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2}}.$$

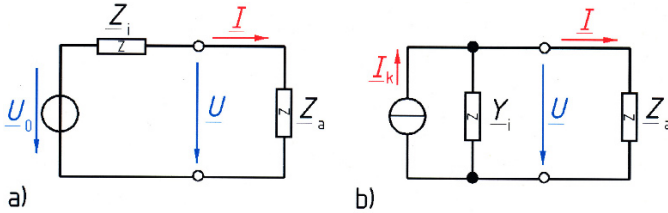


Bild 5.51: Modelle für die belastete lineare Sinusquelle
a) Ersatz-Spannungsquelle, b) Ersatz-Stromquelle

Nach Gl. (5.148) wird an die Lastimpedanz $\underline{Z}_a = R_a + j X_a$ die Wirkleistung

$$P = R_a I^2 = \frac{R_a U_0^2}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} \quad (5.315)$$

abgegeben. Damit sie maximal wird, muss der Nenner des Bruches von Gl. (5.315) minimal werden. Dazu muss offensichtlich der Blindwiderstand X_a der Last die *1. Anpassungsbedingung*

$$X_a = -X_i \quad (5.316)$$

erfüllen. Die abgegebene Wirkleistung hat dann den Wert

$$P_1 = \frac{R_a U_0^2}{(R_i + R_a)^2}. \quad (5.317)$$

Den Wirkwiderstand R_a , für den die abgegebene Leistung P_1 maximal wird, erhält man, wenn Gl. (5.317) nach R_a abgeleitet und der Differenzialquotient gleich null gesetzt wird:

$$\frac{dP_1}{dR_a} = \frac{(R_i + R_a)^2 - 2 R_a (R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} U_0^2 = 0$$

Aus $(R_i + R_a)^2 = 2 R_a (R_i + R_a)$ folgt die *2. Anpassungsbedingung*

$$R_a = R_i. \quad (5.318)$$

Die maximal abgebbare (verfügbare) Leistung der Quelle ergibt sich damit aus Gl. (5.317) zu

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4 R_i}. \quad (5.319)$$

Sie wird dann abgegeben, wenn sowohl Gl. (5.316) als auch Gl. (5.318) erfüllt sind. Beide Gleichungen lassen sich zu der *komplexen Anpassungsbedingung*

$$\underline{Z}_a = R_i - j X_i = \underline{Z}_i^* \quad (5.320)$$

zusammenfassen. Eine entsprechende Rechnung für die Ersatz-Stromquelle nach Bild 5.51b führt zum gleichen Ergebnis $\underline{Z}_a = 1/\underline{Y}_i^*$.

5.11.4 Leistungsmessung

Die Wirkleistung P kann nach Abschnitt 5.4.1 mit einer Schaltung gemäß Bild 2.60 gemessen werden. Für sinusförmige Ströme und Spannungen wird dann nach den Gln. (5.152) und (5.155) der Wert

$$P = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*) \quad (5.321)$$

angezeigt. Für die Blindleistung gilt nach den Gln. (5.152), (5.156) und (5.94)

$$Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im}(\underline{U} \underline{I}^*) = \operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}}{j} \underline{I}^*\right). \quad (5.322)$$

Der Vergleich mit Gl. (5.321) ergibt, dass das Wattmeter dann die Blindleistung Q anzeigt, wenn an seine Spannungsklemmen statt der Spannung \underline{U} die Spannung \underline{U}/j , also eine um 90° nacheilende Spannung angelegt wird.

Beispiel 5.26: Blindleistungsmessung unter Verwendung der Hummel-Schaltung

Ein *elektrodynamisches Wattmeter* kann zur Wirkleistungsmessung (Bild 2.60) verwendet werden, weil sein Strompfad vom Verbraucherstrom i (oder einem Teil dieses Stroms) und sein Spannungspfad von einem Strom i_3 durchflossen wird, der der Verbraucherspannung u proportional ist. Wegen seiner *mechanischen Trägheit* zeigt das *multiplizierende Messwerk* dann einen Wert an, der proportional ist zu

$$\overline{i i_3} \sim \overline{i u} = \overline{p} = P.$$

Entsprechend ist nach Gl. (5.322) für sinusförmige Ströme und Spannungen die Messung der Blindleistung Q möglich, wenn am Spannungspfad eine um 90° gegenüber der Verbraucherspannung u nacheilende Spannung und ein ebenso nacheilender Strom i_3 erzeugt wird.

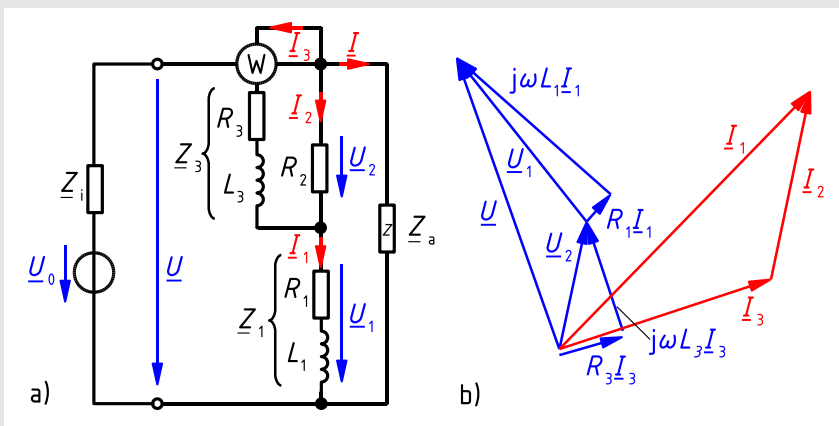


Bild 5.52: Blindleistungsmessung unter Verwendung der Hummel-Schaltung
a) Schaltung, b) Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm

Hierfür kann die Hummel-Schaltung nach Bild 5.52a verwendet werden. Die Induktivität L_3 und der Widerstand R_3 bilden die elektrischen Eigenschaften des Spannungspfad des Leistungsmessers nach. Damit in Reihe geschaltet sei eine Spule mit der Induktivität L_1 und dem Widerstand R_1 .

Der Widerstand R_2 soll so dimensioniert werden, dass der Strom i_3 der Spannung u um 90° nacheilt.

Nach Gl. (5.92) lautet die aufgestellte Bedingung mit komplexen Größen

$$\underline{U} = j k \underline{I}_3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = j k \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re} \frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = 0.$$

Mit $\underline{U}_2 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3$ gilt nach der Spannungsteilerregel Gl. (5.233)

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3 \underline{I}_3} = \frac{\underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}}{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}} = \underline{Z}_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) + 1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{R_2} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$$

und nach Einsetzen der gegebenen Größen

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{1}{R_2} (R_1 + j\omega L_1)(R_3 + j\omega L_3) + R_1 + j\omega L_1 + R_3 + j\omega L_3.$$

Nach Aufspalten in Real- und Imaginärteil

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{R_1 R_3 - \omega^2 L_1 L_3}{R_2} + R_1 + R_3 + j\omega \left(\frac{R_1 L_3}{R_2} + \frac{R_3 L_1}{R_2} + L_1 + L_3 \right)$$

folgt, da der Realteil null sein muss,

$$\frac{R_1 R_3 - \omega^2 L_1 L_3}{R_2} = -(R_1 + R_3)$$

und schließlich

$$R_2 = \frac{\omega^2 L_1 L_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Für diesen Wert von R_2 ergibt sich, wie in Bild 5.52b gezeigt, die geforderte Phasenverschiebung von 90° zwischen dem Strom \underline{I}_3 und der Spannung \underline{U} , sodass der vom Wattmeter angezeigte Wert der Blindleistung Q proportional ist.

5.12 Ersatzschaltungen realer passiver Zweipole

In den Abschnitten 5.7 und 5.8 wird gezeigt, wie das Klemmenverhalten von beliebig kompliziert aufgebauten linearen passiven Zweipolen bei Sinusstrom durch einen Ersatzzweipol (mit frequenzabhängigen Parametern) nachgebildet werden kann. Daher muss es umgekehrt auch möglich sein, das Klemmenverhalten eines beliebigen gegebenen passiven Zweipols bei Sinusstrom durch eine Reihen- oder eine Parallelschaltung von idealisierten Grundzweipolen zumindest näherungsweise nachzubilden.

Vor der Betrachtung verschiedener Strukturen von Ersatzschaltungen und ihrer Anwendung zur Beschreibung des Klemmenverhaltens realer Kondensatoren und Spulen werden die zur Charakterisierung dieser Bauelemente wichtigen Begriffe Verlustwinkel, Verlustfaktor und Güte eingeführt.

5.12.1 Verlustwinkel

Der *Verlustwinkel* δ eines passiven Zweipols ist die Ergänzung des *Betrages* seines Phasenwinkels φ auf 90° :

$$\delta = 90^\circ - |\varphi| \quad (5.323)$$

Daher gilt für den Wertebereich des Verlustwinkels

$$0 \leq \delta \leq 90^\circ. \quad (5.324)$$

Je größer δ ist, desto stärker weicht das Verhalten des Zweipols von dem eines idealen Reaktanzzweipols ab. Bei einer idealen Spule und bei einem idealen Kondensator wäre $\delta = 0^\circ$.

5.12.2 Verlustfaktor

Der *Verlustfaktor* d eines passiven Zweipols ist das Verhältnis der von ihm *aufgenommenen* Wirkleistung P zum *Betrag* der von ihm umgesetzten Blindleistung Q :

$$d = \frac{P}{|Q|} \quad (5.325)$$

Aus dem allgemeinen Leistungszeigerdiagramm für einen passiven Zweipol in Bild 5.22 folgt $d = \cot \varphi$. Unter Berücksichtigung von Gl. (5.323), die aussagt, dass der Verlustwinkel δ in Bild 5.22 der Winkel zwischen dem Zeiger \underline{S} und der imaginären Achse ist, ergibt sich

$$d = \tan \delta. \quad (5.326)$$

Für kleine, *im Bogenmaß angegebene* Winkel α gilt $\tan \alpha \approx \alpha$. Daraus folgt für kleine, im Bogenmaß angegebene Verlustwinkel die Näherung

$$d \approx \delta. \quad (5.327)$$

Bei realen passiven Bauelementen (z. B. Kondensatoren, Spulen) weist der Verlustfaktor oft eine komplizierte, analytisch nicht beschreibbare Frequenzabhängigkeit auf, die daher mittels Tabellen oder Diagrammen angegeben wird.

5.12.3 Güte

Die Güte Q (nicht zu verwechseln mit der Blindleistung Q) eines passiven Zweipols ist der Kehrwert seines Verlustfaktors:

$$Q = 1/d \quad (5.328)$$

Wie an einigen Beispielen in Abschnitt 5.12.4 gezeigt wird, ist die Güte bei realen Zweipolen sowohl *explizit* als auch *implizit frequenzabhängig*. Explizit, weil die Frequenz in der Gleichung für die Berechnung der Güte aus den Modellparametern enthalten ist, und implizit, weil Modellparameter, die nur durch ein Formelzeichen (und nicht als Funktion der Frequenz) dargestellt werden, selbst frequenzabhängig sein können. *Die Angabe der Güte eines Zweipols ohne Angabe der zugehörigen Frequenz ist daher in der Regel sinnlos.*

Auf die Güte und den Verlustfaktor bei schwingungsfähigen Zweipolen (Schwingkreisen) wird in Abschnitt 7.2.3.4 eingegangen.

5.12.4 Modelle realer passiver Zweipole

In den nachfolgenden Abschnitten werden *Modelle* für das Klemmenverhalten realer Kondensatoren und Spulen mit unterschiedlicher Struktur entworfen und auf ihre Eignung bzgl. der Nachbildung der tatsächlichen elektrischen Eigenschaften der Bauelemente untersucht.

5.12.4.1 Bedingt und unbedingt äquivalente Schaltungen

In Abschnitt 2.4.1.6 wird die Netzwerkumformung bei Gleichstromnetzwerken behandelt. Äquivalente n -Pole zeigen in der Gleichstromtechnik für beliebige Werte der Klemmengrößen identisches Verhalten. Bei Sinusstromnetzwerken kommt als zusätzliche hinsichtlich der Äquivalenz zu berücksichtigende Größe die Frequenz hinzu. *Bedingt äquivalente Schaltungen* weisen nur *bei einer bestimmten Frequenz f* gleiches Klemmenverhalten auf. *Unbedingt äquivalente Schaltungen* zeigen *unabhängig von der Frequenz* gleiches Klemmenverhalten. Die meisten Ersatzschaltungen für passive Sinusstromnetzwerke sind nur bedingt äquivalent.

5.12.4.2 Reihen-Ersatzschaltungen

In Abschnitt 5.7.1 wird das Klemmenverhalten von Reihenschaltungen der passiven Grundzweipole Widerstand R , Kapazität C und Induktivität L durch eine resultierende Impedanz \underline{Z} beschrieben. Jetzt ist umgekehrt die Aufgabe zu lösen, das Klemmenverhalten eines beliebigen Zweipols mit gegebener Impedanz \underline{Z} durch die Reihenschaltung eines Wirkwiderstandes R und eines Blindwiderstandes X nachzubilden.

Da die Impedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ des nachzubildenden Zweipols nach Bild 5.53a bekannt ist, kann der Spannungszeiger \underline{U} in eine mit dem Strom \underline{I} gleichphasige Komponente, die *Wirkspannung* \underline{U}_w mit dem Betrag

$$U_w = U \cos \varphi \quad (5.329)$$

und eine hierzu senkrechte, gegenüber dem Strom um 90° oder -90° phasenverschobene Komponente, die *Blindspannung* \underline{U}_b mit dem Betrag

$$U_b = U |\sin \varphi| \quad (5.330)$$

zerlegt werden. Deren Summe ergibt die Gesamtspannung

$$\underline{U} = \underline{U}_w + \underline{U}_b. \quad (5.331)$$

Der Zerlegung der Spannung \underline{U} in ihre Komponenten \underline{U}_w und \underline{U}_b nach Bild 5.53c entspricht die Aufteilung der Impedanz $\underline{Z} = R + jX$ nach Bild 5.53d in den *Wirkwiderstand*

$$R = Z \cos \varphi \quad (5.332)$$

und den *Blindwiderstand*

$$X = Z \sin \varphi. \quad (5.333)$$

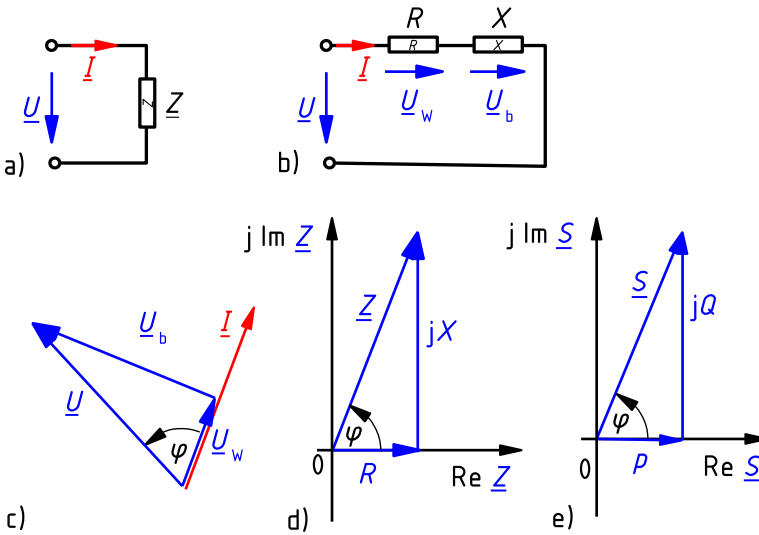


Bild 5.53: Sinusstromverbraucher (a) mit Reihen-Ersatzschaltung (b) und Zeigerdiagrammen für den Strom und die Spannungskomponenten (c) sowie für die Impedanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Das Klemmenverhalten des Zweipols mit der Impedanz \underline{Z} ist also durch eine Reihen-Ersatzschaltung nach Bild 5.53b aus dem Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X modellierbar. Als Schaltungselement für den Blindwiderstand ist für $X > 0$ eine Induktivität L mit $X = \omega L$ und für $X < 0$ eine Kapazität C mit $X = -\frac{1}{\omega C}$ zu verwenden.

Die vom Zweipol aufgenommene Wirkleistung $P = R I^2$ kann unmittelbar dem Wirkwiderstand R und die umgesetzte Blindleistung $Q = X I^2$ dem Blindwiderstand X zugeordnet werden.

Beispiel 5.27: Reihen-Ersatzschaltung einer Spule

Durch eine Drosselspule fließt bei einer Sinusspannung mit $U = 230 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ der Strom $I = 3 \text{ A}$. Die Drossel nimmt dabei die Verlustleistung $P = 236 \text{ W}$ auf.

Die Parameter R_r und L_r der Reihen-Ersatzschaltung in Bild 5.54 sowie der Verlustfaktor d und die Güte Q der Drossel sind zu bestimmen.

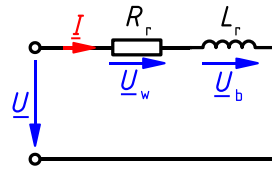


Bild 5.54: Reihen-Ersatzschaltung einer Spule

Aus der Wirkleistung $P = R_r I^2$ folgt der Wirkwiderstand

$$R_r = \frac{P}{I^2} = \frac{236 \text{ W}}{(3 \text{ A})^2} = 26,2 \Omega.$$

Entsprechend ergibt sich aus der induktiven (und daher positiven) Blindleistung

$$X_r I^2 = Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(230 \text{ V} \cdot 3 \text{ A})^2 - (236 \text{ W})^2} = 648 \text{ var}$$

der Blindwiderstand

$$\omega L_r = X_r = \frac{Q}{I^2} = \frac{648 \text{ var}}{(3 \text{ A})^2} = 72 \Omega$$

und aus diesem die Induktivität

$$L_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{72 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}} = 229 \text{ mH}.$$

Induktivitäten dieser Größenordnung sind nur durch *Spulen mit ferromagnetischen Kernen* zu realisieren. Die Parameter R_r und L_r dieser Reihen-Ersatzschaltung gelten nur für die Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$, bei der die Verlustleistung der Drossel bestimmt wurde, da die Verlustleistung stark frequenzabhängig ist. Ein besser geeignetes Modell für Spulen mit ferromagnetischen Kernen wird in Beispiel 5.31 behandelt.

Im Gegensatz dazu darf bei *Luftspulen* in der Regel davon ausgegangen werden, dass die Parameter einer für $f = 50 \text{ Hz}$ ermittelten Reihen-Ersatzschaltung im gesamten Niederfrequenz-Bereich von 0 Hz bis zu einigen 100 Hz ungefähr gültig sind. Für höhere Frequenzen gelten andere Werte. Außerdem ist dann der Einfluss der *parasitären Wicklungskapazität* zu berücksichtigen.

Für den Verlustfaktor ergibt sich nach Gl. (5.325) der Ausdruck

$$d = \frac{P}{|Q|} = \frac{R_r I^2}{|X_r| I^2} = \frac{R_r}{\omega L_r} \sim \frac{1}{\omega}, \text{ hier: } d = \frac{26,2 \Omega}{72 \Omega} = 0,36$$

und für die Güte gemäß Gl. (5.328)

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega L_r}{R_r} \sim \omega, \text{ hier: } Q = 2,75, \text{ also ein kleiner, für Drosselspulen typischer Wert.}$$

Sowohl der Verlustfaktor als auch die Güte sind also explizit stark frequenzabhängig. Zur expliziten kommt die implizite Frequenzabhängigkeit durch die oben diskutierte Abhängigkeit der Modellparameter R_r und L_r von der Frequenz.

Beispiel 5.28: Reihen-Ersatzschaltung eines Kondensators

Durch einen Kondensator an einer Sinusspannung mit $U = 16\text{ V}$ und $f = 1\text{ kHz}$ fließt ein Strom mit $I = 1\text{ mA}$, der der Spannung um $89,5^\circ$ voreilt.

Die Parameter R_r und C_r der Reihen-Ersatzschaltung in Bild 5.55 sowie der Verlustfaktor d und die Güte Q des Kondensators sind zu bestimmen.

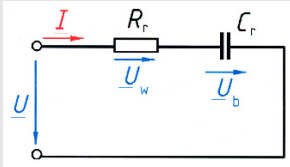


Bild 5.55: Reihen-Ersatzschaltung eines Kondensators

Mit dem Phasenverschiebungswinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -89,5^\circ$ und dem Scheinwiderstand $Z = U/I = 16\text{ k}\Omega$ folgt nach Gl. (5.332) der Wirkwiderstand

$$R_r = Z \cos \varphi = 16\text{ k}\Omega \cos(-89,5^\circ) = 140\ \Omega$$

und nach Gl. (5.333) der Blindwiderstand

$$\frac{-1}{\omega C_r} = X_r = Z \sin \varphi = 16\text{ k}\Omega \sin(-89,5^\circ) = -15,999\text{ k}\Omega$$

sowie die Kapazität

$$C_r = \frac{-1}{\omega X_r} = \frac{-1}{2\pi \cdot 10^3\text{ s}^{-1} (-15,999\text{ k}\Omega)} = 9,948\text{ nF} \approx 9,95\text{ nF}.$$

Für die Frequenz $f = 1\text{ kHz}$ ist die Schaltung in Bild 5.55 mit den berechneten Werten R_r und C_r ein geeignetes Modell zur Beschreibung des Klemmenverhaltens des Kondensators. Bei Frequenzänderung ändert sich insbesondere der Wert R_r . Für Frequenzen oberhalb von ca. 10 MHz ist zusätzlich die *parasitäre Induktivität* des Kondensators zu berücksichtigen, die sehr stark von seiner Bauform abhängt. Da die Reihen-Ersatzschaltung für sehr tiefe Frequenzen wegen $Z(f \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ physikalisch nicht sinnvoll ist, wird im Niederfrequenzbereich meist die in Beispiel 5.30 behandelte Parallel-Ersatzschaltung bevorzugt.

Für den Verlustfaktor ergibt sich nach Gl. (5.325)

$$d = \frac{P}{|Q|} = \frac{R_r I^2}{|X_r| I^2} = \omega C_r R_r \sim \omega, \text{ hier: } d = \frac{140\ \Omega}{16\text{ k}\Omega} = 8,75 \cdot 10^{-3}$$

und für die Güte gemäß Gl. (5.328)

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{\omega C_r R_r} \sim \frac{1}{\omega}, \text{ hier: } Q = 114, \text{ also ein im Vergleich zu Beispiel 5.27 großer Wert.}$$

Die explizite Frequenzabhängigkeit von Verlustfaktor und Güte ist also umgekehrt wie bei dem in Beispiel 5.27 behandelten Modell der Spule mit gleicher Struktur.

5.12.4.3 Parallel-Ersatzschaltungen

Ähnlich wie im vorigen Abschnitt mit dem Spannungszeiger geschehen, kann an einem durch seine Impedanz oder seine Admittanz beschriebenen passiven Zweipol gemäß Bild 5.56a der Klemmenstrom \underline{I} in eine mit der Klemmenspannung \underline{U} gleichphasige Komponente, den *Wirkstrom* \underline{I}_w mit dem Betrag

$$I_w = I \cos \varphi \tag{5.334}$$

und in eine hierzu senkrechte, gegenüber der Spannung um 90° oder -90° phasenverschobene Komponente, den *Blindstrom* \underline{I}_b mit dem Betrag

$$I_b = I |\sin \varphi| \tag{5.335}$$

zerlegt werden. Die Summe der beiden Teilströme ergibt den Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_w + \underline{I}_b. \tag{5.336}$$

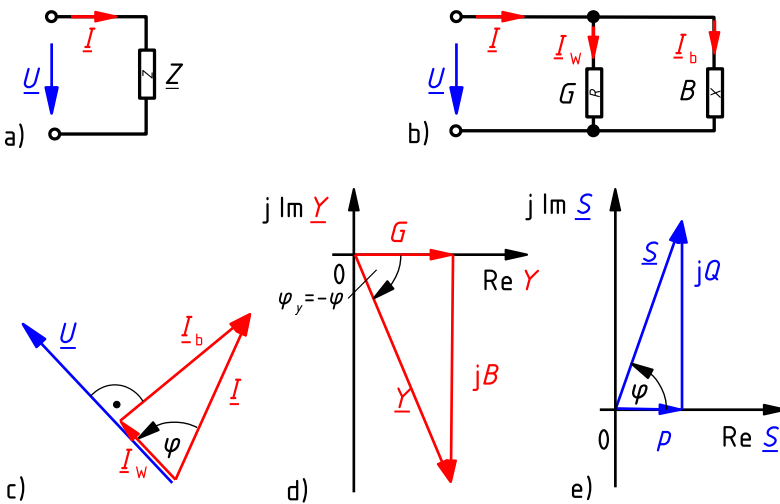


Bild 5.56: Sinusstromverbraucher (a) mit Parallel-Ersatzschaltung (b) und Zeigerdiagrammen für die Spannung und die Stromkomponenten (c) sowie für die Admittanz (d) und die komplexe Leistung (e)

Der Zerlegung der Stroms \underline{I} in seine Komponenten \underline{I}_w und \underline{I}_b nach Bild 5.56c entspricht die Aufteilung der Admittanz $\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y} = G + jB$ nach Bild 5.56d in den *Wirkleitwert*

$$G = Y \cos \varphi_Y = Y \cos \varphi \tag{5.337}$$

und den *Blindleitwert*

$$B = Y \sin \varphi_Y = -Y \sin \varphi. \tag{5.338}$$

Das Klemmenverhalten eines Zweipols mit der Admittanz \underline{Y} kann also durch eine Parallel-Ersatzschaltung nach Bild 5.56b aus dem Wirkleitwert G und dem Blindleitwert B modelliert werden. Als Schaltungselement für den Blindleitwert ist für $B > 0$ eine Kapazität C mit $B = \omega C$ und für $B < 0$ eine Induktivität L mit $B = -\frac{1}{\omega L}$ zu verwenden.

Die vom Zweipol aufgenommene Wirkleistung $P = G U^2$ kann unmittelbar dem Wirkleitwert G und die umgesetzte Blindleistung $Q = -B U^2$ dem Blindleitwert B der Parallel-Ersatzschaltung zugeordnet werden.

Beispiel 5.29: Parallel-Ersatzschaltung einer Spule

Für die bereits in Beispiel 5.27 behandelte Spule sollen die Parameter R_p und L_p der Parallel-Ersatzschaltung in Bild 5.57 sowie der Verlustfaktor d und die Güte Q bestimmt werden.

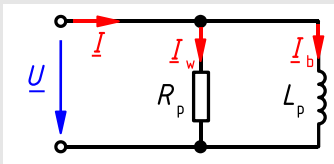


Bild 5.57: Parallel-Ersatzschaltung einer Spule

Aus der Wirkleistung $P = G_p U^2$ ergibt sich der Wirkleitwert

$$G_p = \frac{P}{U^2} = \frac{236 \text{ W}}{(230 \text{ V})^2} = 4,46 \text{ mS}$$

und daraus der Wirkwiderstand

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{4,46 \text{ mS}} = 224 \Omega.$$

Entsprechend liefert die induktive (und daher positive) Blindleistung

$$-B_p U^2 = Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(230 \text{ V} \cdot 3 \text{ A})^2 - (236 \text{ W})^2} = 648,4 \text{ var}$$

den Blindleitwert

$$B_p = -\frac{Q}{U^2} = \frac{-648,4 \text{ var}}{(230 \text{ V})^2} = -12,3 \text{ mS}$$

und daraus die Induktivität

$$L_p = \frac{-1}{\omega B_p} = \frac{-1}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} (-12,3 \text{ mS})} = 260 \text{ mH}.$$

Die Parameter der Parallel-Ersatzschaltung unterscheiden sich erheblich von den in Beispiel 5.27 berechneten Parametern der Reihen-Ersatzschaltung der Spule. Auch hier gelten die aus den Messwerten berechneten Werte R_p und L_p nur für die Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$.

Die Parallel-Ersatzschaltung modelliert das Frequenzverhalten einer Spule in den meisten Fällen schlechter als die Reihen-Ersatzschaltung. Insbesondere stellt sie im Widerspruch zum Verhalten einer realen Spule für $f \rightarrow 0$ einen Kurzschluss dar.

Der Verlustfaktor dieses Spulenmodells ist

$$d = \frac{P}{|Q|} = \frac{G_p U^2}{|B_p| U^2} = \frac{1/R_p}{1/(\omega L_p)} = \frac{\omega L_p}{R_p} \sim \omega, \text{ hier: } d = \frac{4,46 \text{ mS}}{12,3 \text{ mS}} = 0,36,$$

die Güte

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{R_p}{\omega C_p} \sim \frac{1}{\omega}, \text{ hier: } Q = 2,76, \text{ was dem Ergebnis von Beispiel 5.27 entspricht.}$$

Verlustfaktor und Güte dieses Spulenmodells zeigen eine umgekehrte Frequenzabhängigkeit wie die entsprechenden Parameter der Reihen-Ersatzschaltung! Daraus ist ersichtlich, dass insbesondere für eine realistische Modellierung der Frequenzabhängigkeit von Verlustfaktor bzw. Güte eine sorgfältige Auswahl der Modellstruktur erforderlich ist.

Wie in Beispiel 5.27 kommt zu der expliziten Frequenzabhängigkeit von Verlustfaktor und Güte eine implizite durch die Frequenzabhängigkeit der Parameter R_p und C_p . Diese unterscheidet sich von der der Parameter R_r und C_r in der Art, dass bei Berücksichtigung dieser impliziten Abhängigkeit der oben genannte fundamentale Unterschied der expliziten Frequenzabhängigkeiten von Verlustfaktor und Güte kompensiert wird.

Beispiel 5.30: Parallel-Ersatzschaltung eines Kondensators

Für den Kondensator aus Beispiel 5.28 sind die Elemente der Parallel-Ersatzschaltung nach Bild 5.58 sowie der Verlustfaktor und die Güte zu bestimmen.

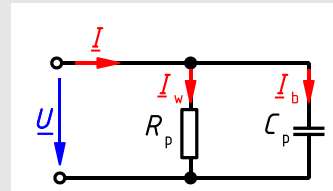


Bild 5.58: Parallel-Ersatzschaltung eines Kondensators

Mit dem Scheinleitwert $Y = I/U = 62,5 \mu\text{S}$ folgt nach Gl. (5.337) der Wirkleitwert

$$G_p = Y \cos \varphi = 62,5 \mu\text{S} \cos(-89,5^\circ) = 0,545 \mu\text{S}$$

und daraus der Wirkwiderstand

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{0,545 \mu\text{S}} = 1,83 \text{ M}\Omega.$$

Entsprechend erhält man nach Gl. (5.338) den Blindleitwert

$$\omega C_p = B_p = -Y \sin \varphi = -62,5 \mu\text{S} \sin(-89,5^\circ) = 62,498 \mu\text{S}$$

und damit die Kapazität

$$C_p = \frac{B_p}{\omega} = \frac{62,498 \mu\text{S}}{2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 9,947 \text{ nF} \approx 9,95 \text{ nF}.$$

Die Parallel-Ersatzschaltung in Bild 5.58 mit den berechneten Parametern R_p und C_p gilt exakt nur für die der Messung und damit der Berechnung zugrunde liegende Frequenz $f = 1$ kHz. Man darf aber im Allgemeinen davon ausgehen, dass sie auch für Frequenzen, die um den Faktor 10 darüber oder darunter liegen, noch ungefähre Gültigkeit hat, da sie die Verlustmechanismen in Kondensatoren angemessen beschreibt. Sie wird daher meist gegenüber der Reihen-Ersatzschaltung nach Bild 5.55 bevorzugt.

Für die Kapazitäten in beiden Schaltungen gilt $C_p \approx C_r$. Die Widerstände R_p und R_r unterscheiden sich hingegen erheblich. Für sehr tiefe Frequenzen ist der Scheinwiderstand $Z(f \rightarrow 0) = R_p$ der Parallel-Ersatzschaltung allerdings zu klein, da der Parallelwiderstand R_p neben den *Ableitungsverlusten*, die durch die elektrische Leitfähigkeit des Dielektrikums entstehen, vor allem die *Umpolarisierungsverluste* im Dielektrikum modelliert, die bei tiefen Frequenzen jedoch oft gegenüber den Ableitungsverlusten vernachlässigbar sind. Bei einem auf eine Gleichspannung aufgeladenen Kondensator führt der *Ableitwiderstand* zur allmählichen *Selbstentladung* des Kondensators. Dieser Effekt kann nur durch die Parallel-Ersatzschaltung modelliert werden.

Der Verlustfaktor dieses Kondensatormodells ist

$$d = \frac{P}{|Q|} = \frac{G_p U^2}{|B_p| U^2} = \frac{1/R_p}{\omega C_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p} \sim \frac{1}{\omega}, \text{ hier: } d = \frac{0,545 \mu\text{S}}{62,5 \mu\text{S}} = 0,36$$

und seine Güte

$$Q = \frac{1}{d} = \omega R_p C_p \sim \omega, \text{ hier: } Q = 115, \text{ was dem Ergebnis von Beispiel 5.28 entspricht.}$$

Hier gelten sinngemäß die gleichen Anmerkungen, die am Ende von Beispiel 5.29 zur fundamental unterschiedlichen Frequenzabhängigkeit von Verlustfaktor und Güte bei den beiden untersuchten Modellstrukturen gemacht wurden.

5.12.4.4 Gemischte Ersatzschaltungen

Neben der einfachen Reihen- oder Parallel-Ersatzschaltung werden häufig auch kombinierte Reihen- und Parallelschaltungen der Grundzweipole R , C und L als Ersatzschaltungen für reale passive Zweipole oder Zweitore verwendet, um deren Frequenzverhalten für einen größeren Frequenzbereich ausreichend genau zu modellieren.

Um das Frequenzverhalten einer *Luftspule* für Frequenzen oberhalb einiger 100 Hz nachzubilden, ist wegen der Kapazitäten zwischen den einzelnen Wicklungsteilen zusätzlich zu der RL-Reihenschaltung in Bild 5.54 im einfachsten Fall eine Parallelkapazität C_p nach Bild 5.59 in der Ersatzschaltung vorzusehen.

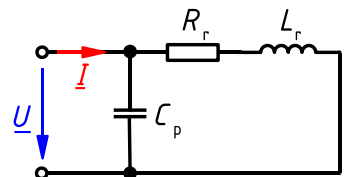


Bild 5.59: Ersatzschaltung einer Luftspule

Für *Eisendrosseln* (d. h. Spulen mit ferromagnetischem Kern) ist die einfache Reihen-Ersatzschaltung in Bild 5.54 schon im Niederfrequenz-Bereich oftmals nutzlos: Bei konstantem Strom I wird in diesem Modell unabhängig von der Frequenz die konstante Wirkleistung $P = R_r I^2$ umgesetzt. Dies trifft in guter Näherung nur für die *Kupferverluste*, also die im Draht der Wicklung umgesetzte Wirkleistung zu. Deshalb wird in der Ersatzschaltung für die Eisendrossel in Bild 5.60a der Widerstand $R_r = R_{Cu}$ gesetzt.

Zusätzlich treten im Spulenkern mit wachsender Frequenz zunehmende, *spannungsabhängige* Verluste (*Hystereseverluste*, *Wirbelstromverluste*) auf, die sich durch eine Erwärmung des Kerns bemerkbar machen. Diese *Eisenverluste* werden in Bild 5.60a durch den Widerstand R_{Fe} parallel zur Induktivität L berücksichtigt. Damit erhält man ein grobes Modell des frequenzabhängigen Verhaltens einer Eisendrossel im Niederfrequenz-Bereich. Tatsächlich sind bei diesem Modell insbesondere die Parameter L und R_{Fe} , in geringerem Maße aber auch R_{Cu} frequenzabhängig.

Bild 5.60b gibt das U-I-Zeigerdiagramm der Ersatzschaltung wieder. Hierin sind \underline{U}_R der Spannungsabfall am Wirkwiderstand der Wicklung und \underline{U}_L der von der Wicklungsinduktivität verursachte Spannungsabfall. Ferner sind \underline{I}_μ der zur Erzeugung des magnetischen Flusses benötigte *Magnetisierungsstrom* und \underline{I}_V der durch die Verluste des Kerns verursachte *Wirkstrom*.

Beispiel 5.31: Ersatzschaltung einer Spule mit ferromagnetischem Kern

Die Spule aus den Beispielen 5.27 und 5.29 sei eine Eisendrossel mit dem Gleichstromwiderstand $R_{Cu} = 14 \Omega$.

Gesucht sind die beiden übrigen Elemente der Ersatzschaltung nach Bild 5.60 bei $f = 50 \text{ Hz}$.

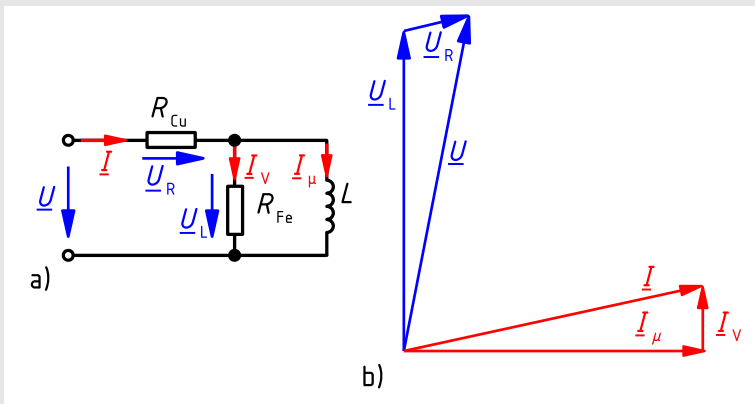


Bild 5.60: Ersatzschaltung einer Spule mit Eisenkern (a) und Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (b)

Aus Beispiel 5.27 ist die Impedanz der Spule bei 50 Hz

$$\underline{Z} = R_r + j\omega L_r = 26,2 \Omega + j 72 \Omega$$

bekannt. Daraus ergibt sich die Impedanz der Parallelschaltung von R_{Fe} und L

$$\underline{Z}_p = \underline{Z} - R_{Cu} = 12,2 \Omega + j 72 \Omega$$

und die Admittanz dieser Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{Fe}}} - j \frac{1}{\omega L} = Y_{\text{p}} = \frac{1}{Z_{\text{p}}} = \frac{1}{12,2 \Omega + j 72 \Omega} = 2,29 \text{ mS} - j 13,5 \text{ mS}.$$

Hieraus folgen der Eisenverlustwiderstand

$$R_{\text{Fe}} = \frac{1}{2,29 \text{ mS}} = 437 \Omega$$

und mit

$$\omega L = \frac{1}{13,5 \text{ mS}} = 74,1 \Omega$$

die Induktivität

$$L = \frac{74,1 \Omega}{\omega} = \frac{74,1 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}} = 236 \text{ mH}.$$

5.13 Transformator

Transformatoren nutzen die *magnetische Kopplung* zwischen in der Regel *elektrisch voneinander isolierten* (d. h. *galvanisch getrennten*) Stromkreisen zur Übertragung von *Energie* bzw. *Information*. Ihre Funktion beruht auf dem *Induktionsgesetz*.

In der *Energietechnik* werden sehr große Transformatoren – meist in Form von Dreiphasentransformatoren – als *Leistungstransformatoren* zum Herauf- oder Heruntertransformieren von Wechselspannungen und -strömen [NT98] verwendet, um elektrische Energie effizient über große Entfernungen übertragen zu können. Transformatoren mit Nennleistungen von einigen 100 MVA bilden die Schnittstellen zwischen Netzen auf verschiedenen *Spannungsebenen* (üblicherweise zwischen 400 kV und 400 V). Die größten gefertigten Transformatoren haben Grenzleistungen von weit über 1000 MVA. Zur Spannungsversorgung elektrischer und elektronischer Geräte, die an Netzwechselspannung betrieben werden sollen, werden in konventionellen - und in Schalt- netzteilen *Kleintransformatoren* eingesetzt, die auch eine galvanische Trennung der Verbraucher vom Versorgungsnetz und damit im Fehlerfall einen gewissen Berührungsschutz gewährleisten. Transformatoren, die nur oder hauptsächlich diese galvanische Trennung sicherstellen sollen, ohne die Spannung wesentlich zu verändern, werden *Trenntransformatoren* genannt. *Wechselrichter* zur Umwandlung von Gleich- in Wechselspannung und *Frequenzumrichter* zur Veränderung von Frequenz und Scheitelwert von Wechselspannungen enthalten ebenfalls Transformatoren.

In der *Nachrichtentechnik* werden Transformatoren als *Übertrager* bezeichnet. Sie dienen zur breitbandigen *Anpassung* von Lastimpedanzen an Signalquellen bei gleichzeitiger galvanischer Trennung⁶, um z. B. Brummschleifen zu vermeiden.

Auch in der *Messtechnik* kommen Transformatoren als Spannungs- bzw. *Stromwandler* [Müh08] zum Verringern von zeitlich veränderlichen Messspannungen bzw. -strömen zum Einsatz.

⁶In der Nachrichtentechnik werden zur galvanischen Trennung häufig Optokoppler (Abschnitt 10.5.5.3) eingesetzt. Sie zeichnen sich u. a. durch höhere Bandbreite, höhere Spannungsfestigkeit, geringere Störempfindlichkeit, Rückwirkungsfreiheit, kleineren Platzbedarf, kleinere Bauform und geringeren Preis gegenüber Übertragern aus, sind jedoch elektrisch weniger robust.

Volltransformatoren besitzen mindestens zwei galvanisch getrennte *Wicklungen*, die von einem gemeinsamen magnetischen Feld durchsetzt werden. Die Wicklungen können mit mehreren *Anzapfungen* versehen sein, z. B. zur Spannungseinstellung. Transformatoren mit mehr als zwei getrennten Wicklungen werden z. B. in der Drehstromtechnik verwendet oder zur Spannungsversorgung von verschiedenen Schaltungsteilen innerhalb eines Gerätes, die bzgl. ihres elektrischen Potentials voneinander getrennt sein müssen. *Spartransformatoren* enthalten nur eine Wicklung mit mehreren Anzapfungen. Sie werden zur kostengünstigen Transformation von Wechselspannungen ohne galvanische Trennung eingesetzt.

Mit Ausnahme von Übertragern für Hoch- und Höchsfrequenzanwendungen werden die Wicklungen von Transformatoren auf *ferromagnetische Kerne* aufgebracht. Diese sorgen dafür, dass sich das von den Strömen in den Wicklungen verursachte Magnetfeld auf den Kern konzentriert, wodurch eine sehr effiziente magnetische Kopplung erzielt wird.

Hier werden nur Transformatoren mit *zwei galvanisch getrennten* Wicklungen behandelt. Diese Transformatoren sind elektrische *Vierpole*, die in der Regel als *Zweitore* betrieben werden. Die Richtung des Energie- bzw. Informationsflusses entscheidet darüber, welches Tor als Eingang (*Primärseite, Eingangstor*) und welches als Ausgang (*Sekundärseite, Ausgangstor*) betrachtet wird. Die Klemmengrößen der Primärseite werden üblicherweise mit dem Index 1 gekennzeichnet, die der Sekundärseite mit dem Index 2.

Die Zählpfeile der Klemmengrößen von Zweitoren (Abschnitt 1.4.3) können entweder im *symmetrischen Zählpfeilsystem* gemäß Bild 1.14 oder im *Ketten-Zählpfeilsystem* nach Bild 1.15 eingetragen werden. Alle Gleichungen, die unter Voraussetzung eines der beiden Zählpfeilsysteme hergeleitet werden, gelten bei Umkehrung des Vorzeichens des Stroms \underline{I}_2 auch für das jeweils andere Zählpfeilsystem.

In den folgenden Abschnitten werden fünf verschiedene *Modelle für Transformatoren* behandelt, die sich bezüglich des *Grades der Idealisierung* der tatsächlichen Verhältnisse unterscheiden. Diese Modelle können die in realen Transformatoren auftretenden Effekte unterschiedlich gut, aber *keinesfalls exakt* nachbilden. Sie dürfen nicht dahingehend missverstanden werden, dass sie verschiedene Varianten technisch realisierbarer Transformatoren beschreiben.

Bei *allen* Modellen wird angenommen, dass die Transformatoren *linear* und *zeitinvariant* sind. Daher dürfen beim hier ausschließlich betrachteten Betrieb mit sinusförmigen Spannungen und Strömen alle Spannungen, Ströme und Widerstände durch *komplexe Größen* beschrieben und die *komplexe Rechnung* angewandt werden. Die in den meisten Transformatoren eingesetzten ferromagnetischen Kernmaterialien bewirken aber ein mehr oder weniger nichtlineares Betriebsverhalten, das insbesondere bei Kleintransformatoren zu deutlichen Abweichungen der Klemmengrößen von der Sinusform führen kann. Sollen diese Effekte berücksichtigt werden, ist eine *numerische Schaltungsanalyse* erforderlich.

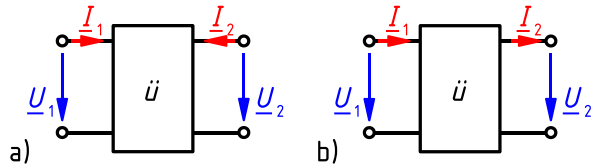
5.13.1 Idealer Transformator

Der *ideale Transformator* ist das *einfachste Modell* realer Transformatoren. Das Verhalten dieses Modells wird durch *einen einzigen Parameter*, das reellwertige *Übersetzungsverhältnis*

$$\ddot{u} = \frac{U_1}{U_2} > 0, \quad (5.339)$$

sowie die galvanische Entkopplung der beiden Tore und das verwendete Zählpeilsystem (fast⁷) *vollständig* beschrieben. Daher besteht das Ersatzschaltbild dieses Modells nur aus dem Symbol für ein Zweitor, in das ein „ \ddot{u} “ geschrieben wird. Das Ersatzschaltbild mit symmetrischem Zählpeilsystem ist in Bild 5.61a dargestellt, das mit Ketten-Zählpeilsystem in Bild 5.61b. Über die *technische Realisierung* des Transformators macht dieses Modell *keinerlei Aussage*.

Bild 5.61: Ersatzschaltbild des idealen Transformators mit symmetrischem Zählpeilsystem (a) bzw. Ketten-Zählpeilsystem (b)



Wegen Gl. (5.339) wird von einem Transformator mit $\ddot{u} > 1$ die Eingangsspannung *heruntertransformiert*, während sie bei $\ddot{u} < 1$ *herauftransformiert* wird.

Für den Betrieb eines idealen Transformators werden weder Wirk- noch Blindleistung benötigt. Da ein idealer Transformator keine Verlustleistung erzeugt, arbeitet er mit einem Wirkungsgrad von 100 %. Die gesamte über ein Tor aufgenommene *komplexe Leistung* wird über das andere Tor wieder abgegeben. Die *Leistungsbilanz* für die Schaltung in Bild 5.61b muss wegen der unterschiedlichen Zählpeilsysteme an den beiden Toren (Primärseite: VZS, Sekundärseite: EZS) in Form von Gl. (2.75) mit der komplexen Leistung nach Gl. (5.152) aufgestellt werden:

$$\sum S_{\text{EZS}} = S_2 = \underline{U}_2 I_2^* = \sum S_{\text{VZS}} = S_1 = \underline{U}_1 I_1^* \quad (5.340)$$

Werden in Gl. (5.340) die Spannungen auf die rechte und die Ströme auf die linke Seite der Gleichung gebracht und dann auf beiden Seiten die Beträge gebildet, folgt mit Gl. (5.339) die erweiterte Gleichung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \ddot{u}. \quad (5.341)$$

Sie gilt für beide Ersatzschaltbilder in Bild 5.61, da sie nur eine Aussage über die *Beträge* der komplexen Größen macht. Die Ströme werden im umgekehrten Verhältnis wie die Spannungen transformiert. Ein idealer Transformator ist also gleichermaßen idealer Spannungs- und Stromwandler.

Wird an die Sekundärseite des Transformators nach Bild 5.61b eine Impedanz $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2 / I_2$ angeschlossen, folgt mit den Gln. (5.340) und (5.341) die auf der Primärseite *wirksame* Impedanz

$$\underline{Z}'_2 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 I_2^*}{I_1 I_1^*} = \frac{U_2}{I_2} \cdot \frac{I_2 I_2^*}{I_1 I_1^*} = \frac{U_2}{I_2} \cdot \frac{I_2^2}{I_1^2} = \ddot{u}^2 \frac{U_2}{I_2} = \ddot{u}^2 \underline{Z}_2, \quad (5.342)$$

die zwar den gleichen Phasenwinkel wie \underline{Z}_2 , jedoch den \ddot{u}^2 -fachen Betrag (Scheinwiderstand) aufweist, was durch Bild 5.62 illustriert werden soll.

Ein Transformator ermöglicht also auch eine Umsetzung von Impedanzen, was als *Impedanztransformation* bezeichnet und in der Nachrichtentechnik intensiv eingesetzt wird.

⁷Da Gl. (5.339) nur eine Beziehung zwischen den *Effektivwerten* der Spannungen herstellt, ist die *Phasenlage* der Spannungen zueinander nicht festgelegt.

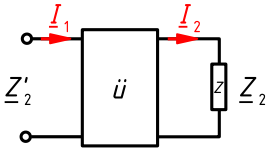


Bild 5.62: Idealer Transformator mit sekundärseitig angeschlossener Impedanz Z_2 und auf die Primärseite umgerechneter Impedanz Z'_2

Aus der Tatsache, dass ein idealer Transformator keine Energie speichern kann, folgt, dass die Zeitfunktionen der Klemmenspannungen zu identischen Zeitpunkten null werden müssen. Sinngemäßes gilt für die Zeitfunktionen der Klemmenströme. Die beiden Spannungen können also gleiche Phasenlage haben oder um 180° gegeneinander phasenverschoben sein. Diese Zweideutigkeit wird beseitigt, wenn die naheliegende Festlegung getroffen wird, dass bei $\tilde{u} = 1$ auch $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$ gelten soll, woraus sich in Erweiterung von Gl. (5.339)

$$\tilde{u} = \frac{U_1}{U_2} \tag{5.343}$$

ergibt. Aus der Leistungsbilanz Gl. (5.340) folgt dann, dass beim Ketten-Zählpeilsystem (Bild 5.61b) die Klemmenströme I_1 und I_2 *gleichphasig* sind, also

$$\tilde{u} = \frac{I_2}{I_1} \tag{5.344}$$

gilt. Beim symmetrischen Zählpeilsystem (Bild 5.61a) sind sie jedoch *gegenphasig*, es gilt also

$$\tilde{u} = \frac{-I_2}{I_1} . \tag{5.345}$$

Bei einem sekundärseitig leerlaufenden ($I_2 = 0$) idealen Transformator fließt somit auch kein Strom auf der Primärseite ($I_1 = 0$). Im Spezialfall $\tilde{u} = 1$ bewirkt ein idealer Transformator ausschließlich eine galvanische Trennung seiner beiden Tore.

Beispiel 5.32: Impedanztransformation

Bild 5.63a zeigt die Schaltung einer linearen Sinusspannungsquelle, die über einen idealen Transformator mit einer Lastimpedanz verbunden ist. Die lineare Quelle besteht aus einer idealen Spannungsquelle mit $|U_q| = 100\text{ V}$ und der reellwertigen Innenimpedanz $Z_i = R_i = 10\ \Omega$. Die Lastimpedanz ist ein Wirkwiderstand mit $Z_{\text{Last}} = R_{\text{Last}} = 1\text{ k}\Omega$.

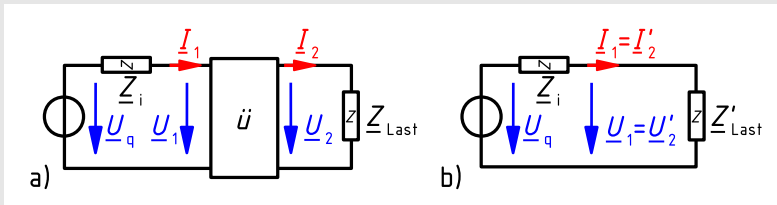


Bild 5.63: Lineare Sinusspannungsquelle, die über einen idealen Transformator mit einer Lastimpedanz verbunden ist (a) und Ersatzschaltung ohne Transformator mit auf die Primärseite umgerechneten Größen der Sekundärseite (b)

Gesucht sind das Übersetzungsverhältnis \tilde{u} des Transformators, bei dem die Last die größtmögliche Wirkleistung aufnimmt, der Wert P_{max} dieser Leistung und eine Ersatzschaltung,

die den *Leistungsfluss* in der Schaltung *ohne* Transformator modelliert.

Maximale Wirkleistung wird übertragen, wenn die *komplexe Anpassungsbedingung* Gl. (5.320) erfüllt ist. Die an den Klemmen der linearen Quelle *wirksame* Lastimpedanz muss gleich der konjugiert komplexen Innenimpedanz der Quelle sein. Im vorliegenden Fall reiner Wirkwiderstände muss der an den Klemmen der linearen Quelle wirksame Lastwiderstand mit dem Innenwiderstand der Quelle übereinstimmen. Der Transformator dient zur Erfüllung der Anpassungsbedingung mittels Impedanztransformation.

Die Lastimpedanz $\underline{Z}_{\text{Last}}$ an der Sekundärseite des Transformators wird gemäß Gl. (5.342) in die auf der Primärseite wirksame Impedanz $\underline{Z}'_{\text{Last}} = \ddot{u}^2 \underline{Z}_{\text{Last}}$ umgesetzt. Aus der Anpassungsbedingung folgt damit $R_i = \ddot{u}^2 R_{\text{Last}}$, also

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{R_i}{R_{\text{Last}}}} = \sqrt{\frac{10 \Omega}{1 \text{ k}\Omega}} = 0,1.$$

Mit Gl. (5.319) erhält man die im Anpassungsfall vom Lastwiderstand aufgenommene Wirkleistung

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{q}}^2}{4 R_i} = \frac{(100 \text{ V})^2}{4 \cdot 10 \Omega} = 250 \text{ W}.$$

Der Transformator bewirkt eine Umsetzung der Größen auf seiner Sekundärseite in entsprechende Größen auf seiner Primärseite. Diese Größen werden als *reduzierte* oder *gestrichene Größen* bezeichnet und durch einen hochgestellten Strich gekennzeichnet. Damit gelten folgende Korrespondenzen:

$$\underline{U}_2 \rightarrow \underline{U}'_2 = \ddot{u} \underline{U}_2 \quad (5.346)$$

$$\underline{I}_2 \rightarrow \underline{I}'_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \quad (5.347)$$

$$\underline{Z}_{\text{Last}} \rightarrow \underline{Z}'_{\text{Last}} = \ddot{u}^2 \underline{Z}_{\text{Last}} \quad (5.348)$$

Die Wirkung des Transformators in Bild 5.63a kann also bzgl. des Sinusstromverhaltens (bis auf die dann nicht mehr ersichtliche galvanische Trennung) ersetzt werden durch eine direkte Verbindung der beiden Tore und Verwendung der reduzierten Größen auf der Sekundärseite gemäß Bild 5.63b. Aus

$$\underline{S}'_2 = \underline{U}'_2 \cdot \underline{I}'_2^* = (\ddot{u} \cdot \underline{U}_2) \cdot \left(\frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2^* \right) = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = \underline{S}_2 \quad (5.349)$$

ist ersichtlich, dass beim Übergang auf reduzierte Größen zwar die Spannungen, Ströme und Impedanzen, nicht aber die Leistungen verändert werden. Diese Umrechnung wird daher als *leistungsinvariant* bezeichnet.

In entsprechender Weise wäre auch eine Umrechnung der Primärgrößen \underline{U}_{q} , \underline{Z}_i , \underline{I}_1 und \underline{U}_1 auf die Sekundärseite möglich.

Von dem in Beispiel 5.32 verwendeten Verfahren der Umrechnung von Klemmengrößen in reduzierte Größen wird bei der Berechnung elektrischer Energieversorgungsnetze intensiv Gebrauch gemacht.

5.13.2 Verlust- und streuungsloser Transformator

Der *verlust- und streuungslose Transformator* (VST) ist das einfachste Modell, das die technische Realisierung von Transformatoren durch *magnetisch gekoppelten Spulen* (Wicklung 1 mit N_1 Windungen und der Selbstinduktivität L_1 sowie Wicklung 2 mit N_2 Windungen und der Selbstinduktivität L_2) berücksichtigt. Die diesem Modell zugrunde liegenden Idealisierungen sind:

1. Der Transformator ist *verlustlos*. Die in einem realen Transformator auftretenden Verluste, die dazu führen, dass der Transformator selbst Wirkleistung benötigt und sich erwärmt, werden nicht berücksichtigt. Dieses Modell hat daher einen Wirkungsgrad von 100 %.
2. Beide Wicklungen des Transformators werden in jedem Betriebszustand von dem selben magnetischen Fluss Φ durchsetzt. Die in realen Transformatoren auftretenden *magnetischen Streuflüsse* (Abschnitt 4.3.1.5), die eine Verschlechterung der magnetischen Kopplung zwischen den beiden Wicklungen bewirken, werden vernachlässigt. Daher wird dieses Modell als *streuungslos* bezeichnet.

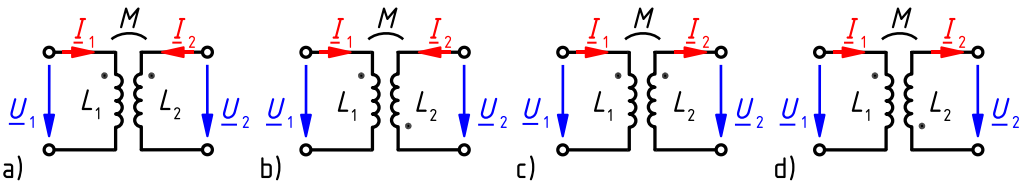


Bild 5.64: Ersatzschaltbild des verlust- und streuungslosen Transformators mit symmetrischem Zählpfeilsystem (a), (b) bzw. Ketten-Zählpfeilsystem (c), (d) und gleichsinnigem Wicklungssinn (a), (c) bzw. gegensinnigem Wicklungssinn (b), (d)

Bild 5.64 zeigt die vier möglichen Varianten des Ersatzschaltbildes dieses Modells, die jeweils aus zwei Induktivitätssymbolen bestehen. Sofern angedeutet werden soll, dass ein Transformator einen ferromagnetischen Kern enthält, wird zusätzlich ein vertikaler Strich zwischen die beiden Symbole gezeichnet.

Das *Übersetzungsverhältnis* \ddot{u} wird bei diesem und den in den folgenden Abschnitten behandelten Transformatormodellen in der Regel über die *Windungszahlen* definiert:

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} > 0 \quad (5.350)$$

Da die Selbstinduktivität L einer streuungsfreien Wicklung nach Gl. (4.105) proportional zum Quadrat ihrer Windungszahl N ist, gilt auch

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} > 0. \quad (5.351)$$

Der in Bild 5.64 über dem Bogen zwischen den beiden Induktivitätssymbolen eingetragene Parameter M ist die *Gegeninduktivität* (Abschnitt 4.3.1.6). Sie beschreibt den Betrag der (sinusförmigen) *Gegeninduktionsspannung*, die ein Sinusstrom einer bestimmten Frequenz, der in

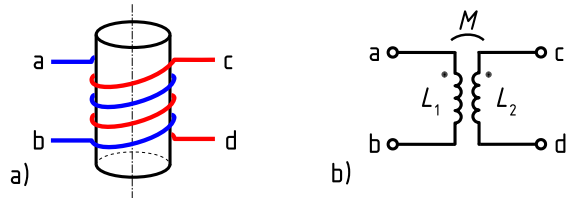
einer Wicklung fließt, in der *anderen* Wicklung erzeugt. Gegeninduktivitäten haben wie Selbstinduktivitäten die Einheit Henry.

Aus Gl. (4.118) folgt wegen der Streuungsfreiheit des Modells

$$M = \sqrt{L_1 L_2} > 0. \quad (5.352)$$

Die in Bild 5.64 an den Induktivitätssymbolen eingetragenen Punkte geben den *Wicklungssinn* der Wicklungen an: Liegen die *Wicklungspunkte* einander direkt gegenüber (Bild 5.64a und Bild 5.64c), sind die Wicklungen *gleichsinnig* gewickelt. Liegen sie einander diagonal gegenüber (Bild 5.64b und Bild 5.64d), haben die Wicklungen *gegensinnigen* Wicklungssinn.

Bild 5.65: Anordnung von zwei Wicklungen mit gleichsinnigem Wicklungssinn (a) mit zugehörigem Ersatzschaltbild (b)



Die Bedeutung des Wicklungssinns soll anhand der Anordnung in Bild 5.65 verdeutlicht werden. Bild 5.65a zeigt einen Wickelkörper, auf den, von oben beginnend, zwei Wicklungen aufgebracht wurden. Von den Wicklungsanfängen, die mit a bzw. c bezeichnet sind, sind die beiden Leiter in der gleichen Richtung (von oben gesehen im Uhrzeigersinn) auf den Wickelkörper gewickelt. Sie haben also *gleichen Wicklungssinn*. Das wird in der in Bild 5.65b dargestellten Ersatzschaltung dieser beiden magnetisch gekoppelten Spulen durch Wicklungspunkte für gleichsinnigen Wicklungssinn symbolisiert. Fließen Ströme mit gleichem Vorzeichen in die Wicklungsanfänge a und c, so erzeugen sie entlang der Achse des Wickelkörpers magnetische Flüsse Φ , die sich gegenseitig verstärken. Verändern sich diese Ströme in gleicher Art (Vergrößerung/Verkleinerung), so erzeugen sie in beiden Wicklungen Spannungen gleicher Polarität.

Bei Sinusgrößen kann nicht mit der Richtung der Ströme, sondern nur mit der Richtung ihrer Zählpfeile argumentiert werden. Wenn die *Zählpfeile* der Klemmenströme *bezüglich der beiden Wicklungspunkte* die gleiche Richtung haben, werden beim Aufstellen der Gleichungen für die Klemmenspannungen die Terme für die Gegeninduktionsspannungen mit dem gleichen Vorzeichen wie die für die Selbstinduktionsspannungen angesetzt, anderenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden.

Beispiel 5.33: Transformatorgleichungen bei gleichsinnigem Wicklungssinn

Für die in Bild 5.64a und Bild 5.64c dargestellten Ersatzschaltungen von Transformatoren mit gleichsinnigem Wicklungssinn sind die zugehörigen Transformatorgleichungen aufzustellen.

Im Ersatzschaltbild in Bild 5.64a liegt Verbraucher-Zählpfeilsystem an beiden Toren vor. Damit gilt für die *Selbstinduktionsspannungen*, die durch die beiden Klemmenströme hervorgerufen werden, nach Gl. (5.177):

$$\underline{U}_1(I_1) = j\omega L_1 I_1 \quad (5.353a)$$

$$\underline{U}_2(I_2) = j\omega L_2 I_2 \quad (5.353b)$$

Die durch die Klemmenströme in der jeweils anderen Wicklung hervorgerufenen *Gegeninduktionsspannungen* werden, da die Zählpfeile der Ströme beide zu den Wicklungspunkten hin weisen, mit dem gleichen Vorzeichen wie die Selbstinduktionsspannungen angesetzt:

$$\underline{U}_1(I_2) = j\omega MI_2 \quad (5.354a)$$

$$\underline{U}_2(I_1) = j\omega MI_1 \quad (5.354b)$$

Durch Überlagerung der beiden Spannungsanteile entstehen die *Transformatorgleichungen* für dieses Transformatormodell bei gleichsinnigem Wicklungssinn und symmetrischem Zählpfeilsystem:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad (5.355a)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \quad (5.355b)$$

Die Verwendung des symmetrischen Zählpfeilsystems führt zu mathematisch symmetrischen Gleichungen für die beiden Tore des Transformators.

Im Ersatzschaltbild in Bild 5.64c liegt Verbraucher-Zählpfeilsystem am Eingangstor und Erzeuger-Zählpfeilsystem am Ausgangstor vor. Damit gilt für die *Selbstinduktionsspannungen*, die durch die beiden Klemmenströme hervorgerufen werden:

$$\underline{U}_1(I_1) = j\omega L_1 I_1 \quad (5.356a)$$

$$\underline{U}_2(I_2) = -j\omega L_2 I_2 \quad (5.356b)$$

Die durch die Klemmenströme in der jeweils anderen Wicklung hervorgerufenen *Gegeninduktionsspannungen* werden, da die Zählpfeile der Ströme bezüglich der Wicklungspunkte unterschiedliche Richtungen haben, mit den entgegengesetztem Vorzeichen wie die Selbstinduktionsspannungen angesetzt:

$$\underline{U}_1(I_2) = -j\omega M I_2 \quad (5.357a)$$

$$\underline{U}_2(I_1) = j\omega M I_1 \quad (5.357b)$$

Durch Überlagerung der beiden Spannungsanteile entstehen die *Transformatorgleichungen* für dieses Transformatormodell bei gleichsinnigem Wicklungssinn und Ketten-Zählpfeilsystem:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \quad (5.358a)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2 \quad (5.358b)$$

Beispiel 5.34: Transformatorgleichungen bei gegensinnigem Wicklungssinn

Für die in Bild 5.64b und Bild 5.64d dargestellten Ersatzschaltungen von Transformatoren mit gegensinnigem Wicklungssinn sind die zugehörigen Transformatorgleichungen aufzustellen.

Für die Ersatzschaltung in Bild 5.64b mit symmetrischem Zählpfeilsystem ergeben sich die Selbstinduktionsspannungen nach Gl. (5.353). Die Vorzeichen der Gegeninduktionsspannungen kehren sich gegenüber Gl. (5.354) um, da die Zählpfeile der Klemmenströme

bezüglich der Wicklungspunkte nun unterschiedliche Richtungen haben. Daraus folgen die Transformatorgleichungen in der Form

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \quad (5.359a)$$

$$\underline{U}_2 = -j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2. \quad (5.359b)$$

Für die Ersatzschaltung in Bild 5.64d mit Ketten-Zählpfeilsystem folgen auf Basis der Selbstinduktionsspannungen nach Gl. (5.356) bei Umkehrung der Vorzeichen der Terme mit den Gegeninduktionsspannungen gegenüber Gl. (5.357) die Transformatorgleichungen in der Form

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \quad (5.360a)$$

$$\underline{U}_2 = -j\omega M \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2. \quad (5.360b)$$

In beiden Fällen kehrt sich das Vorzeichen aller Terme, die die Gegeninduktivität M enthalten, um. Diese mathematische Eigenschaft des Modells könnte dadurch nachgebildet werden, dass man bei gegensinnigem Wicklungssinn der Gegeninduktivität den negativen Wert der Wurzel in Gl. (5.352) zuweist.

Die Ergebnisse der Beispiele 5.33 und 5.34 bestätigen die Aussage, dass sich die Transformatorgleichungen für symmetrisches bzw. Ketten-Zählpfeilsystem ineinander überführen lassen, indem man die Vorzeichen der Terme, in denen der Faktor \underline{L}_2 enthalten ist, umkehrt.

Aus Beispiel 5.34 folgt allgemeingültig: Eine Umkehrung des Wicklungssinns führt zur Umkehrung des Vorzeichens aller Terme, die den Faktor M enthalten.

Durch die Angabe des Wicklungssinns wird die Mehrdeutigkeit der Phasenlagen von Eingangs- und Ausgangsgrößen zueinander, die beim idealen Transformator auftritt, beseitigt. Sofern keine Wicklungspunkte eingetragen sind, geht man bei Schaltplänen, die Transformatorsymbole enthalten, davon aus, dass die Transformatoren gleichsinnigen Wicklungssinn aufweisen.

Aus den Transformatorgleichungen ist ersichtlich, dass bei einem VST, der *sekundärseitig leerläuft* ($I_2 = 0$), auf der Primärseite nur die Selbstinduktivität L_1 wirksam ist. Es gilt also

$$\underline{Z}_{1L} = j\omega L_1. \quad (5.361)$$

Wird in diesem Fall eine Spannung \underline{U}_1 an die Primärseite gelegt, so fließt – im Gegensatz zum idealen Transformator – ein Primärstrom, der als *Magnetisierungsstrom* bezeichnet wird. Ein VST nimmt, da er ein induktives Zweitor ist, in jedem Betriebsfall Blindleistung auf.

Anstelle der Ersatzschaltung in Bild 5.64, die die magnetische Kopplung und galvanische Entkopplung der beiden Tore des Transformators durch die drei Induktivitäten L_1 , L_2 und M beschreibt, wird oft die *galvanisch gekoppelte T-Ersatzschaltung* gemäß Bild 5.66 verwendet.

Das *Klemmenverhalten* der Ersatzschaltung in Bild 5.66a wird durch die Gleichungen

$$\underline{U}_1 = j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (5.362a)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (5.362b)$$

beschrieben. Diese Gleichungen lassen sich einfach in Gl. (5.355) umformen. Entsprechend wird das Klemmenverhalten der Ersatzschaltung in Bild 5.66b durch Gl. (5.358) beschrieben. Bei gegensinnigem Wicklungssinn ist statt M der negative Wert $-M$ einzusetzen.

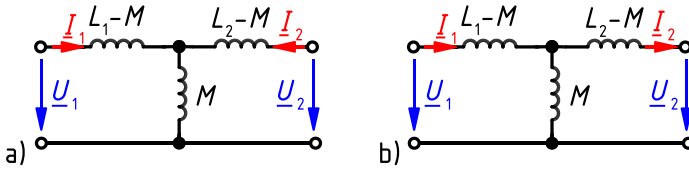


Bild 5.66: T-Ersatzschaltung des verlustlosen Transformators mit symmetrischem Zählpeilsystem (a) und Ketten-Zählpeilsystem (b)

Die T-Ersatzschaltung erleichtert die Berechnung von Schaltungen mit Transformatoren erheblich, da sie nicht die Kenntnis der Transformatorgleichungen voraussetzt, sondern nur die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze erfordert. Sie ist aber mit Vorsicht einzusetzen, da sie eine in der Regel nicht vorhandene galvanische Kopplung zwischen den beiden Toren vortäuscht, die zu falschen Ergebnissen führt, sofern nicht nur das Sinusstromverhalten, sondern auch das Gleichstromverhalten analysiert wird. Werden Primär- und Sekundärseite eines Transformators miteinander verschaltet, so führt die Verwendung der T-Ersatzschaltung eventuell zu falschen Ergebnissen. Lediglich dann, wenn tatsächlich eine Eingangs- und eine Ausgangsklemme des Transformators miteinander verbunden sind, was z. B. bei Spartransformatoren der Fall ist, ist die Verwendung der T-Ersatzschaltung unbedenklich.

Bei gleichsinnigem Wicklungssinn wird meist eine der beiden *Längsinduktivitäten* $L_1 - M$ oder $L_2 - M$ negativ. Bei gegensinnigem Wicklungssinn ist die *Querinduktivität* negativ. Dies zeigt, dass diese Ersatzschaltung lediglich ein Hilfsmittel zur Vereinfachung der Berechnung von Schaltungen mit Transformatoren darstellt. Die enthaltenen Induktivitäten sind nicht unmittelbar physikalisch interpretierbar.

Beispiel 5.35: Betriebsverhalten des verlust- und streuungslosen Transformators

Ein VST mit der Ersatzschaltung nach Bild 5.64c liegt an der Primärspannung \underline{U}_1 . Sekundärseitig ist die Impedanz $\underline{Z}_{\text{Last}}$ angeschlossen. Zu berechnen sind als Funktion von $\underline{Z}_{\text{Last}} = \underline{U}_2/\underline{I}_2$ a) das Verhältnis $\underline{I}_2/\underline{I}_1$, b) das Verhältnis $\underline{U}_1/\underline{U}_2$ sowie c) die auf der Primärseite wirksame Impedanz \underline{Z}_1 .

Die Fragestellungen können sowohl mittels der zugehörigen Transformator-Gleichungen (5.358) als auch unter Verwendung der T-Ersatzschaltung gemäß Bild 5.66b gelöst werden.

- a) Fasst man in der Ersatzschaltung in Bild 5.66b den Strom \underline{I}_1 als Gesamtstrom und den Strom \underline{I}_2 als Teilstrom auf, folgt mit der komplexen Stromteilerregel sowie den Gl. (5.351) und (5.352)

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega(L_2 - M) + \underline{Z}_{\text{Last}} + j\omega M} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + \underline{Z}_{\text{Last}}} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{u}} + \frac{\underline{Z}_{\text{Last}}}{j\omega M}} \neq \dot{u}. \quad (5.363)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich fundamental von der entsprechenden Gl. (5.344) für den idealen Transformator. Das Verhältnis der *Beträge* von Sekundär- und Primärstrom ist *lastabhängig* und die beiden Ströme haben im Allgemeinen *nicht die*

gleiche Phasenlage. Im Kurzschlussfall, also für $\underline{Z}_{\text{Last}} = 0$ folgt aus Gl. (5.363) jedoch speziell

$$\frac{\underline{I}_{2k}}{\underline{I}_{1k}} = \ddot{u}. \quad (5.364)$$

Der VST verhält sich *nur bei sekundärseitigem Kurzschluss* wie ein *idealer Stromwandler*.

- b) Löst man Gl. (5.363) nach dem Strom \underline{I}_2 auf, setzt diesen Ausdruck in beiden Zeilen der Transformatorgleichungen (5.358) ein und bildet den Quotienten der beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_1 \frac{j\omega M}{\underline{Z}_{\text{Last}} + j\omega L_2}}{-j\omega L_2 \underline{I}_1 \frac{j\omega M}{\underline{Z}_{\text{Last}} + j\omega L_2} + j\omega M \underline{I}_1}. \quad (5.365)$$

Mit den Gln. (5.351) und (5.352) folgt hieraus

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \ddot{u}. \quad (5.366)$$

Der VST verhält sich also *in jedem Betriebsfall* wie ein *idealer Spannungswandler*: Ein- und Ausgangsspannung haben die *gleiche Phasenlage* und das Verhältnis ihrer Beträge ist *belastungsunabhängig*.

- c) Bei Anschluss einer Lastimpedanz $\underline{Z}_{\text{Last}}$ wirkt an den Eingangsklemmen nach Bild 5.66 die Impedanz

$$\underline{Z}_1 = j\omega(L_1 - M) + j\omega M [j\omega(L_2 - M) + \underline{Z}_{\text{Last}}]. \quad (5.367)$$

Durch Umformens dieses Ausdrucks erhält man mit den Gln. (5.351) und (5.352)

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_{\text{Last}}} = \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_{\text{Last}}}{j\omega L_2 + \underline{Z}_{\text{Last}}} = \frac{1}{\ddot{u}^2 \underline{Z}_{\text{Last}} + \frac{1}{j\omega L_1}}. \quad (5.368)$$

Anschauliche Bedeutung: Die wirksame Eingangsimpedanz des VST wird gebildet durch die *Parallelschaltung* der Impedanz der Primärwicklung $j\omega L_1$ und der gemäß Gl. (5.342) auf der Primärseite wirksamen Lastimpedanz $\ddot{u}^2 \underline{Z}_{\text{Last}}$. Für $|\underline{Z}_{\text{Last}}| \rightarrow \infty$, also sekundärseitigen Leerlauf, geht Gl. (5.368) in Gl. (5.361) über.

Das Klemmenverhalten des VST geht in das des idealen Transformators über, wenn der magnetische Leitwert Λ des magnetischen Kreises unendlich groß wird. Dann würden bei unverändertem \ddot{u} die Selbstinduktivitäten der beiden Wicklungen unendlich groß werden. Dies würde ein Kernmaterial mit unendlich großer Permeabilität ($\mu \rightarrow \infty$) und ohne jeglichen Luftspalt in Richtung des magnetischen Flusses erfordern. Beides ist nicht realisierbar. Sehr große und hochwertige Transformatoren kommen diesem Ideal aber recht nahe.

5.13.3 Transformator mit Streuung ohne Verluste

Dieses Transformator-Modell entspricht dem im vorigen Abschnitt behandelten, jedoch wird berücksichtigt, dass die magnetische Kopplung zwischen den beiden Toren nicht mehr ideal ist. An Stelle von Gl. (5.352) tritt nun allgemeiner die Beziehung

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} > 0 \quad (5.369)$$

mit dem *Kopplungsgrad* k , für den $0 < k < 1$ gilt. Der VST kann als Grenzfall dieses Modells mit $k = 1$ aufgefasst werden. Ein weit verbreiteter Irrtum besteht darin, anzunehmen, dass die Streuung den Wirkungsgrad des Transformators vermindert. Der Begriff „Streuverluste“ ist jedoch irreführend, da die Streuung – zumindest unmittelbar – keine Verluste bewirkt.

Da sich dieses Modell von dem in Abschnitt 5.13.2 behandelten nur bzgl. der Berechnung der Gegeninduktivität M unterscheidet, gelten die Ersatzschaltungen in den Bildern 5.64 und 5.66 und die zugehörigen Transformatorgleichungen auch hier. Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt jedoch Gl. (5.366) nicht mehr.

Beispiel 5.36: Verlustloser Übertrager mit Streuung

Für einen verlustlosen Übertrager mit den Selbstinduktivitäten $L_1 = 720 \text{ mH}$, $L_2 = 180 \text{ mH}$, gleichsinnigem Wicklungssinn und dem Kopplungsgrad $k = 0,9$ sollen bestimmt werden a) das Übersetzungsverhältnis, b) die Elemente der T-Ersatzschaltung nach Bild 5.66b, c) das Spannungsverhältnis $\underline{U}_1/\underline{U}_2$ für sekundärseitigen Leerlauf und d) das Stromverhältnis $\underline{I}_2/\underline{I}_1$ für sekundärseitigen Kurzschluss.

a) Aus Gl. (5.351) folgt

$$\ddot{u} = \sqrt{L_1/L_2} = \sqrt{720 \text{ mH}/180 \text{ mH}} = 2.$$

b) Für die Gegeninduktivität folgt mit Gl. (5.369)

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,9\sqrt{720 \text{ mH} \cdot 180 \text{ mH}} = 324 \text{ mH}.$$

Die Induktivitäten in der Ersatzschaltung haben somit die Werte

$$L_1 - M = 396 \text{ mH}, \quad L_2 - M = -144 \text{ mH}, \quad M = 324 \text{ mH}.$$

c) Für sekundärseitigen Leerlauf liefert die komplexe Spannungsteilerregel Gl. (5.233) sowie die Gln. (5.351) und (5.369)

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{j\omega(L_1 - M) + j\omega M}{j\omega M} = \frac{L_1}{M} = \frac{L_1}{k\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{k}\ddot{u} = 2,22 > \ddot{u}.$$

d) Aus Gl. (5.363) folgt für $\underline{Z}_{\text{Last}} = 0$ mit den Gln. (5.351) und (5.369)

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{M}{L_2} = \frac{k\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} = k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k\ddot{u} = 1,8 < \ddot{u}.$$

Trotz der physikalisch nicht interpretierbaren negativen Induktivität $L_2 - M = -144 \text{ mH}$ in der Ersatzschaltung sind die Ergebnisse der Rechnung richtig, wovon man sich durch Anwenden der Transformatorgleichungen in Form von Gl. (5.358) überzeugen kann.

Wichtig ist die Erkenntnis, dass die Ergebnisse von denen für den verlust- und streuungslosen Transformator abweichen. In beiden betrachteten Betriebsfällen sind die Größen auf der Sekundärseite kleiner als bei Vernachlässigung der Streuung.

5.13.4 Transformator mit Streuung und Kupferverlusten

Die beim Betrieb von Transformatoren auftretenden Verluste werden unterteilt in die *Kupferverluste*, die in den Wicklungen entstehen, und die im ferromagnetischen Kern auftretenden *Eisenverluste*. Beide Bezeichnungen sind historisch begründet und werden auch verwendet, wenn die Wicklungen nicht aus Kupfer und der Kern nicht aus Eisen bestehen.

Ursache der Kupferverluste sind der Stromfluss durch die (temperaturabhängigen) Wirkwiderstände der Wicklungen sowie die evtl. zu berücksichtigende (frequenzabhängige) *Stromverdrängung*, die zu einer Verringerung des effektiv genutzten Leiterquerschnitts führt und somit wie eine Widerstandserhöhung wirkt.

Im *Leerlauf* sind die Kupferverluste gegenüber den von der Belastung weitgehend unabhängigen Eisenverlusten vernachlässigbar. Große Transformatoren werden meist so dimensioniert, dass die Eisenverluste im *Nennbetrieb* ca. 20 % der Kupferverluste betragen. Die Eisenverluste werden daher zunächst vernachlässigt.

Ausgehend von dem Modell in Bild 5.66b werden die Kupferverluste dadurch berücksichtigt, dass Wirkwiderstände $R_{1\text{Cu}}$ bzw. $R_{2\text{Cu}}$ in Reihe zu den Längsinduktivitäten geschaltet werden.

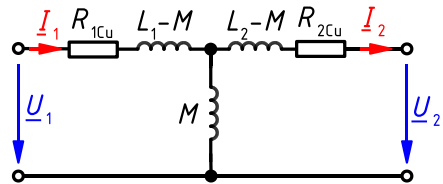


Bild 5.67: T-Ersatzschaltung des Transformators mit Berücksichtigung der Kupferverluste bei Ketten-Zählpfeilsystem

Hierdurch werden die Transformatorgleichungen erweitert und lauten z. B. für die Ersatzschaltung in Bild 5.67

$$\underline{U}_1 = (R_{1\text{Cu}} + j\omega L_1) \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \quad (5.370a)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1 - (R_{2\text{Cu}} + j\omega L_2) \underline{I}_2. \quad (5.370b)$$

Nun sollen die Größen der Sekundärseite auf die Primärseite umgerechnet werden. Dazu wird zunächst Gl. (5.370) etwas komplizierter aufgeschrieben:

$$\underline{U}_1 = R_{1\text{Cu}} \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - \ddot{u} M) \underline{I}_1 + j\omega \ddot{u} M \left(\underline{I}_1 - \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2 \right) \quad (5.371a)$$

$$\ddot{u} \underline{U}_2 = -\ddot{u}^2 R_{2\text{Cu}} \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2 - j\omega(\ddot{u}^2 L_2 - \ddot{u} M) \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2 + j\omega \ddot{u} M \left(\underline{I}_1 - \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2 \right) \quad (5.371b)$$

Für den prinzipiell beliebig wählbaren Faktor \ddot{u} in Gl. (5.371) wird das in Gl. (5.350) definierte Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = N_1/N_2$ eingesetzt. Damit können einzelnen Termen neue Symbole zugewiesen werden, die eine *anschauliche Bezeichnung und physikalische Bedeutung* haben. In der ersten Zeile wird als neue Größe die *primäre Streuinduktivität*

$$L_{1\sigma} = L_1 - \ddot{u} M \tag{5.372}$$

definiert. In der zweiten Zeile wird neben der bereits eingeführten reduzierten Sekundärspannung $\underline{U}'_2 = \ddot{u} \underline{U}_2$ und dem reduzierten Sekundärstrom $\underline{I}'_2 = \underline{I}_2/\ddot{u}$ als neue Größe die *reduzierte sekundäre Streuinduktivität*

$$L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 L_{2\sigma} = \ddot{u}^2 \left(L_2 - \frac{M}{\ddot{u}} \right) = \ddot{u}^2 L_2 - \ddot{u} M \tag{5.373}$$

eingeführt. Die in der ersten Zeile auftretende *primäre Hauptinduktivität*

$$L_{1h} = \ddot{u} M \tag{5.374}$$

kommt auch in der zweiten Zeile als *reduzierte sekundäre Hauptinduktivität*

$$L'_{2h} = \ddot{u}^2 L_{2h} = \ddot{u}^2 \left(\frac{1}{\ddot{u}} M \right) = \ddot{u} M \tag{5.375}$$

vor. Sie wird daher in der Ersatzschaltung in Bild 5.68 durch das selbe Schaltungselement repräsentiert.

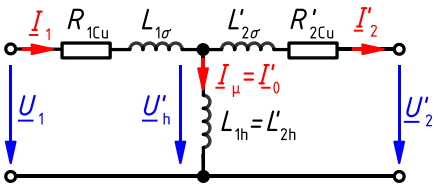


Bild 5.68: T-Ersatzschaltung des Transformators mit Kupferverlusten und reduzierten Größen bei Ketten-Zählpfeilsystem

Damit ergeben sich die Transformatorgleichungen für das in Bild 5.68 verwendete Ketten-Zählpfeilsystem in der Form

$$\underline{U}_1 = R_{1Cu} \underline{I}_1 + j\omega L_{1\sigma} \underline{I}_1 + j\omega L_{1h} (\underline{I}_1 - \underline{I}'_2), \tag{5.376a}$$

$$\underline{U}'_2 = -R'_{2Cu} \underline{I}'_2 - j\omega L'_{2\sigma} \underline{I}'_2 + j\omega L'_{2h} (\underline{I}_1 - \underline{I}'_2). \tag{5.376b}$$

Nachfolgend wird der Zusammenhang zwischen den Elementen der elektrischen Ersatzschaltung in Bild 5.68 und den magnetischen Flüssen, die im Transformator auftreten, erläutert. Diese Betrachtung setzt die Kenntnis der in Abschnitt 4.3.1.5 behandelten Inhalte voraus.

Die primäre Hauptinduktivität nach Gl. (5.374) kann als derjenige Teil

$$L_{1h} = \ddot{u} M = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} k \sqrt{L_1 L_2} = k L_1$$

der Primärspulen-Induktivität L_1 beschrieben werden, der mit der Erzeugung des *primären magnetischen Nutzflusses* Φ_{12} (Bild 4.48) in Zusammenhang gebracht werden kann. Entsprechende Zusammenhänge lassen sich zwischen der sekundären Hauptinduktivität L_{2h} und dem

sekundären Nutzfluss Φ_{21} sowie zwischen der primären (bzw. sekundären) Streuinduktivität $L_{1\sigma}$ (bzw. $L_{2\sigma}$) und dem primären (bzw. sekundären) Streufluss $\Phi_{1\sigma}$ (bzw. $\Phi_{2\sigma}$) herstellen. Für einen streuungsfreien Transformator gilt daher $L_{1\sigma} = L_{2\sigma} = 0$.

Der *reduzierte Magnetisierungsstrom*

$$\underline{I}'_{\mu} = \underline{I}_1 - \underline{I}'_2 = \underline{I}_1 - \frac{1}{u} \underline{I}_2 \tag{5.377}$$

ist der Strom, der – von der Primärseite aus betrachtet – zur Erzeugung des magnetischen Nutzflusses $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ erforderlich ist. Bei einem Transformator ohne Eisenverluste ist er mit dem *primärseitigen Leerlaufstrom* \underline{I}'_0 identisch. Er ist mit dem magnetischen Nutzfluss in Phase und eilt der *Hauptfeldspannung*

$$\underline{U}'_h = j\omega L_{1h} \underline{I}'_{\mu} \tag{5.378}$$

um 90° nach.

5.13.5 Transformator mit Streuung und Verlusten

Nun werden auch die durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes im Kern verursachten Eisenverluste berücksichtigt. Diese Verluste setzen sich zusammen aus den *Ummagnetisierungsverlusten*, die auch als *Hystereseverluste* bezeichnet werden (Abschnitt 4.3.2.1) sowie den *Wirbelstromverlusten* (Abschnitt 4.3.1.7). Die Eisenverluste sind näherungsweise proportional zum Quadrat der maximalen magnetischen Flussdichte im Transformator und damit zum Quadrat der Spannung. Sie steigen etwa linear mit der Frequenz an.

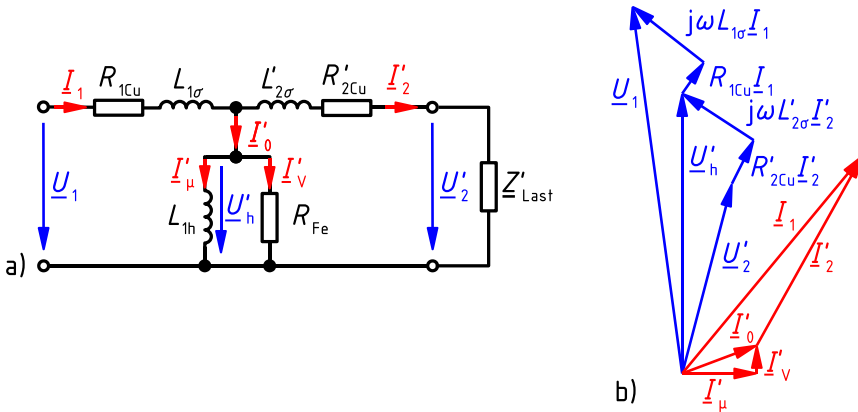


Bild 5.69: T-Ersatzschaltung des Transformators mit Streuung und Verlusten bei sekundärseitiger Belastung unter Verwendung reduzierter Größen (a) und qualitatives Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm für diese Ersatzschaltung bei ohmsch-induktiver Last (b)

In der Ersatzschaltung in Bild 5.69a werden die Eisenverluste durch den parallel zur Hauptinduktivität L_{1h} liegenden Wirkwiderstand R_{Fe} berücksichtigt. Der Leerlaufstrom \underline{I}'_0 erhält

dadurch neben seiner Blindkomponente, dem Magnetisierungsstrom \underline{I}'_{μ} , auch einen Wirkanteil, nämlich den mit der Hauptfeldspannung \underline{U}'_h gleichphasigen Verluststrom \underline{I}'_v .

Die durch diese Ersatzschaltung beschriebene Modellstruktur ist bei Verwendung richtiger Werte der Modellparameter in der Lage, das Sinusstromverhalten von Transformatoren bei beliebigen Lastfällen sehr gut nachzubilden.

Bild 5.69b zeigt das qualitative U-I-Zeigerdiagramm der Schaltung in Bild 5.69a für eine ohmsch-induktive Lastimpedanz. Um den Aufbau des Diagramms zu verdeutlichen, sind die Zeiger der Spannungen $R_{1Cu} \underline{I}_1$, $j\omega L_{1\sigma} \underline{I}_1$, $R'_{2Cu} \underline{I}'_2$ und $j\omega L'_{2\sigma} \underline{I}'_2$ übertrieben groß dargestellt. In der Praxis erreichen ihre Beträge nur wenige Prozent der Beträge von \underline{U}_1 und \underline{U}'_2 .

5.13.6 Vereinfachte Ersatzschaltung mit reduzierten Größen

In der Energietechnik wird das Klemmenverhalten von Leistungstransformatoren im *Nennbetrieb* oftmals näherungsweise durch die in Bild 5.70 dargestellte vereinfachte Ersatzschaltung beschrieben.

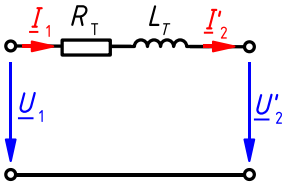


Bild 5.70: Vereinfachte Ersatzschaltung des Transformators mit reduzierten Größen

Dieses Modell ergibt sich aus der in Bild 5.69a dargestellten Ersatzschaltung durch Vernachlässigung des Leerlaufstroms \underline{I}'_0 . Die verbleibenden *Längswiderstände* werden zu

$$R_T = R_{1Cu} + R'_{2Cu} \quad (5.379)$$

und die *Längsreaktanzen* zu

$$L_T = L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} \quad (5.380)$$

zusammengefasst.



6 Ortskurven

In Kapitel 5 wurden Sinusstrom-Netzwerke betrachtet. Dabei wurde vorausgesetzt, dass alle Größen, die das Verhalten des Netzwerks bestimmen wie Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten sowie die Frequenz und Amplitude der anregenden Ströme und Spannungen *zeitlich konstant* sind. In der Praxis ist aber häufig die Abhängigkeit der Betriebseigenschaften von einer oder mehreren dieser Größen wichtig. Beispielsweise interessiert in der Nachrichtentechnik der Einfluss der Frequenz auf die Eigenschaften einer Schaltung oder in der Energietechnik die Abhängigkeit der Spannung von der Belastung, d. h. dem Widerstand. Man betrachtet also die interessierende Größe, z. B. Spannung oder Strom, in Abhängigkeit von einer als *Variable* aufgefassten *reellen* Größe, die üblicher Weise als *Parameter* bezeichnet wird.

Bei derartigen Untersuchungen ist unbedingt zu beachten, in welcher Art sich der Parameter zeitlich ändert. Betrachtet man z. B. die Spannung u an einer konstanten Induktivität L , durch die ein Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ fließt, in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω , so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Änderung der Kreisfrequenz des Stromes entsprechend einer Zeitfunktion $\omega_t = f(t)$ wird in die Betrachtungen einbezogen. Dann kann für den einzelnen Wert ω *kein eingeschwungener Zustand* der Schaltung vorausgesetzt werden. Die sich nach Gl. (4.120) ergebende Spannung

$$u = L \frac{d}{dt} i = L \hat{i} \frac{d}{dt} [\sin(\omega_t t)] = L \hat{i} [\cos(\omega_t t)] \left(\omega_t + t \frac{d}{dt} \omega_t \right)$$

ist nicht sinusförmig und *kann daher nicht mehr als komplexe Größe dargestellt werden*.

2. Jeder einzelne Wert der Kreisfrequenz ω wird als konstant angenommen. Dann kann für jeden Wert von ω ein *eingeschwungener Zustand* der Schaltung (alle Reaktionsgrößen sind gleichfrequente Sinusgrößen) vorausgesetzt werden, für den sich eine mittels der komplexen Rechnung bestimmbare Sinusspannung $\underline{U} = j\omega L \underline{I}$ einstellt.

In diesem Kapitel werden *nur eingeschwungene Zustände* betrachtet, die sich bei Veränderung eines reellen Parameters einstellen. Jeder Wert des Parameters muss also jeweils so lange konstant gehalten werden, bis sich für die von diesem Wert abhängige interessierende Größe der eingeschwungene Zustand eingestellt hat.

6.1 Grundlagen

Zeigerdiagramme stellen in anschaulicher Weise Summen und Differenzen komplexer Größen dar. In der Sinusstromtechnik sind dies gleichfrequente Sinusspannungen oder -ströme, aber auch zeitunabhängige Größen wie Impedanzen, Admittanzen und komplexe Leistungen. Zeigerdiagramme gelten jeweils nur für eine bestimmte, konstante Frequenz und bestimmte, konstante Werte der Schaltungselemente.

Soll eine komplexe Größe in einem Sinusstromnetzwerk in Abhängigkeit von einer variablen reellen Größe dieser Schaltung (z. B. Induktivität, Kapazität, Widerstand oder Frequenz) dargestellt werden, könnte man für verschiedene – jeweils als konstant angenommene – Werte dieser

Variablen das Zeigerdiagramm der komplexen Größe konstruieren und so das Schaltungsverhalten durch eine Vielzahl von Zeigerdiagrammen beschreiben. Eine solche Darstellung würde schnell unübersichtlich. Man stellt daher nur die *Menge der Endpunkte der Zeiger* der interessierenden *komplexen Größe* dar, die sich bei Variation des *reellen Parameters* ergeben. Diese Kurve wird als *Ortskurve* bezeichnet.

In der Regel wird mit einem Pfeil neben oder auf der Ortskurve die Richtung gekennzeichnet, in der die Ortskurve für wachsende Werte des Parameters durchlaufen wird. Neben den Pfeil wird der Name des Parameters geschrieben. Sofern von einer Ortskurve Werte abgelesen werden sollen, sind auf der Ortskurve hinreichend viele Werte des Parameters zu markieren. Dieser Vorgang wird als *Parametrieren der Ortskurve* bezeichnet.

Beispiel 6.1 soll den Zusammenhang zwischen Zeigerbild und Ortskurve verdeutlichen und die Parametrierung einer Ortskurve demonstrieren.

Beispiel 6.1: Entwicklung der Impedanz-Ortskurve einer RL-Reihenschaltung

Die Ortskurve der Impedanz $Z(\omega)$ einer Reihenschaltung aus Wirkwiderstand R und Induktivität L gemäß Bild 6.1a ist aus der Zeigerdiagrammdarstellung zu entwickeln.

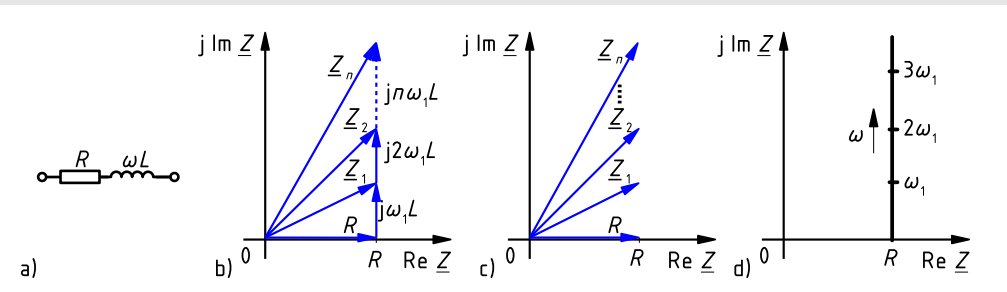


Bild 6.1: Entwicklung der Ortskurve einer Impedanz $\underline{Z} = R + j\omega L$ mit dem Parameter ω

- Schaltung
- vollständige Zeigerdiagramme für die Kreisfrequenzen $\omega_1, 2\omega_1, \dots, n\omega_1$
- resultierende Zeiger für \underline{Z}
- parametrierte Ortskurve für \underline{Z}

Zunächst werden mehrere einzelne Zeigerdiagramme der Impedanz $\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L$ konstruiert, die jeweils für eine konstante Kreisfrequenz $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots, n\omega_1$ gelten (Bild 6.1b). Im ersten Abstraktionsschritt werden nur noch die resultierenden Zeiger $\underline{Z}(\omega)$ dargestellt und mit dem zugehörigen Wert des Parameters ω bezeichnet (Bild 6.1c). Schließlich wird nur noch die *Kurve* gezeichnet, auf der die Spitzen *aller* Zeiger liegen und diese Ortskurve mit Werten von ω parametriert (Bild 6.1d).

Aus *quantitativen Ortskurven* können sowohl *Betrag und Phasenlage* als auch *Real- und Imaginärteil* komplexer Funktionen einfach abgelesen werden.

Quantitative Ortskurven werden üblicher Weise mit geeigneter Software (z. B. MatLab) berechnet und dargestellt. In diesem Kapitel wird zur Förderung des Verständnisses die schrittweise Konstruktion einiger quantitativer Ortskurven ohne solche Hilfsmittel demonstriert.

Sehr häufig werden *qualitative Ortskurven* verwendet, da die *Form* einer Ortskurve oftmals Rückschlüsse auf wesentliche Eigenschaften des durch sie beschriebenen Systems (z. B. Stabilität, Resonanzfrequenzen) erlaubt. Wichtig sind insbesondere Anfangs- und Endpunkt der Ortskurve sowie die Existenz von Schnittpunkten mit der reellen oder der imaginären Achse. Qualitative Ortskurven lassen sich für einfache Anordnungen mit etwas Übung schnell schrittweise skizzieren.

Sowohl quantitative als auch qualitative Ortskurven spielen in Physik und Technik eine große Rolle, u. a. in der Sinusstromtechnik, der Systemtheorie und der Regelungstechnik.

6.2 Konstruktion einfacher Ortskurven

In diesem Abschnitt werden Ortskurven von Strömen, Spannungen, Impedanzen und Admittanzen hergeleitet, die bei einfachen Zweipolen auftreten. Bezüglich der allgemeinen Theorie und Konstruktionsregeln für Ortskurven sei auf [BDHG06] und [Fet73] verwiesen.

In Beispiel 6.2 werden die Ortskurven einer einfachen Schaltung konstruiert, bei der unterschiedliche Größen als Parameter aufgefasst werden.

Beispiel 6.2: Spannungs-Ortskurven einer RX-Reihenschaltung bei konstantem Klemmenstrom

Betrachtet wird die in Bild 6.2a dargestellte Reihenschaltung aus einem Wirkwiderstand $R \geq 0$ und einem Blindwiderstand $-\infty < X < \infty$.

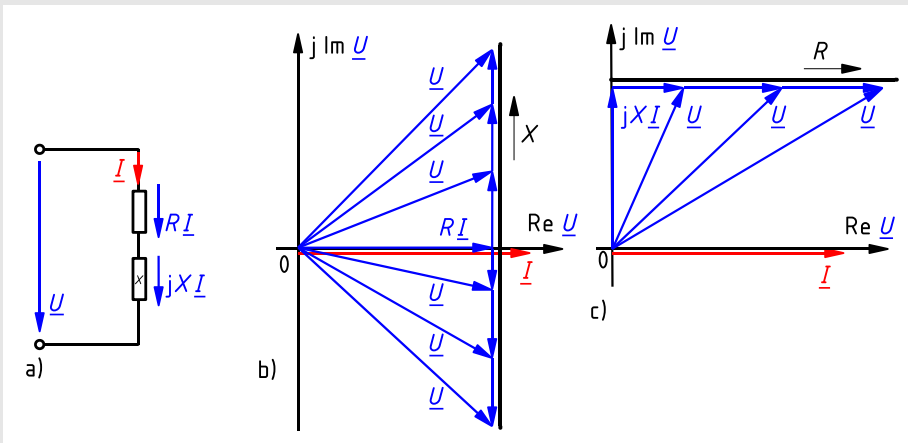


Bild 6.2: Ortskurven der Spannung \underline{U} an einer Reihenschaltung (a) aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X bei konstantem Strom \underline{I} für variablen Blindwiderstand X (b) bzw. variablen Wirkwiderstand R (c)

Dem Zweipol wird ein Klemmenstrom \underline{I} eingeprägt.

Die Konstruktion der Ortskurven der Klemmenspannung \underline{U} des Zweipols ist ausführlich darzustellen für den Fall, dass

- a) der Wirkwiderstand R konstant und der Blindwiderstand X variabel
 - b) der Blindwiderstand X konstant und der Wirkwiderstand R variabel
- ist. (Der variable Blindwiderstand kann z. B. durch eine Reihenschaltung aus Kapazität und Induktivität erreicht werden, die bei unterschiedlichen Frequenzen betrieben wird.)

Aus dem Maschensatz folgt die Beziehung zwischen den Klemmengrößen des Zweipols

$$\underline{U} = R\underline{I} + jX\underline{I}. \quad (6.1)$$

Der Stromzeiger \underline{I} wird als Bezugszeiger auf die positive reelle Achse der komplexen Ebene gelegt.

- a) Der Zeiger der Wirkspannung $R\underline{I}$ liegt auf der reellen Achse, da er mit dem Stromzeiger \underline{I} in Phase ist. An der Spitze des Zeigers $R\underline{I}$ wird rechtwinklig der Zeiger der Blindspannung $jX\underline{I}$ angetragen. Da X negativ, null oder positiv sein kann, ergeben sich die in Bild 6.2b dargestellten Spannungszeigerdiagramme. Dementsprechend wandert der Endpunkt des Spannungszeigers \underline{U} auf der zur reellen Achse senkrechten Geraden durch den Punkt $R\underline{I}$. Diese Gerade (in Bild 6.2b dick schwarz ausgezogen und zur besseren Sichtbarkeit etwas nach rechts verschoben gezeichnet) ist somit die gesuchte Ortskurve der Klemmenspannung \underline{U} für variablen Blindwiderstand X . Sie kann ggf. mit Werten von X parametrisiert werden.
- b) Der konstante Spannungszeiger $jX\underline{I}$ liegt auf der imaginären Achse (in Bild 6.2c ist willkürlich $X > 0$ angenommen worden). Von dessen Spitze ausgehend ist der Zeiger der Wirkspannung $R\underline{I}$ parallel zur reellen Achse anzutragen. Die Spitze des Zeigers der Klemmenspannung \underline{U} liegt also je nach Größe von R irgendwo auf der Halbgeraden durch den Punkt $jX\underline{I}$ im ersten Quadranten der komplexen Ebene. Die Ortskurve (in Bild 6.2c dick schwarz ausgezogen) verläuft somit parallel zur reellen Achse durch den Punkt $jX\underline{I}$. Sie kann ggf. mit Werten von R parametrisiert werden.

Division von Gl. (6.1) durch den Strom \underline{I} ergibt die Impedanz der Schaltung in Bild 6.2a

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX. \quad (6.2)$$

Sobald man das Konstruktionsprinzip und die Bedeutung von Ortskurven verstanden hat, verzichtet man in so einfachen Fällen wie in Beispiel 6.2 auf das Einzeichnen einzelner Zeigerdiagramme.

Allgemein ergeben sich innerhalb eines passiven Zweipols mit beliebig komplizierter innerer Struktur bei einheitlichem Zählpfeilsystem an den Impedanzen ähnliche (kongruente) Zeigerdiagramme und damit Ortskurven wie für die zugehörigen Spannungen.

Die Ortskurven von Impedanz \underline{Z} und Klemmenspannung $\underline{U} = \underline{I}\underline{Z}$ unterscheiden sich bei Reihenschaltungen lediglich um den Maßstabsfaktor \underline{I} . Ein solcher komplexer, einheitenbehafteter Proportionalitätsfaktor verursacht im Allgemeinen eine Drehstreckung von Zeigerdiagrammen bzw. Ortskurven.

In Beispiel 6.2 wird der nicht vorgegebene Nullphasenwinkel des Klemmenstroms \underline{I} zu null

angenommen. Dadurch reduziert sich die Drehstreckung auf eine Streckung einschließlich Dimensionsänderung, hier von „Widerstand“ in „Spannung“. Die Ortskurven der Impedanz der Schaltung sind daher kongruent zu den dargestellten Ortskurven der Klemmenspannung.

In Beispiel 6.3 wird die erste quantitative Ortskurve konstruiert.

Beispiel 6.3: Quantitative Impedanz-Ortskurve einer RLC-Reihenschaltung

Betrachtet wird eine Reihenschaltung aus Wirkwiderstand $R = 15 \Omega$, Induktivität $L = 0,2 \text{ H}$ und Kapazität $C = 30 \mu\text{F}$.

Die Ortskurve der Impedanz \underline{Z} soll für Frequenzen im Bereich $f = 40 \text{ Hz}$ bis 100 Hz schrittweise konstruiert und parametrisiert werden.

Für verschiedene Frequenzen werden Zeigerdiagramme der Impedanz $\underline{Z} = R + j[\omega L - 1/(\omega C)]$ der Schaltung gezeichnet (Bild 6.3). Der von der Frequenz unabhängige Zeiger des Wirkwiderstandes R liegt auf der reellen Achse. Von dessen Spitze ausgehend wird der Zeiger des Blindwiderstandes $X = \omega L - 1/(\omega C)$ parallel zur imaginären Achse in negativer oder positiver Richtung (abhängig vom Wert von $\omega = 2\pi f$) angetragen. Also ist die Ortskurve die in Bild 6.3 dick ausgezogene Gerade. Ihre Parametrierung erfolgt in der Einheit Hz für die Variable Frequenz f .

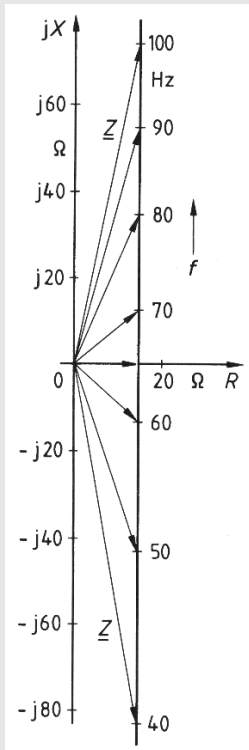


Bild 6.3: Ortskurve der Impedanz \underline{Z} zu Beispiel 6.3

Bei $f = 65 \text{ Hz}$ (Resonanzfrequenz f_{res}) ist die Impedanz $Z = R = 15 \Omega$ reell und hat ihren minimalen Betrag (Resonanzfall). Für $f < f_{\text{res}}$ wirkt die Schaltung ohmsch-kapazitiv, für

$f > f_{\text{res}}$ ohmsch-induktiv. In den Grenzfällen $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$ geht $Z \rightarrow \infty$, da bei $f \rightarrow 0$ der Scheinwiderstand der Kapazität und bei $f \rightarrow \infty$ der Scheinwiderstand der Induktivität gegen Unendlich geht. Die Ortskurve der Impedanz strebt für diese Extremwerte gegen $(15 - j\infty)\Omega$ bzw. $(15 + j\infty)\Omega$.

Die in Beispiel 6.3 behandelte Schaltung wird in Abschnitt 7.2.4.1 im Beispiel 7.9 als elementarer Reihenschwingkreis aufgefasst und genauer analysiert.

In den vorangegangenen Beispielen haben die Ortskurven die Form von Geraden bzw. Halbgeraden. Die in Beispiel 6.4 konstruierten Ortskurven haben die Form eines Kreises bzw. Halbkreises.

Beispiel 6.4: Strom-Ortskurve einer RX-Reihenschaltung bei konstanter Klemmenspannung

Betrachtet wird wieder die in Beispiel 6.2 untersuchte Reihenschaltung aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X (Bild 6.2a), die jetzt jedoch an einer *eingepprägten Klemmenspannung* \underline{U} liegt.

Die Ortskurven des Klemmenstromes \underline{I} des Zweipols sind schrittweise herzuleiten für den Fall, dass

- der Wirkwiderstand R konstant und der Blindwiderstand X variabel bzw.
- der Blindwiderstand X konstant und der Wirkwiderstand R variabel ist.

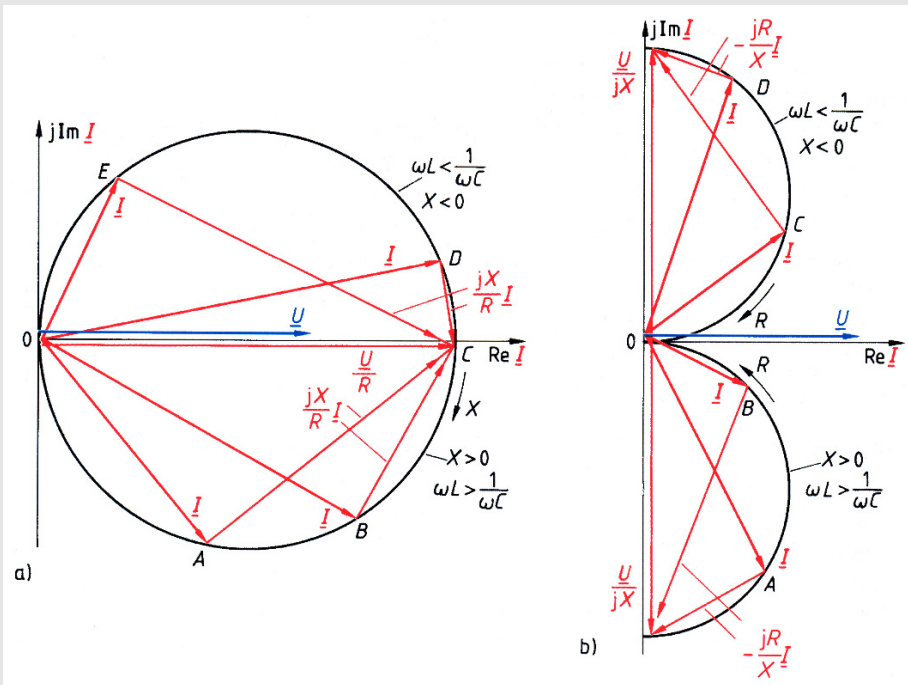


Bild 6.4: Ortskurven des Stroms \underline{I} in einer Reihenschaltung nach Bild 6.2a aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X bei konstanter Spannung \underline{U} als Funktion des Blindwiderstandes X (a) bzw. des Wirkwiderstandes R (b)

- a) Die Spannungsgleichung (6.1) wird durch den konstanten Wert R dividiert. In der daraus folgenden Stromgleichung

$$\frac{\underline{U}}{R} = \underline{I} + j \frac{X}{R} \underline{I} \quad (6.3)$$

haben alle drei Terme, also auch die Ausdrücke \underline{U}/R und $j(X/R)\underline{I}$, den Charakter von Stromzeigern. Für die Darstellung der Gl. (6.3) als Zeigerdiagramm wird die Klemmenspannung \underline{U} als Bezugszeiger gewählt und auf die reelle Achse gelegt. Damit liegt der gleichphasige Stromzeiger \underline{U}/R ebenfalls auf der reellen Achse. Die Zeiger $j(X/R)\underline{I}$ stehen *senkrecht auf den Zeigern \underline{I}* und eilen ihnen für $X > 0$ um 90° vor, für $X < 0$ um 90° nach. Die Summe der beiden Zeiger muss für jeden Wert des Parameters X den konstanten Stromzeiger \underline{U}/R ergeben. Daher müssen die drei Stromzeiger ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Zeiger \underline{U}/R die Grundseite (Hypotenuse) bildet (Bild 6.4a). Aus der Geometrie ist bekannt, dass die Eckpunkte der rechten Winkel aller rechtwinkligen Dreiecke auf einem Kreis (*Thaleskreis*) um den Mittelpunkt der Hypotenuse liegen.

In Bild 6.4a sind für einige Werte von X die Stromzeiger \underline{I} eingezeichnet, die vom Ursprung der komplexen Ebene zu einem der Punkte A bis E auf dem Thaleskreis weisen. Dieser Thaleskreis ist somit die gesuchte Ortskurve des Klemmenstroms \underline{I} . Der Kreis wird für wachsende Werte von X im Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Parametrierung beginnt für $X \rightarrow -\infty$ unmittelbar über dem Ursprung. Bei $X = 0$ schneidet die Ortskurve die reelle Achse im Punkt C. Für $X \rightarrow \infty$ endet sie unmittelbar unter dem Ursprung. Im oberen Halbkreis eilt \underline{I} gegenüber \underline{U} vor, der Zweipol hat also ohmsch-kapazitiven Charakter. Im unteren Halbkreis eilt \underline{I} gegenüber \underline{U} nach, d. h. die Schaltung verhält sich ohmsch-induktiv.

- b) Die Spannungsgleichung (6.1) wird nun durch den konstanten Wert jX dividiert, woraus die Stromgleichung

$$\frac{\underline{U}}{jX} = -j \frac{\underline{U}}{X} = \underline{I} - j \frac{R}{X} \underline{I} \quad (6.4)$$

folgt. Die Stromzeiger \underline{I} und $-j(R/X)\underline{I}$ auf der rechten Seite von Gl. (6.4) stehen senkrecht aufeinander. Für $X < 0$ eilt $-j(R/X)\underline{I}$ gegenüber \underline{I} um 90° vor, für $X > 0$ um 90° nach. Die Summe der beiden Zeiger ist in jedem Fall gleich dem konstanten Stromzeiger $\underline{U}/(jX)$. Daraus folgt in Analogie zu Fall a), dass der Zeiger $\underline{U}/(jX)$ die Hypotenuse eines Thaleskreises bildet, auf dem die durch \underline{I} und $\underline{U}/(jX)$ gebildeten rechten Winkel liegen.

Die Klemmenspannung \underline{U} wird wieder als Bezugszeiger gewählt und auf die reelle Achse gelegt. Für $X > 0$ (ohmsch-induktives Verhalten) liegt dann der Zeiger $\underline{U}/(jX)$ auf der negativen imaginären Achse (unterer Teil von Bild 6.4b), so dass die Endpunkte der Stromzeiger \underline{I} auf dem halben Thaleskreis im 4. Quadranten über dem Zeiger $\underline{U}/(jX)$ liegen. Für $X < 0$ (ohmsch-kapazitives Verhalten) liegt der Zeiger $\underline{U}/(jX)$ auf der positiven imaginären Achse (oberer Teil von Bild 6.4b). Die Endpunkte der Stromzeiger \underline{I} liegen auf dem halben Thaleskreis im 1. Quadranten über dem Zeiger $\underline{U}/(jX)$. Je nach Vorzeichen des konkret gegebenen Blindwiderstandes bildet einer der beiden Halbkreise die gesuchte Ortskurve des Stromes \underline{I} .

In den bisher behandelten Beispielen entstanden *elementare Ortskurven* (in Form einer Geraden oder eines Kreises oder eines Teils einer dieser Formen). In Beispiel 6.5 werden zwei elementare Ortskurven addiert, wobei eine nicht elementare Ortskurve entsteht.

Beispiel 6.5: Quantitative Strom-Ortskurven in einer Parallelschaltung von Spule und Kondensator

Die Ortskurve der Zweigströme und des Gesamtstroms einer Parallelschaltung von verlustbehafteter Spule und verlustbehaftetem Kondensator an einer Sinusspannung mit festem Betrag und variabler Frequenz ist zu konstruieren.

Die Spule wird gemäß Ersatzschaltbild in Bild 6.5a durch die Reihenschaltung von Induktivität $L = 0,2\text{H}$ und Wirkwiderstand $R_1 = 50\Omega$ modelliert, der Kondensator durch die Reihenschaltung von Kapazität $C = 30\mu\text{F}$ und Wirkwiderstand $R_2 = 20\Omega$. Die Klemmenspannung hat den konstanten Betrag $U = 100\text{V}$.

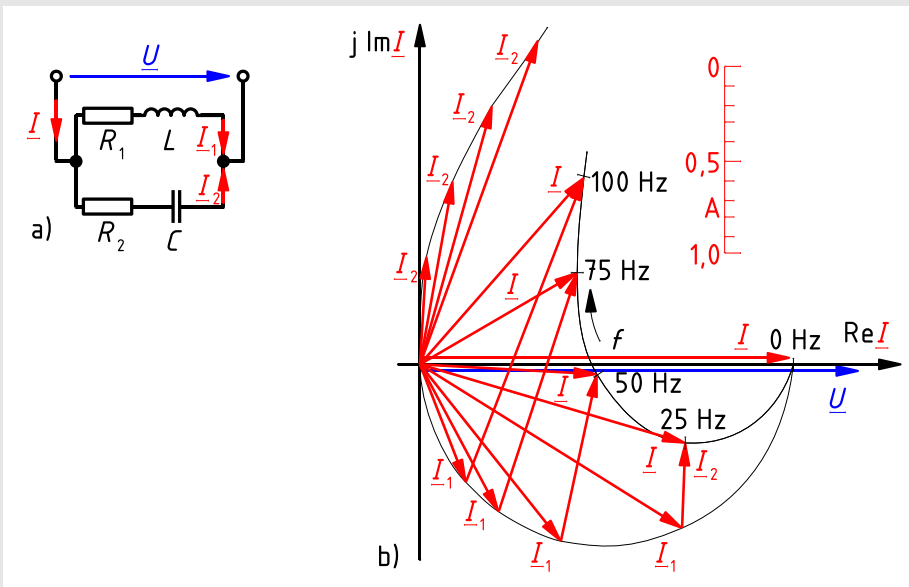


Bild 6.5: Ersatzschaltbild (a) zu Beispiel 6.5 und Ortskurven der Ströme (b)

Die Ortskurven der Zweigströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und des Gesamtstroms \underline{I} sollen für die Frequenzen zwischen $f \rightarrow 0\text{ Hz}$ und $f = 100\text{ Hz}$ konstruiert werden.

Die Klemmenspannung \underline{U} als Bezugsgröße wird auf die positive reelle Achse gelegt. Danach werden mit Gl. (5.239) bzw. (5.249) und Gl. (5.240) bzw. (5.250) für einzelne Frequenzen innerhalb des betrachteten Frequenzbereiches die Scheinwiderstände Z_1 bzw. Z_2 und Phasenverschiebungswinkel φ_1 bzw. φ_2 des oberen bzw. des unteren Zweiges und damit die Zweigströme \underline{I}_1 bzw. \underline{I}_2 berechnet. (Hier sind nur die Ergebnisse für fünf Frequenzen dargestellt.)

Der obere Zweig wirkt ohmsch-induktiv, also eilen die Ströme \underline{I}_1 der Spannung \underline{U} nach. Der untere Zweig wirkt ohmsch-kapazitiv, so dass die Ströme \underline{I}_2 gegenüber \underline{U} voreilen.

Bei $f \rightarrow 0 \text{ Hz}$ fließt wegen $Z_L = \omega L \rightarrow 0$ ein reiner Wirkstrom $I = I_1 = 2 \text{ A}$ im Zweig 1, während Zweig 2 wegen $Z_C = 1/(\omega C) \rightarrow \infty$ stromlos ist. Bei $f \rightarrow \infty$ fließt, da jetzt $1/(\omega C) \rightarrow 0$ gilt, nur der Wirkstrom $I = I_2 = 5 \text{ A}$ im Zweig 2, während Zweig 1 wegen $Z_L = \omega L \rightarrow \infty$ stromlos ist.

Die Ortskurve von \underline{I}_1 ist ein Halbkreis im 4. Quadranten, die Ortskurve von \underline{I}_2 ein Halbkreis im 1. Quadranten (der nur so weit, wie für die konkrete Fragestellung erforderlich, eingezeichnet ist).

Die Ortskurve von \underline{I} ergibt sich durch die Addition der Ortskurven von \underline{I}_1 und \underline{I}_2 . Ortskurven werden addiert, indem ihre Werte für gleiche Werte des Parameters addiert werden. Hier wird die punktweise Addition für diejenigen Frequenzwerte durchgeführt, für die bereits die beiden Teilströme berechnet wurden. Die Addition wird in Bild 6.5b durch geometrische Addition einzelner Zeiger \underline{I}_1 und \underline{I}_2 verdeutlicht.

Die in Beispiel 6.5 betrachtete Schaltung kann als Modell eines verlustbehafteten Schwingkreises aufgefasst werden. Bei einer Frequenz von etwas über 50 Hz sind Klemmenstrom und Klemmenspannung in Phase; der Zweipol wirkt bei dieser *Resonanzfrequenz* wie ein reiner Wirkwiderstand.

Entsprechend der Aussage nach Beispiel 6.2 zur Ähnlichkeit von Impedanz- und Spannungs-Ortskurven gilt: Innerhalb eines passiven Zweipols mit beliebig komplizierter innerer Struktur ergeben sich wegen $\underline{I} = \underline{U} \underline{Y}$ bei einheitlichem Zählpfeilsystem für die Admittanzen ähnliche (kongruente) Zeigerdiagramme und damit Ortskurven wie für die zugehörigen Ströme.

Die Ortskurven der Admittanzen des oberen bzw. unteren Zweiges der Schaltung sowie der Gesamtschaltung sind also kongruent zu den Ortskurven der entsprechenden Ströme in Bild 6.5b.

Die im folgenden Beispiel 6.6 dargestellten Ortskurven bilden Schleifen, haben also Schnittpunkte mit sich selbst. Ortskurven noch komplizierterer Schaltungen können auch mehrere Schleifen enthalten.

Beispiel 6.6: Quantitative Admittanz- und Impedanz-Ortskurven einer gemischten Schaltung

Betrachtet wird ein Zweipol, der gemäß Bild 6.6a aus einer Parallelschaltung von zwei Zweigen besteht. Der eine Zweig enthält nur die Kapazität $C_p = 5,0 \text{ nF}$. Im anderen Zweig sind der Wirkwiderstand $R = 50 \Omega$, die Induktivität $L = 80 \mu\text{H}$ und die Kapazität $C = 12,5 \text{ nF}$ in Reihe geschaltet.

Die Ortskurven der Admittanz $\underline{Y}_g(\omega)$ und der Impedanz $\underline{Z}_g(\omega)$ des Zweipols sollen für einen Kreisfrequenzbereich $\omega = 0,5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ bis $\omega = 4,0 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ (entsprechend etwa $f = 80 \text{ kHz}$ bis $f = 640 \text{ kHz}$) unter Verwendung einzelner Stützwerte ermittelt werden.

Mit der Admittanz $\underline{Y}_{C_p}(\omega) = j\omega C_p = j\omega \cdot 5,0 \text{ nF}$ der Kapazität C_p und der Impedanz der Reihenschaltung

$$\underline{Z}_r = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 50 \Omega + j\left(\omega \cdot 80 \mu\text{H} - \frac{1}{\omega \cdot 12,5 \text{ nF}}\right)$$

ergibt sich zunächst die Gesamtadmittanz

$$\underline{Y}_g(\omega) = \underline{Y}_{C_p}(\omega) + \frac{1}{\underline{Z}_r(\omega)} = j\omega C_p + \frac{1}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]} = G_g(\omega) + jB_g(\omega) \quad (6.5)$$

des Zweipols.

Um die Ortskurve dieser Admittanz zu zeichnen, werden Kreisfrequenzwerte in sinnvoller Stufung angenommen und für jeden dieser Werte die Admittanz berechnet. Diese Rechnung kann mit Hilfe eines Taschenrechners oder eines geeigneten Programms zur numerischen Mathematik durchgeführt werden. Die berechneten Admittanzwerte \underline{Y}_g werden als Punkte in die komplexe \underline{Y} -Ebene übertragen und mit den zugehörigen Kreisfrequenzwerten parametrisiert (dick hervorgehobene einzelne Punkte in Bild 6.6b). Mit den aus Gl. (6.5) ablesbaren Grenzwerten $\underline{Y}_g(\omega \rightarrow 0) = 0$ und $\underline{Y}_g(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow j\infty$ sowie den eingetragenen Stützpunkten lässt sich ein Linienzug zeichnen, der die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}_g(\omega)$ des Zweipols darstellt (Bild 6.6b).

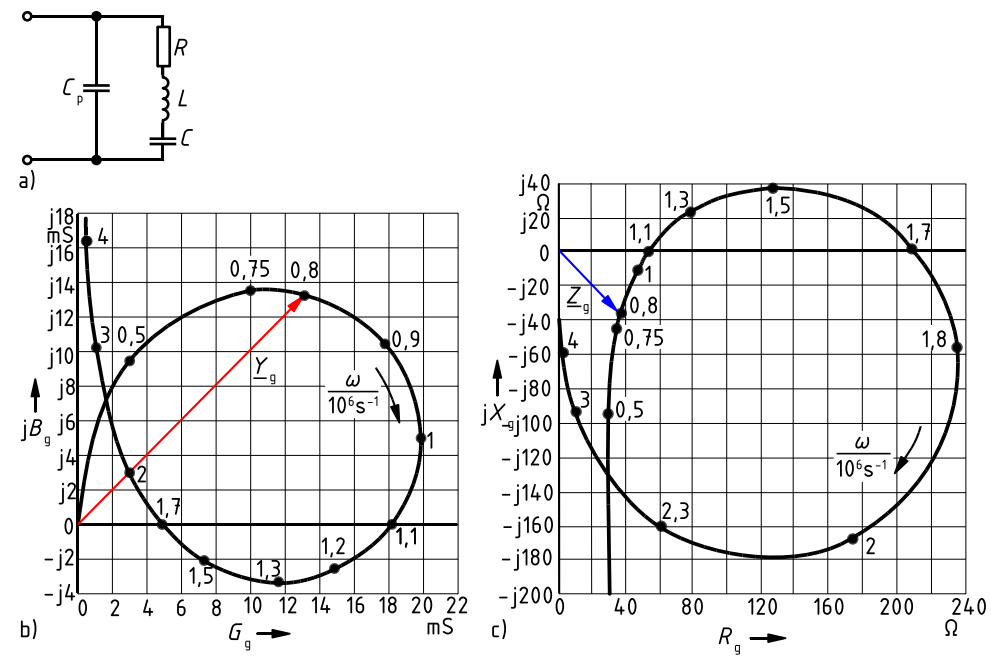


Bild 6.6: Schaltung des Zweipols (a) zu Beispiel 6.6 sowie Ortskurven seiner Admittanz \underline{Y}_g (b) und Impedanz \underline{Z}_g (c)

Die Ortskurve beginnt im Ursprung, durchläuft im Uhrzeigersinn eine Schleife, die zweimal die reelle Achse schneidet und endet asymptotisch auf der positiven imaginären Achse.

Auf dieser Ortskurve kann nun auch für Werte von ω zwischen den markierten Stützpunkten die Admittanz nach Betrag und Phase oder Real- und Imaginärteil abgelesen werden. Dies

ist in Bild 6.6b exemplarisch für $\omega = 0,8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ dargestellt und durch Einzeichnen des zugehörigen Zeigers für \underline{Y}_g hervorgehoben.

Die Impedanz des Zweipols ist der Kehrwert seiner Admittanz nach Gl. (6.5):

$$\underline{Z}_g(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}_g(\omega)} = \frac{1}{G_g + jB_g} = \frac{G_g}{G_g^2 + B_g^2} + j \frac{-B_g}{G_g^2 + B_g^2} = R_g(\omega) + jX_g(\omega) \quad (6.6)$$

Die Stützwerte zur Konstruktion der Ortskurve der Impedanz werden einzeln durch Bilden des Kehrwertes der Stützwerte für die Admittanz berechnet und in die komplexe \underline{Z} -Ebene eingetragen. Durch Einsetzen von Gl. (6.5) in Gl. (6.6) erhält man die Grenzwerte $\underline{Z}_g(\omega \rightarrow 0) \rightarrow -j\infty$ und $\underline{Z}_g(\omega \rightarrow \infty) = 0$. Damit lässt sich die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_g(\omega)$ des Zweipols gemäß Bild 6.6c zeichnen. Sie kommt asymptotisch von der negativen imaginären Achse, bildet ebenfalls eine Schleife im Uhrzeigersinn mit zwei Schnittpunkten mit der reellen Achse und endet im Ursprung.

Die in Beispiel 6.6 behandelte Schaltung ist ein Beispiel für einen *Schwingkreis mit zwei Freiheitsgraden* (Abschnitt 7.2.6). Die beiden Kreisfrequenzen, bei denen Admittanz und Impedanz der Schaltung reell werden, also die Schnittpunkte der beiden zugehörigen Ortskurven mit den reellen Achsen, sind die *Resonanzkreisfrequenzen* des Zweipols. Bei der ersten Resonanzkreisfrequenz $\omega_{\text{res1}} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ stimmt der Klemmenwiderstand des Schwingkreises in diesem Beispiel ungefähr mit dem in der Schaltung enthaltenen Wirkwiderstand $R = 50 \Omega$ überein. Bei der zweiten Resonanzkreisfrequenz $\omega_{\text{res2}} \approx 1,7 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ beträgt der aus Bild 6.6c abgelesene, an den Klemmen wirksame Wirkwiderstand des Schwingkreises etwa 210Ω .

Wie dieses Beispiel zeigt, ist es möglich, mit Schwingkreisen Widerstände zu transformieren, was in der Nachrichtentechnik eingesetzt wird, um die Bedingung für die Leistungsanpassung bei einer bestimmten Frequenz ohne den Einsatz von Transformatoren zu erfüllen.

6.3 Inversion von Ortskurven

Unter der Inversion einer komplexen Größe versteht man die Bildung ihres Kehrwertes. Diese Operation ist in der Elektrotechnik besonders wichtig, da die Admittanz der Kehrwert der Impedanz ist und umgekehrt. Mittels der Inversion können die bei der Anwendung des Ohmschen Gesetzes für Sinusstrom evtl. erforderlichen Divisionen in Multiplikationen überführt werden: der Quotient $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}$ kann nach Inversion der Impedanz \underline{Z} mittels der Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ als Produkt $\underline{I} = \underline{U}\underline{Y}$ ausgedrückt werden.

Analytisch lässt sich die Inversion einer komplexen Größe einfach durchführen, wenn man sie in der Exponentialform darstellt. Die zur Impedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ inverse Größe ist die Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{j\varphi^*}. \quad (6.7)$$

Durch Vergleich der Beträge und Argumente der beiden rechten Terme in Gl. (6.7) erkennt man, dass bei der Inversion

1. der *Kehrwert des Betrages* zu bilden und
2. das *Vorzeichen des Arguments umzukehren*

ist.

Die Bedeutung der Inversion komplexer Größen kommt erst bei der Inversion von Ortskurven voll zur Geltung. Kennt man eine Ortskurve, z. B. die Abhängigkeit der Impedanz von der Frequenz, und will man die Abhängigkeit des Kehrwertes dieser Größe darstellen, also hier die der Admittanz von der Frequenz, so muss die gegebene Ortskurve invertiert werden.

Aus Punkt 1. folgt, dass bei der Inversion Teile einer Ortskurve, die weit vom Ursprung der komplexen Ebene entfernt sind, auf Teile der inversen Ortskurve abgebildet werden, die nah am Ursprung liegen und umgekehrt. Aus Punkt 2. folgt, dass Ortskurventeile, die im 1. Quadranten (bzw. 2. Quadranten) der komplexen Ebene liegen, auf Teile der inversen Ortskurve im 4. Quadranten (bzw. 3. Quadranten) abgebildet werden und umgekehrt.

Ist die zu einer Ortskurve gehörige komplexe Funktion bekannt, so können nach der Bildung des Kehrwerts der Funktion einzelne Stützwerte zur Konstruktion der inversen Ortskurve berechnet werden. Ansonsten ist eine Ortskurve *punktweise* zu invertieren, d. h. für einzelne Werte des reellen Parameters sind die Kehrwerte der zugehörigen komplexen Werte auf der Ortskurve zu berechnen und als Stützwerte zur Konstruktion der inversen Ortskurve einzutragen, was sehr aufwändig sein kann.

Aus der Inversionsvorschrift für einzelne komplexe Größen wurden *Regeln* [BDHG06] abgeleitet, mittels derer *elementare Ortskurven* (d. h. Geraden oder Kreise) *direkt* invertiert werden können:

1. Die Inversion einer *Geraden durch den Nullpunkt* ergibt wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.
2. Die Inversion einer *Geraden, die nicht durch den Nullpunkt* geht, ergibt einen Kreis durch den Nullpunkt.
3. Die Inversion eines *Kreises durch den Nullpunkt* ergibt eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.
4. Die Inversion eines *Kreises, der nicht durch den Nullpunkt* geht, ergibt wieder einen Kreis, der nicht durch den Nullpunkt geht.

Die Kenntnis dieser Regeln kann langwierige Rechnungen ersparen. Weiß man nämlich, dass die gesuchte inverse Ortskurve eine Gerade oder ein Kreis ist, brauchen nur zwei bzw. drei Werte der inversen Größe berechnet zu werden, um die vollständige Ortskurve zeichnen zu können: Eine Gerade wird durch zwei beliebige unterschiedliche Punkte bestimmt. Ein Kreis wird durch drei beliebige unterschiedliche Punkte bestimmt oder durch zwei spezielle Punkte, nämlich den, der am nächsten am Ursprung liegt und den, der vom Ursprung am weitesten entfernt ist. Im zweiten Fall muss der Mittelpunkt des Kreises in der Mitte dieser beiden Punkte liegen.

Ist eine Ortskurve nur ein Teil einer Geraden oder eines Kreises, können die oben genannten Regeln sinngemäß angewandt werden. Die invertierte Ortskurve ist dann ebenfalls nur ein Teil einer Geraden bzw. eines Kreises. Dies wird in Beispiel 6.7 gezeigt.

Beispiel 6.7: Inversion einer Ortskurve, die ein Teil einer Geraden ist

Die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}(X) = 1/\underline{Z} = 1/(R + jX)$ einer Reihenschaltung aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X soll als Funktion der Variablen $X \geq 0$ dargestellt werden.

Die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}(X) = R + jX$ ist nach Beispiel 6.2 Teil a) der im 1.

Quadranten liegende Teil einer zur imaginären Achse parallelen Geraden in der \underline{Z} -Ebene entsprechend Bild 6.7a. Deren Inverse, also die Ortskurve von $\underline{Y}(X)$, muss daher Teil eines Kreises im 4. Quadranten der \underline{Y} -Ebene sein.

Zur Konstruktion des (vollständigen!) Kreises reicht es aus, die beiden Punkte der (vollständigen!) Geraden mit dem kleinsten bzw. dem größten Abstand vom Ursprung zu invertieren:

Der erste Punkt ist $\underline{Z}(X = 0) = R$ auf der reellen Achse. Er wird zu dem Punkt des Kreises, der den größten Abstand vom Ursprung hat, hier also $\underline{Y}(X = 0) = 1/R$.

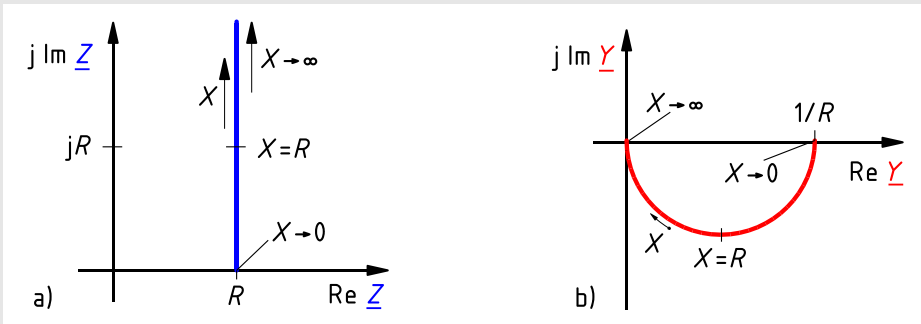


Bild 6.7: Zueinander inverse Ortskurven $\underline{Z} = R + jX$ und $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

Der zweite Punkt ist $\underline{Z}(X \rightarrow \infty) \rightarrow R + j\infty$, der unendlich weit vom Ursprung entfernt ist. Er wird zu demjenigen Punkt des Kreises, der den kleinsten Abstand vom Ursprung hat, was hier wegen $\underline{Y}(X \rightarrow \infty) = 0$ der Ursprung selbst ist. Der Mittelpunkt des Kreises muss in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten liegen, also bei $\underline{Y} = 1/(2R)$ auf der reellen Achse. Damit ist die gesuchte invertierte Ortskurve eindeutig bestimmt: Es ist der in Bild 6.7b eingezeichnete Halbkreis.

Folgende Tatsache vereinfacht die Umsetzung der Regel 2: Derjenige Punkt, der auf einer Geraden den kleinsten Abstand vom Ursprung hat, wird auf denjenigen Punkt des dazu inversen Kreises abgebildet, der am weitesten vom Ursprung entfernt ist. Der Punkt, der auf einer Geraden den größten Abstand vom Ursprung hat (was immer ein unendlich ferner Punkt ist), wird auf denjenigen Punkt des Kreises abgebildet, der am nächsten am Ursprung liegt (was stets der Ursprung selbst ist). Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Mitte dieser beiden Punkte. Bei der Anwendung der Regel 3 ist das eben Gesagte in umgekehrter Richtung anzuwenden.

Bei der Anwendung der Regel 4 brauchen auch nur die beiden Punkte des Kreises invertiert zu werden, die den kleinsten und den größten Abstand vom Ursprung haben. Sie ergeben die beiden Punkte des invertierten Kreises, die den größten bzw. den kleinsten Abstand vom Ursprung haben. Der Mittelpunkt des invertierten Kreises liegt in der Mitte der beiden Punkte.

Besonders wichtig ist die Inversion bei der Konstruktion der Ortskurven von Impedanz oder Admittanz von *gemischten Schaltungen*. Dabei geht man schrittweise „von Innen nach Außen“ vor. Bei einer Reihenschaltung werden die Teil-Ortskurven der Impedanzen der in Reihe geschalteten Zweipole addiert, bei einer Parallelschaltung die Teil-Ortskurven der Admittanzen der einzelnen Zweige. Hierbei sind evtl. schrittweise mehrere Inversionen erforderlich. Dies wird anhand des Beispiels 6.8 demonstriert.

Beispiel 6.8: Schrittweise Konstruktion qualitativer Ortskurven mit mehrfacher Inversion

Bild 6.8a zeigt das Ersatzschaltbild einer Parallelschaltung von Spule und Kondensator. Die Verluste der Spule werden durch einen Widerstand R_L in Reihe mit der Induktivität L modelliert, die Verluste des Kondensators durch einen Widerstand R_C parallel zur Kapazität C . Vereinfachend wird angenommen, dass die Parameter L , R_L , C und R_C frequenzunabhängig sind.

Die qualitativen Ortskurven der Admittanz $\underline{Y}(\omega)$ und der Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ des Zweipols sind schrittweise zu konstruieren.

Zunächst wird die Ortskurve des aus R_L und L bestehenden Schaltungszweiges, der die Spule modelliert, konstruiert. Da es sich um eine Reihenschaltung handelt, werden die Impedanz-Ortskurven der beiden Zweipole addiert. Die Ortskurve $\underline{Z}(\omega) = R_L$ besteht aus dem Punkt R_L auf der positiven reellen Achse der \underline{Z} -Ebene. Die Ortskurve $\underline{Z}(\omega) = j\omega L$ liegt auf der positiven imaginären Achse. Die resultierende Ortskurve $\underline{Z}_{\text{Spule}}(\omega) = R_L + j\omega L$ ist die in Bild 6.8b dargestellte Halbgerade im 1. Quadranten der \underline{Z} -Ebene.

Nun wird die Ortskurve der Parallelschaltung von R_C und C , die den Kondensator modelliert, konstruiert. Hierzu werden die Admittanz-Ortskurven der beiden Zweipole addiert. Die Ortskurve $\underline{Y}(\omega) = 1/R_C$ besteht aus dem Punkt $1/R_C$ auf der positiven reellen Achse der \underline{Y} -Ebene. Die Ortskurve $\underline{Y}(\omega) = j\omega C$ liegt auf der positiven imaginären Achse. Die resultierende Ortskurve $\underline{Y}_{\text{Kond}}(\omega) = 1/R_C + j\omega C$ ist die in Bild 6.8c dargestellte Halbgerade im 1. Quadranten der \underline{Y} -Ebene.

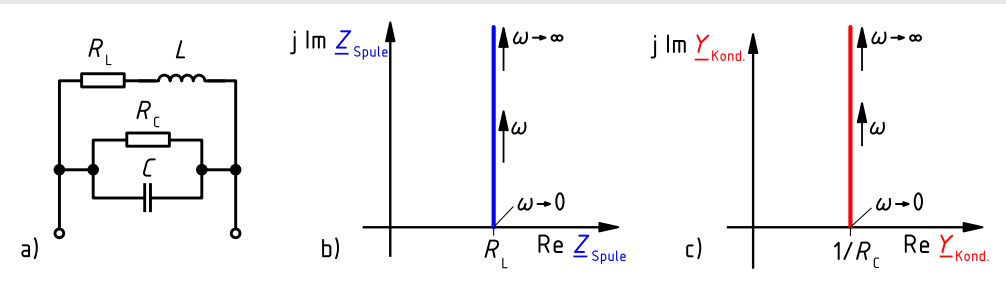


Bild 6.8: Ersatzschaltbild eines Parallelschwingkreises aus verlustbehafteter Spule und verlustbehaftetem Kondensator (a) mit Ortskurven der Impedanz der Spule (b) und der Admittanz des Kondensators (c)

Im nächsten Schritt wird die Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$ der Gesamtschaltung durch Addition der Admittanz-Ortskurven der beiden Bauelementmodelle gebildet. Hierzu ist zunächst durch Inversion der Ortskurve $\underline{Z}_{\text{Spule}}(\omega)$ die Ortskurve $\underline{Y}_{\text{Spule}}(\omega) = 1/(R_L + j\omega L)$ zu bilden. Dies ist, siehe Beispiel 6.7, der in Bild 6.9a dargestellte Halbkreis im 4. Quadranten, der im Punkt $1/R_L$ auf der reellen Achse beginnt und im Ursprung endet.

Zu diesem Halbkreis $\underline{Y}_{\text{Spule}}(\omega)$ ist die Halbgerade $\underline{Y}_{\text{Kond}}(\omega)$ zu addieren. Das geschieht punktweise für gleiche Werte des Parameters ω . Da es sich nur um qualitative Ortskurven handelt, die nicht mit konkreten Werten von ω parametrisiert werden können, ist nur eine eindeutige Aussage für den Anfangs- und den Endpunkt der resultierenden Ortskurve

$\underline{Y}(\omega) = \underline{Y}_{\text{Spule}}(\omega) + \underline{Y}_{\text{Kond}}(\omega)$ möglich: Für $\omega \rightarrow 0$ gilt $\underline{Y}(\omega) = 1/R_L + 1/R_C$, für $\omega \rightarrow \infty$ gilt $\underline{Y}(\omega) \rightarrow 1/R_C + j\infty$.

In Bild 6.9b sind zwei mögliche Verläufe der Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$ skizziert.

Abschließend wird die Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ der Gesamtschaltung durch Inversion der Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$ skizziert. Die beiden oben diskutierten Varianten der Ortskurven von $\underline{Y}(\omega)$ führen zu zwei Ortskurven von $\underline{Z}(\omega)$, die sich ebenfalls fundamental unterscheiden und in Bild 6.9c dargestellt sind. Aus Platzgründen wird in Bild 6.9c die Abkürzung $R^+ = 1/(1/R_L + 1/R_C) = R_L R_C / (R_L + R_C)$ verwendet.

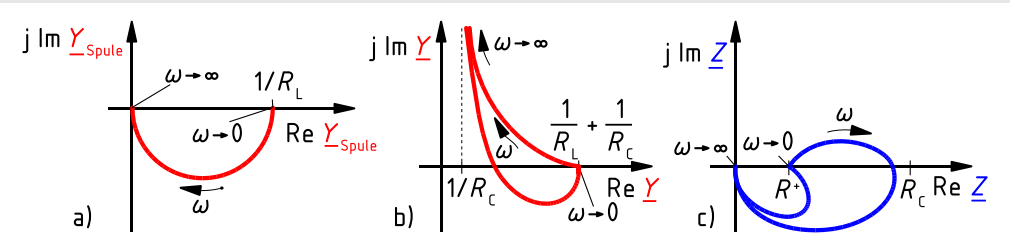


Bild 6.9: Ortskurven der Admittanz der Spule (a) sowie der Admittanz (b) und der Impedanz (c) der Gesamtschaltung aus Bild 6.8a

Während die untere Kurve in Bild 6.9b einen Schnittpunkt mit der reellen Achse für $\omega > 0$ aufweist, ist dies bei der oberen Kurve nicht der Fall. Die Existenz eines solchen Schnittpunktes bedeutet, dass es eine Frequenz gibt, für die der Zweipol wie ein reiner Wirkleitwert wirkt. Damit ist diese Frequenz die Resonanzfrequenz des Zweipols (Abschnitt 7.2.3.1). Wenn die Dämpfung (Abschnitt 7.2.3.4) des Schwingkreises zu groß ist, gibt es keine Resonanzfrequenz.

Interessant ist der Vergleich der Beispiele 6.5 und 6.8. In beiden Fällen werden Parallelschaltungen aus Spule und Kondensator betrachtet, die allerdings unterschiedlich modelliert werden. Hieraus folgen Ortskurven der Gesamtadmittanz, die sich prinzipiell unterscheiden: In Beispiel 6.5 endet die (der Ortskurve des Gesamtstroms ähnliche) Ortskurve der Admittanz auf der reellen Achse bei $\underline{Y}(\omega \rightarrow \infty) = 1/R_2$, in Beispiel 6.8 strebt sie gegen $\underline{Y}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 1/R_C + j\infty$.

6.4 Betrags- und Phasenwinkeldiagramme

Der Vorteil von Ortskurven liegt darin, dass sie in *einer* einzigen Kurve in der komplexen Ebene die Abhängigkeit von *Betrag* Z und *Argument* (Phasenwinkel) φ einer komplexen Größe $\underline{Z}(p) = Z(p) e^{j\varphi(p)}$ von einem reellen Parameter p darstellen.

Will man diese beiden Abhängigkeiten in reellen Koordinatensystemen darstellen, so sind dazu zwei Kurven notwendig: eine für den Betrag $Z(p)$ und eine zweite für den Phasenwinkel $\varphi(p)$. Sie werden meist in getrennten Koordinatensystemen als Funktion der *gemeinsamen* Variablen p dargestellt. Man spricht dann vom *Betragsdiagramm* (bzw. speziell bei der komplexen Darstellung von Sinusgrößen vom *Amplitudendiagramm*) $Z = f(p)$ und vom *Phasenwinkeldiagramm* $\varphi = g(p)$. Sofern bereits eine Darstellung der Ortskurve vorliegt, könnte man punktweise Betrag

Z und Phasenwinkel φ ablesen und in zwei Diagrammen über der Variablen p auftragen, wie in Bild 6.10 angedeutet. In den meisten Fällen werden Betrags- und Phasenwinkeldiagramme aber direkt durch Berechnung von Betrag und Argument aus der komplexen Funktion entwickelt.

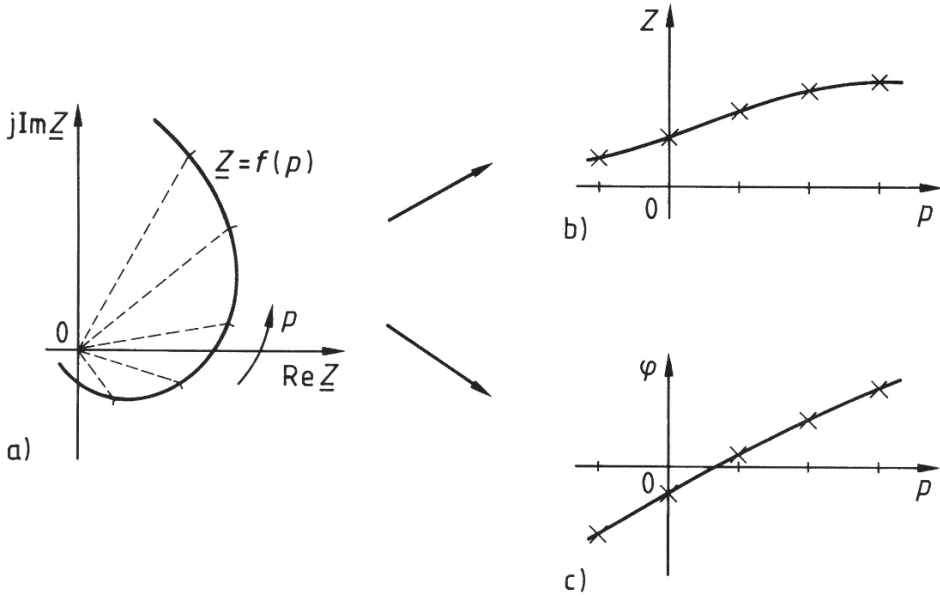


Bild 6.10: Übergang von einer Ortskurvendarstellung (a) zu einem Betrags- (b) und einem Phasenwinkeldiagramm (c)

Sehr häufig werden Größen in Abhängigkeit von der *Frequenz* betrachtet. Solche Darstellungen werden als *Frequenzgang* bezeichnet. Die Ortskurve in Bild 6.3 stellt beispielsweise einen Frequenzgang der Impedanz $\underline{Z}(f)$ dar. Betrags- und Phasenfrequenzgänge spielen bei den in Abschnitt 7.1 behandelten Filterschaltungen eine überragende Rolle.



7 Filterschaltungen und Schwingkreise

In diesem Kapitel werden praktische Anwendungen der Frequenzabhängigkeit des Verhaltens einfacher *Sinusstromnetzwerke* (vgl. Definition am Anfang von Kapitel 5) betrachtet. Sie beruhen auf der geschickten Nutzung der Abhängigkeit der Impedanz von Kapazitäten und Induktivitäten von der Frequenz. Wie in Kapitel 5 wird stets davon ausgegangen, dass sich für jede betrachtete Frequenz das Netzwerk im *eingeschwungenen Zustand* befindet und es somit mittels der komplexen Rechnung analysierbar ist.

Die betrachteten Filterschaltungen (Abschnitt 7.1) und Schwingkreise (Abschnitt 7.2) spielen insbesondere in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle. Sie werden dazu eingesetzt, aus Eingangssignalen, die mehrere Frequenzanteile (*spektrale Komponenten*) enthalten, bestimmte Anteile möglichst weitgehend zu entfernen bzw. hervorzuheben. Solche Schaltungen erzeugen also *lineare Verzerrungen* (Abschnitt 9.1.4.1).

Die nachfolgend behandelten Schaltungen bestehen aus idealisierten passiven Grundzweipolen mit konzentrierten Parametern, die von idealen Quellen gespeist werden. Alle realen Quellen weisen *Innenimpedanzen* auf und alle realen Zweipole zeigen neben ihrem erwünschten Verhalten unvermeidliche *parasitäre Effekte*. Hierdurch verhalten sich reale Filterschaltungen und Schwingkreise ungünstiger als die hier untersuchten Modelle. Genauere Ergebnisse kann man mit Modellen komplizierter Struktur erreichen, worauf in Abschnitt 7.2.6 eingegangen wird. Sobald die Parameter eines Modells aber nichtlinear werden, lässt sich das Verhalten des Modells nicht mehr mit der komplexen Sinusstromrechnung analysieren. In diesen Fällen ist eine numerische Analyse mit einem Netzwerksimulationsprogramm erforderlich.

7.1 Filterschaltungen

Die Filterschaltungen sind ein sehr wichtiges und umfangreiches Gebiet der Elektrotechnik. Hier kann nur eine Einführung in das Thema gegeben werden. Vertiefende Informationen findet man z. B. in [Mey11]. Der Entwurf von Filterschaltungen nach bestimmten Optimierungskriterien und die Simulation ihres Verhaltens erfolgt in der Praxis mit Tabellenwerken [SE88] oder spezieller Software.

Die enorme Leistungsfähigkeit moderner Mikroprozessoren hat dazu geführt, dass die klassische analoge Filtertechnik insbesondere im Bereich der Audiosignalverarbeitung weitgehend durch digitale Filter, die als Software realisiert werden, ersetzt worden ist. Im Bereich der Energietechnik sowie der Hoch- und Höchsthochfrequenztechnik spielen analoge Filterschaltungen aber weiterhin eine bedeutende Rolle.

In diesem Abschnitt werden nur *lineare* Filterschaltungen aus Zweipolen mit *konzentrierten Parametern* betrachtet. Sie sind außerdem *passiv*, da sie keine aktiven Elemente (wie Transistoren oder Operationsverstärker) enthalten.

Weil Kondensatoren wesentlich idealere Eigenschaften hinsichtlich Linearität und Güte aufweisen als Spulen und da sie kleiner und kostengünstiger als Spulen hergestellt werden können, werden Filterschaltungen nach Möglichkeit nur mit Kondensatoren aufgebaut.

Filterschaltungen sind in der Regel *Vierpole*, die als *Zweitore* (Abschnitt 1.3.5) betrieben werden.

7.1.1 Grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Begriffe, die zur Beschreibung von Filterschaltungen und ihres Verhaltens erforderlich sind, zusammengestellt. Die meisten dieser Begriffe sind darüber hinaus anwendbar zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens beliebiger linearer, zeitinvarianter (engl. linear time invariant = LTI) Systeme und spielen daher in der Systemtheorie und Regelungstechnik eine bedeutende Rolle.

Die Wirkung eines Übertragungsvierpols im Signalfluss von einer Signalquelle zu einem Verbraucher (Bild 7.1a) wird mitbestimmt durch den Innenwiderstand (bzw. die Innenimpedanz) der Quelle und den Widerstandswert (bzw. die Impedanz) der Last. Um die charakteristischen Eigenschaften verschiedener Filtertypen zu untersuchen, ist es üblich, nur die Klemmengrößen eines Übertragungsvierpols ohne äußere Beschaltung zu betrachten (Bild 7.1b).

Da oft mehrere Übertragungsvierpole kettenartig hintereinander geschaltet werden, wird üblicherweise das *Ketten-Zählpfeilsystem* (Abschnitt 1.4.3.2) an den beiden Toren verwendet.

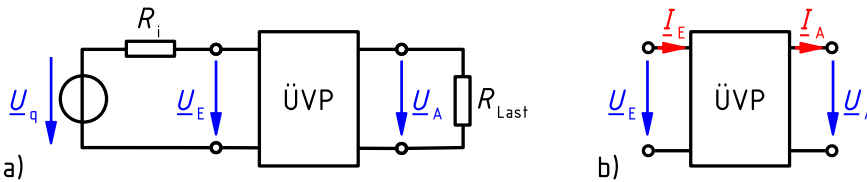


Bild 7.1: Übertragungsvierpol an linearer Quelle mit Lastwiderstand (a) und isolierter Übertragungsvierpol mit Zählpfeilen für die Klemmengrößen am Ein- und Ausgang (b)

7.1.1.1 Übertragungsfunktion

Die komplexwertige *Übertragungsfunktion* \underline{F} ist das Verhältnis von komplexwertiger Ausgangsgröße \underline{A} zu komplexwertiger Eingangsgröße \underline{E} eines *Übertragungsvierpols*. Weil hier die Abhängigkeit dieser Größen von der Frequenz bzw. der Kreisfrequenz betrachtet wird und da wegen der Gln. (5.177) und (5.198) die Kreisfrequenz ω stets zusammen mit dem Faktor j auftritt, schreibt man meist

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}. \quad (7.1)$$

In der Regel sind Eingangs- und Ausgangsgrößen von Übertragungsvierpolen Spannungen. Dann wird angenommen, dass der Ausgang des Vierpols unbelastet ist, d. h. $\underline{I}_A = 0$ gilt. In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion bei Verwendung der Größen in Bild 7.1b die *Spannungsübertragungsfunktion*

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)}. \quad (7.2)$$

Alternativ können auch Ströme als Eingangs- und Ausgangsgrößen betrachtet werden. Dann wird angenommen, dass der Ausgang des Vierpols kurzgeschlossen ist, d. h. $\underline{U}_A = 0$ gilt. In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion die *Stromübertragungsfunktion*. Sie lautet bei Verwendung der Größen in Bild 7.1b

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{I}_A(j\omega)}{\underline{I}_E(j\omega)}. \quad (7.3)$$

Die Übertragungsfunktion kann als komplexwertige Funktion des reellen Parameters ω aufgefasst und als *Ortskurve* dargestellt werden (Kapitel 6). Die Aufteilung von Gl. (7.1) gemäß Gl. (5.89)

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{A(j\omega) e^{j\varphi_A(j\omega)}}{E(j\omega) e^{j\varphi_E(j\omega)}} = \frac{A(j\omega)}{E(j\omega)} e^{j(\varphi_A(j\omega) - \varphi_E(j\omega))} = |\underline{F}(j\omega)| e^{j \arg(\underline{F}(j\omega))} \quad (7.4)$$

ermöglicht die getrennte Darstellung des Betrages der Übertragungsfunktion als *Betragsfrequenzgang* (Abschnitt 7.1.1.3) und ihres Argumentes als *Phasenfrequenzgang* (Abschnitt 7.1.1.4).

Messtechnisch sind sowohl Betrags- als auch Phasenfrequenzgang eines Übertragungsvierpols sehr einfach zu erfassen. Dazu legt man an das Eingangstor eine Sinusgröße *langsam* veränderlicher Frequenz und bekannter Amplitude und Phasenlage und misst die gleichfrequente Sinusgröße am Ausgangstor nach Amplitude und Phasenlage. Anschließend sind nur noch das Verhältnis der Amplituden und die Differenz der Nullphasenwinkel zu bilden.

7.1.1.2 Ordnung eines Filters

Die Übertragungsfunktion gemäß Gl. (7.1) ist stets eine gebrochen rationale Funktion der Variablen $j\omega$. Das bedeutet, dass $\underline{F}(j\omega)$ immer als Quotient zweier Polynome dieser Variablen darstellbar ist, wobei der Grad des Nennerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Zählerpolynoms ist. Den Grad des Nennerpolynoms bezeichnet man als die *Ordnung des Filters*.

7.1.1.3 Betragsfrequenzgang

Im Betrag der Übertragungsfunktion nach Gl. (7.4) kann, da er reellwertig ist, nicht mehr die imaginäre Variable $j\omega$ auftreten, sondern nur noch die reelle Variable ω . Man nennt das Verhältnis der Effektivwerte beziehungsweise der Amplituden von Ausgangs- und Eingangsschwingung als Funktion der Kreisfrequenz (bzw. der Frequenz)

$$F(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} \right| = \frac{A(\omega)}{E(\omega)} = \frac{\hat{a}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} \quad (7.5)$$

den *Betragsfrequenzgang* (kurz: *Betragsgang*) des Übertragungsvierpols. Insbesondere in der Nachrichtentechnik wird der Betragsfrequenzgang auch als *Amplitudenfrequenzgang* oder einfacher nur als *Amplitudengang* bezeichnet.

7.1.1.4 Phasenfrequenzgang

Das Argument der Gl. (7.4) kann ebenfalls nur reellwertig sein. Man nennt die Phasenverschiebung der Ausgangsschwingung gegenüber der Eingangsschwingung als Funktion der Kreisfrequenz (bzw. der Frequenz)

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{F}(j\omega)) = \varphi_A(\omega) - \varphi_E(\omega) \quad (7.6)$$

den *Phasenfrequenzgang* (kurz: Phasengang) des Übertragungsvierpols. Zur Berechnung des Arguments komplexer Größen siehe Gl. (5.64).

7.1.1.5 Pegel, Dämpfung

Der Zahlenwert des Verhältnisses zweier gleichartiger physikalischer Größen wird in der Technik (insbesondere in der Akustik und der Nachrichtentechnik) oft durch eine Pegelangabe beschrieben. Der *Pegel* L als logarithmisches Maß eignet sich besonders zur schnell erfassbaren Angabe des Verhältnisses von Größen, deren Werte sich um mehrere Zehnerpotenzen unterscheiden können.

Der unter Verwendung des *natürlichen Logarithmus* gebildete Wert

$$L = \ln \frac{x}{x_{\text{ref}}} = \log_e \frac{x}{x_{\text{ref}}} \quad (7.7)$$

wird in der Einheit *Neper* (Np) angegeben und zur Beschreibung des Verhältnisses von sogenannten Feldgrößen wie Spannungen und Strömen verwendet, deren Quadrate einer Leistung proportional sind.

Wesentlich häufiger wird das unter Verwendung des *dekadischen Logarithmus* gebildete Verhältnis

$$L = \lg \frac{P}{P_{\text{ref}}} = \log_{10} \frac{P}{P_{\text{ref}}} \quad (7.8)$$

zweier Leistungsgrößen in der Einheit *Bel* (B) bzw.

$$L = 10 \lg \frac{P}{P_{\text{ref}}} \quad (7.9)$$

in der Einheit *Dezibel* (dB) angegeben.

Das Verhältnis zweier Spannungen oder Ströme (es kann sich um Gleichgrößen oder Effektivwerte von Wechselgrößen handeln) kann ausgehend von Gl. (7.9) ebenfalls in dB angegeben werden, indem zunächst die durch diese Größen in einem Widerstand R umgesetzten Leistungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} L &= 10 \lg \frac{U^2/R}{U_{\text{ref}}^2/R} = 10 \lg \frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} = 10 \lg \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}}\right)^2 = 20 \lg \frac{U}{U_{\text{ref}}} \\ &\text{bzw.} \\ L &= 10 \lg \frac{I^2 \cdot R}{I_{\text{ref}}^2 \cdot R} = 10 \lg \frac{I^2}{I_{\text{ref}}^2} = 10 \lg \left(\frac{I}{I_{\text{ref}}}\right)^2 = 20 \lg \frac{I}{I_{\text{ref}}} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Durch Vergleich der Gln. (7.7) und (7.9) erhält man die Umrechnungsvorschriften

$$1 \text{ Np} = \frac{20}{\ln 10} \text{ dB} \approx 8,686 \text{ dB}, \quad (7.11)$$

$$1 \text{ dB} = \frac{\ln 10}{20} N_p \approx 0,1151 N_p. \quad (7.12)$$

Ist das Verhältnis der betrachteten Größe zu ihrer im Nenner stehenden Bezugsgröße größer als eins, so ist der Pegel positiv. Er wird dann in manchen Anwendungsfällen (z. B. in der Antennentechnik) als *Gewinn* bezeichnet. Ist die betrachtete Größe kleiner als ihre Bezugsgröße, so wird der Pegel negativ. Sein *Betrag* wird dann häufig als Dämpfungsmaß oder kurz *Dämpfung* bezeichnet.

Beispiel 7.1: Rechnen mit Pegeln

Welchen Pegel hat eine Spannung U_A , die a) doppelt so groß; b) gleich groß wie ihre Bezugsspannung U_E ist bzw. die um den Faktor c) $\sqrt{2}$; d) 2; e) 10; f) 1000 kleiner als ihre Bezugsspannung ist?

Aus Gl. (7.10) folgt hier

$$L = 20 \lg(U_A/U_E).$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert (teilweise leicht gerundet): a) U_A liegt um 6 dB über U_E ; b) U_A hat den Pegel 0 dB; c) U_A hat den Pegel -3 dB, ist also um 3 dB gegenüber U_E gedämpft; d) U_A ist um 6 dB gegenüber U_E gedämpft; e) U_A ist um 20 dB gegenüber U_E gedämpft; f) U_A liegt 60 dB unter U_E .

7.1.1.6 Bode-Diagramm, Eckfrequenz

Bei der grafischen Darstellung von Frequenzgängen wird die Frequenzachse in der Regel logarithmisch geteilt, um in allen Frequenzbereichen die *gleiche relative Frequenzauflösung* zu erreichen. Zum Ablesen und Interpolieren von Frequenzwerten sowie zum Ablesen von Werten für $f \rightarrow 0$ ist hingegen eine linear geteilte Frequenzachse vorzuziehen.

Wie die Beispiele in Abschnitt 7.1.2 zeigen, erhält man bei der Schaltungsanalyse zunächst Ausdrücke und Zahlenwerte für *Kreisfrequenzen* (in s^{-1}). Da Menschen gewohnt sind, mit Frequenzangaben zu arbeiten, werden Zahlenwerte in der Regel als Frequenz (in Hz) angegeben und dargestellt.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, als unabhängige und abhängige Variable *bezogene Größen* zu verwenden. Durch geschickte Wahl der Bezugsgrößen kann die Aussage solcher *normierten Darstellungen* allgemeingültig für bestimmte Schaltungstypen sein. Vorteilhaft ist hierbei, dass alle Variablen in *einheitenlose Größen* überführt werden können, wodurch sie z. B. logarithmierbar werden.

In einem *Bode-Diagramm* werden Betrags- und Phasenfrequenzgang zusammen (in der Regel untereinander) über identischen, logarithmisch geteilten Frequenzachsen dargestellt. Die Achse von $\varphi(\omega)$ wird linear geteilt, die Achse von $F(\omega)$ logarithmisch. Meist wird $F(\omega)$ als Pegel nach Abschnitt 7.1.1.5 angegeben. In vielen Anwendungsfällen lässt sich der Betragsfrequenzgang in einem Bode-Diagramm näherungsweise aus Geradenstücken zusammensetzen, die die Asymptoten für den tatsächlichen Verlauf darstellen (Bilder 7.10b und 7.18b).

Die Frequenzen, bei denen sich diese Geradenstücke berühren, werden als *Eckfrequenzen* bezeichnet.

7.1.1.7 Grenzfrequenz, Durchlassbereich, Sperrbereich

Als *Grenzfrequenzen* f_g von Filterschaltungen werden in der Regel diejenigen Frequenzen bezeichnet, bei denen der Betrag der Übertragungsfunktion von seinem Maximum F_{\max} auf den Wert $F_{\max}/\sqrt{2}$ (also um 3 dB) abgesunken ist. Man verwendet daher präzisierend auch den Begriff *3 dB-Grenzfrequenz*. Mit der *Grenzkreisfrequenz*

$$\omega_g = 2\pi f_g \quad (7.13)$$

folgt daraus die Bedingung

$$F(\omega_g) = F_{\max}/\sqrt{2}. \quad (7.14)$$

Bei passiven, nicht schwingungsfähigen Filterschaltungen gilt $F_{\max} \leq 1$. Um den Wert von F_{\max} und die Kreisfrequenz, bei der er auftritt, zu ermitteln, ist es bei einfachen Filterschaltungen ratsam, zunächst die beiden Fälle $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ von Gl. (7.5) zu untersuchen.

Elementare Passschaltungen, die aus genau einem Wirk- und einem Blindwiderstand bestehen, erzeugen bei ihrer Grenzfrequenz eine Phasenverschiebung von -45° oder 45° zwischen Ausgangs- und Eingangsschwingung.

Als *Durchlassbereich* wird derjenige Frequenzbereich bezeichnet, in dem

$$F(\omega) > F_{\max}/\sqrt{2} \quad (7.15)$$

gilt, als *Sperrbereich* derjenige Frequenzbereich, in dem

$$F(\omega) < F_{\max}/\sqrt{2} \quad (7.16)$$

erfüllt ist. Durchlass- und Sperrbereich grenzen also unmittelbar aneinander. Das bedeutet einerseits, dass auch im Durchlassbereich eine frequenzabhängige Dämpfung auftritt und andererseits, dass auch im Sperrbereich ein frequenzabhängiger Anteil der Eingangsgröße noch am Ausgang ankommt.

Wie unten anhand einiger Beispiele gezeigt wird, steigt bei einem Filter n -ter Ordnung die Dämpfung im Sperrbereich in großem Abstand von der Grenzfrequenz um $n \cdot 6$ dB pro *Oktave* (bei Verdopplung bzw. Halbierung der Frequenz) bzw. um $n \cdot 20$ dB pro *Dekade* (bei Veränderung der Frequenz um den Faktor 10 bzw. 0,1).

7.1.2 Einfache Filterschaltungen

In den nachfolgenden Abschnitten wird das Verhalten einfacher Filterschaltungen unterschiedlichen Typs und unterschiedlicher Ordnung analysiert.

7.1.2.1 Tiefpässe

Tiefpässe sind Filterschaltungen, die niederfrequente spektrale Komponenten des Eingangssignals wenig und hochfrequente stark dämpfen. Bei Tiefpässen tritt der maximale Betrag der Übertragungsfunktion F_{\max} bei niedrigen Frequenzen, oft bei $\omega \rightarrow 0$, auf.

Tiefpässe werden z. B. eingesetzt, um aus Nutzsignalen mit begrenzter Bandbreite hochfrequente Störsignale auszufiltern und zur Glättung der Ausgangsspannung von Netzteilen.

Beispiel 7.2: Elementarer RC-Tiefpass

Das Übertragungsverhalten des Übertragungsvierpols in Bild 7.2 ist zu untersuchen und geeignet darzustellen.

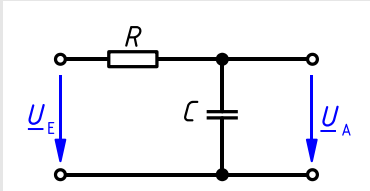


Bild 7.2: Schaltung eines elementaren RC-Tiefpasses

Es handelt sich um eine RC-Reihenschaltung, die in Abschnitt 5.7.1.3 behandelt wurde. Sie kann als frequenzabhängiger unbelasteter Spannungsteiler für die als Eingangsspannung des Übertragungsvierpols betrachtete Gesamtspannung aufgefasst werden. Die Spannung über der Kapazität wird als Ausgangsspannung des Übertragungsvierpols abgegriffen. Anwendung der komplexen Spannungsteilerregel ergibt die komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Da die höchste im Nenner von $\underline{F}(j\omega)$ auftretende Potenz von $j\omega$ eins ist, handelt es sich um ein Filter 1. Ordnung. Bild 7.3 zeigt die halbkreisförmige Ortskurve von $\underline{F}(j\omega)$, die gemäß Abschnitt 6.2 durch die Inversion des im 1. Quadranten der komplexen Ebene liegenden Teils der Geraden $1 + j\omega RC$ entsteht.

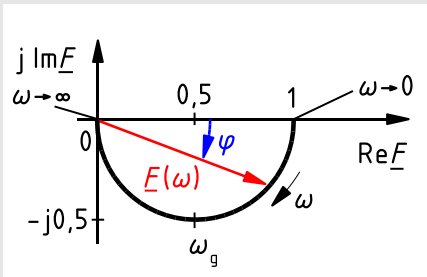


Bild 7.3: Ortskurve der Übertragungsfunktion der Schaltung in Bild 7.2

Durch Bilden des Betrages von $\underline{F}(j\omega)$ erhält man den Betragsfrequenzgang

$$F(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \leq 1$$

mit $F(\omega \rightarrow 0) = 1$ und $F(\omega \rightarrow \infty) = 0$, woraus folgt, dass es sich bei dieser Schaltung um einen Tiefpass mit $F_{\max} = 1$ handelt. Die Steigung des Betragsgangs für $\omega \rightarrow 0$ ist

$$\left. \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} = \left. \frac{d}{d\omega} (1 + (\omega RC)^2)^{-\frac{1}{2}} \right|_{\omega \rightarrow 0} = 0.$$

Die Funktion $F(\omega)$ beginnt bei $\omega \rightarrow 0$ also mit einer horizontalen Tangente.

Durch Bilden des Arguments von $\underline{F}(j\omega)$ folgt der Phasengang

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{F}(j\omega)) = \varphi_A(\omega) - \varphi_E(\omega) = -\arctan(\omega RC) < 0$$

mit monotonem Abfall von $\varphi(\omega \rightarrow 0) = 0^\circ$ auf $\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -90^\circ$. Eine Phasenverschiebung von -90° ist mit dieser Schaltung wegen $F(\omega \rightarrow \infty) = 0$ aber nicht zu erreichen.

Aus dem Wert von F_{\max} ergibt sich mit Gl. (7.14) als Bedingung zur Ermittlung der Grenzkreisfrequenz

$$F(\omega_g) = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}}$$

mit der durch Vergleich der beiden Wurzelausdrücke sofort ersichtlichen Lösung

$$\omega_g = \frac{1}{RC},$$

was der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

entspricht. Bei der Grenzfrequenz sind Scheinwiderstand Z_C der Kapazität C und Scheinwiderstand Z_R des Widerstandes R gleich groß, so dass über beiden Zweipolen betragsmäßig gleich große Spannungen abfallen. Bei Frequenzen weit unterhalb der Grenzfrequenz gilt

$$\omega RC \ll 1$$

und damit die Näherung

$$F(\omega) \approx 1 = \text{const.}$$

Der Betragsgang ist also weit unterhalb der Grenzfrequenz näherungsweise konstant gleich 1. Bei Frequenzen weit oberhalb der Grenzfrequenz gilt

$$\omega RC \gg 1$$

und damit die Näherung

$$F(\omega) \approx \frac{1}{\omega RC} \sim \frac{1}{\omega}.$$

Der Betragsgang fällt weit oberhalb der Grenzfrequenz also etwa umgekehrt proportional zur Frequenz ab, d. h. bei Verdopplung der Frequenz (pro Oktave) auf die Hälfte (um 6 dB) und bei Verzehnfachung der Frequenz (pro Dekade) auf ein Zehntel (um 20 dB). Durch Einsetzen des Ausdrucks für die Grenzkreisfrequenz in die Funktion $\varphi(\omega)$ erhält man

$$\varphi(\omega_g) = -\arctan(\omega_g RC) = -\arctan(1) = -45^\circ.$$

Bei der Grenzfrequenz eilt die Ausgangsspannung der Eingangsspannung um 45° nach.

Um den Amplituden- und den Phasengang in einer *für diese Schaltungsstruktur* allgemeingültigen, also von den Werten von R und C unabhängigen Form darstellen zu können, wird als unabhängige Variable statt der Kreisfrequenz die auf die Grenzkreisfrequenz *normierte Frequenz*

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$$

eingeführt. Sie ist einheitenlos und kann Werte zwischen 0 und ∞ annehmen. Damit wird die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega},$$

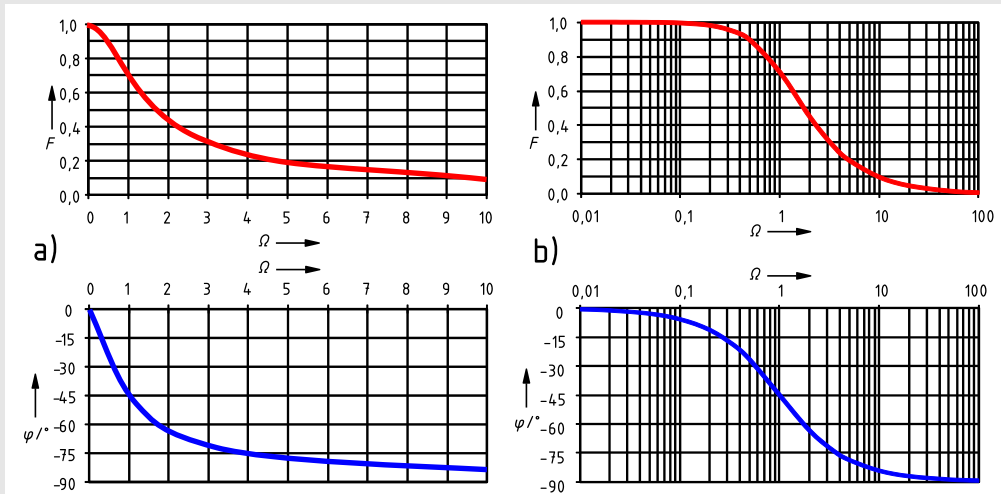
der Betragsgang erhält die einfache Form

$$F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}.$$

Der Phasengang lautet nun

$$\varphi(\Omega) = -\arctan \Omega.$$

In Bild 7.4 sind der Betrags- und der Phasengang der Schaltung mittels unterschiedlich geteilter Achsen dargestellt. Während bei der Verwendung einer linearen Achse (a) für die normierte Frequenz keine Symmetrie der Kurven erkennbar ist, zeigen die Kurven bei einer logarithmisch geteilten Frequenzachse (b) eine ausgeprägte Symmetrie.



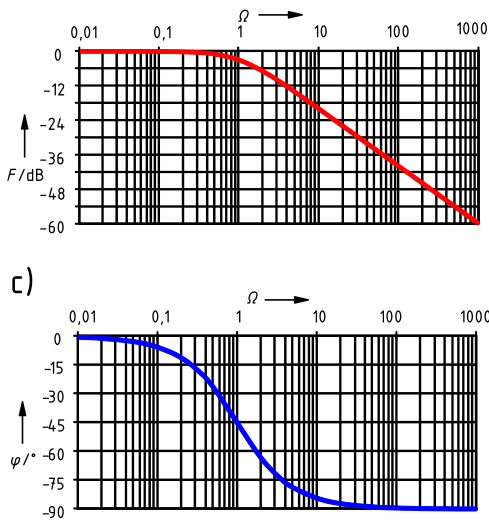


Bild 7.4: Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.2 als Funktion der auf die Grenzfrequenz normierten Frequenz Ω bei linear geteilten Achsen (a), logarithmisch geteilter normierter Frequenzachse (b) sowie als Bode-Diagramm mit Pegelangaben (c)

Im Bode-Diagramm (c) ist die näherungsweise frequenzproportionale Dämpfung weit oberhalb der Grenzfrequenz gut erkennbar, die in der doppelt logarithmischen Darstellung als mit 20 dB pro Dekade fallende Gerade erscheint.

Die beiden Geraden, die den Betragsgang für sehr niedrige und sehr hohe Frequenzen näherungsweise beschreiben, schneiden sich bei der Eckfrequenz, die gleich der Grenzfrequenz ist.

Beispiel 7.3: Zweistufiger RC-Tiefpass

Das Übertragungsverhalten des Übertragungsvierpols in Bild 7.5 ist zu untersuchen und geeignet darzustellen. Zur Vereinfachung der Berechnungen soll gelten $R_1 = R_3 = R$ und $C_2 = C_4 = C$. Außerdem ist die Abkürzung $RC = T$ zu verwenden.

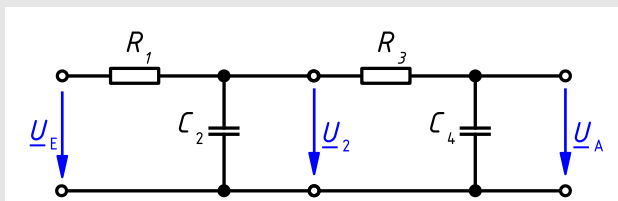


Bild 7.5: Schaltung eines zweistufigen RC-Tiefpasses

Bei der Schaltung in Bild 7.5 handelt es sich um eine Kettenschaltung zweier identisch dimensionierter elementarer RC-Tiefpässe gemäß Bild 7.2. Die Schaltung hat die Struktur eines zweistufigen Spannungsteilers (Abschnitt 2.2.5.2). Die Anwendung der Regel zur Berechnung mehrstufiger Spannungsteiler laut Gl. (2.125) in komplexer Schreibweise ergibt die komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_2(j\omega)} \cdot \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \frac{\underline{Z}_{C4}}{R_3 + \underline{Z}_{C4}} \cdot \frac{\underline{Z}_{C2} || (R_3 + \underline{Z}_{C4})}{R_1 + \underline{Z}_{C2} || (R_3 + \underline{Z}_{C4})}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{Z_C}\right)^2 + 3\frac{R}{Z_C}} = \frac{1}{1 + (j\omega RC)^2 + 3j\omega RC} = \frac{1}{1 - (\omega T)^2 + 3j\omega T}.$$

Da die höchste im Nenner von $\underline{F}(j\omega)$ auftretende Potenz von $j\omega$ zwei ist, handelt es sich um ein Filter 2. Ordnung. Durch Betragbildung von $\underline{F}(j\omega)$ erhält man den Betragsgang

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega T)^2)^2 + (3\omega T)^2}}.$$

Aus $F(\omega \rightarrow 0) = 1$ und $F(\omega \rightarrow \infty) = 0$ folgt, dass es sich bei dieser Schaltung um einen Tiefpass mit $F_{\max} = 1$ handelt. Durch Bilden des Arguments von $\underline{F}(j\omega)$ erhält man den Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{3\omega T}{1 - (\omega T)^2}$$

mit monotonem Abfall von $\varphi(\omega \rightarrow 0) = 0^\circ$ auf $\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$ (2. Quadrant!). Wegen $F(\omega \rightarrow \infty) = 0$ wird eine Phasenverschiebung von -180° nicht erreicht. Bei der Polstelle des Argumentes der Arcustangens-Funktion, also für

$$\omega_{-90^\circ} = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$$

beträgt die Phasenverschiebung der Ausgangs- gegenüber der Eingangsspannung -90° . Bei dieser Kreisfrequenz gilt wieder (vgl. Beispiel 7.2) $Z_C = Z_R$. Bei der zweistufigen Schaltung ist die Ausgangsspannung wegen

$$F(\omega_{-90^\circ}) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega_{-90^\circ} T)^2)^2 + (3\omega_{-90^\circ} T)^2}} = \frac{1}{3}$$

bei dieser Kreisfrequenz auf ein Drittel der Eingangsspannung abgesunken (vgl. Beispiel 7.2). Auch bei dieser Schaltung gilt für sehr niedrige Frequenzen, also

$$\omega T \ll 1$$

die Näherung

$$F(\omega) \approx 1 = \text{const.}$$

Der Betragsgang beginnt daher für $\omega \rightarrow 0$ mit der Asymptote $F(\omega) = 1$. Bei sehr hohen Frequenzen gilt

$$\omega T \gg 1$$

und somit die Näherung

$$F(\omega) \approx \frac{1}{(\omega T)^2} \sim \frac{1}{\omega^2}.$$

Der Betragsgang fällt also bei diesem Filter 2. Ordnung für hohe Frequenzen etwa umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz ab, d. h. pro Oktave auf ein Viertel (um 12 dB) und pro Dekade auf ein Hundertstel (um 40 dB). Die Bedingung zur Ermittlung der Grenzkreisfrequenz ist bei dieser Schaltung

$$F(\omega_g) = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 7(\omega_g T)^2 + (\omega_g T)^4}}.$$

Die Ausdrücke unter den Wurzeln müssen gleich sein. Daraus folgt

$$1 + 7(\omega_g T)^2 + (\omega_g T)^4 = 2.$$

Zur Lösung dieses Gleichungstyps empfiehlt sich die Substitution

$$(\omega_g T)^2 = x > 0,$$

aus der das Polynom

$$x^2 + 7x - 1 = 0$$

mit der wegen $x > 0$ nur möglichen positiven Lösung

$$x = \frac{-7 + \sqrt{53}}{2} \approx 0,1401$$

folgt. Rücksubstitution und wiederum ausschließliche Berücksichtigung des positiven Wurzelwertes ergibt die Grenzkreisfrequenz

$$\omega_g \approx \frac{0,3743}{T}$$

und schließlich die Grenzfrequenz

$$f_g \approx \frac{0,05957}{T}.$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für die Grenzkreisfrequenz in die Funktion $\varphi(\omega)$ erhält man

$$\varphi(\omega_g) = -\arctan \frac{3\omega_g T}{1 - (\omega_g T)^2} \approx -\arctan \frac{3 \cdot 0,3743}{1 - 0,1401} \approx -\arctan 1,3 \approx -52,5^\circ.$$

Bei der Grenzfrequenz eilt die Ausgangsspannung der Eingangsspannung um $52,5^\circ$ nach.

Zur Normierung der Frequenz bietet sich hier die Wahl von

$$\Omega = \omega T$$

an. Damit wird die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 3j\Omega},$$

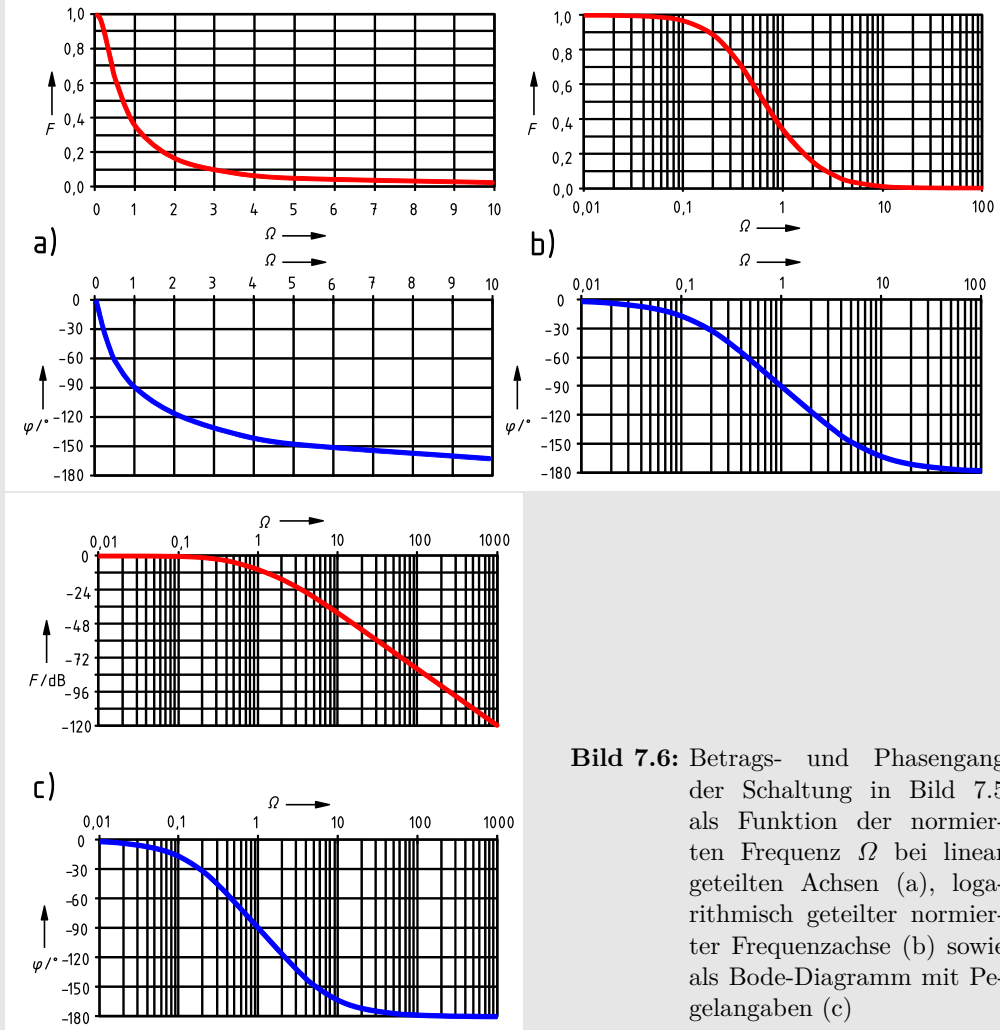


Bild 7.6: Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.5 als Funktion der normierten Frequenz Ω bei linear geteilten Achsen (a), logarithmisch geteilter normierter Frequenzachse (b) sowie als Bode-Diagramm mit Pegelangaben (c)

der Betragsgang

$$F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (3\Omega)^2}}$$

und der Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{3\Omega}{1 - \Omega^2}.$$

In Bild 7.6 sind der Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.5 über der normierten Frequenz dargestellt.

7.1.2.2 Hochpässe

Hochpässe sind Filterschaltungen, die hochfrequente spektrale Komponenten des Eingangssignals wenig, niederfrequente jedoch stark dämpfen. Bei Hochpässen tritt der maximale Betrag der Übertragungsfunktion F_{\max} bei hohen Frequenzen, oft bei $\omega \rightarrow \infty$ auf.

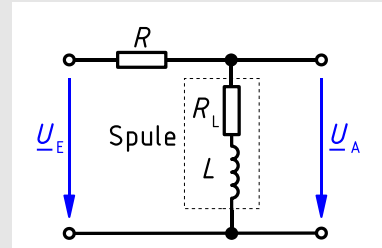
Hochpässe werden beispielsweise verwendet, um Gleichanteile oder niederfrequente Störungen aus Signalen zu entfernen.

Da für alle technischen Systeme $F(\omega \rightarrow \infty) = 0$ gilt, sind Hochpässe nur als Modelle mit eingeschränktem Gültigkeitsbereich aufzufassen. Reale Hochpässe haben stets Bandpasscharakter (Abschnitt 7.1.2.3).

Beispiel 7.4: Hochpass aus verlustbehafteter Spule und Widerstand

Untersucht werden soll eine Filterschaltung, die gemäß Bild 7.7 aus einer Spule und einem Widerstand $R = 10\Omega$ aufgebaut ist. Die Spule soll durch eine Reihenschaltung aus konstantem Wirkwiderstand $R_L = 1\Omega$ und konstanter Induktivität $L = 10\text{ mH}$ modelliert werden.

Bild 7.7: Einfaches Ersatzschaltbild eines Hochpasses aus verlustbehafteter Spule und Widerstand



Aus der komplexen Spannungsteilerregel folgt direkt die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L},$$

aus der ersichtlich ist, dass es sich um ein Filter 1. Ordnung handelt. Der Betragsgang

$$F(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2}}$$

liefert wegen $F(\omega \rightarrow 0) = R_L/(R + R_L) < 1$ und $F(\omega \rightarrow \infty) = 1$ die Erkenntnis, dass es sich um einen Hochpass handelt. Die Dämpfung eines Filters für $\omega \rightarrow 0$ wird beschrieben durch das Verhältnis der von $j\omega$ unabhängigen Glieder von Zähler- und Nennerpolynom der Übertragungsfunktion. Der Phasengang

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{F}(j\omega)) = \arctan \frac{\omega L}{R_L} - \arctan \frac{\omega L}{R + R_L} > 0$$

beginnt für $\omega \rightarrow 0$ und endet für $\omega \rightarrow \infty$ asymptotisch bei 0° und hat dazwischen einen positiven Extremwert, da die zweite Arcustangens-Funktion wegen ihres größeren Nenners

immer einen kleineren Wert als die erste hat. Die Ausgangsspannung eilt der Eingangsspannung also vor. Durch Ableiten von $\varphi(\omega)$ und Nullsetzen der Ableitung erhält man als Kreisfrequenz, bei der der Phasengang sein Maximum erreicht

$$\omega(\varphi_{\max}) = \frac{\sqrt{R R_L + R_L^2}}{L} \approx 332 \text{ s}^{-1},$$

was

$$f(\varphi_{\max}) \approx 53 \text{ Hz}$$

entspricht. Das Einsetzen der Zahlenwerte ergibt $\varphi_{\max} \approx 56^\circ$.

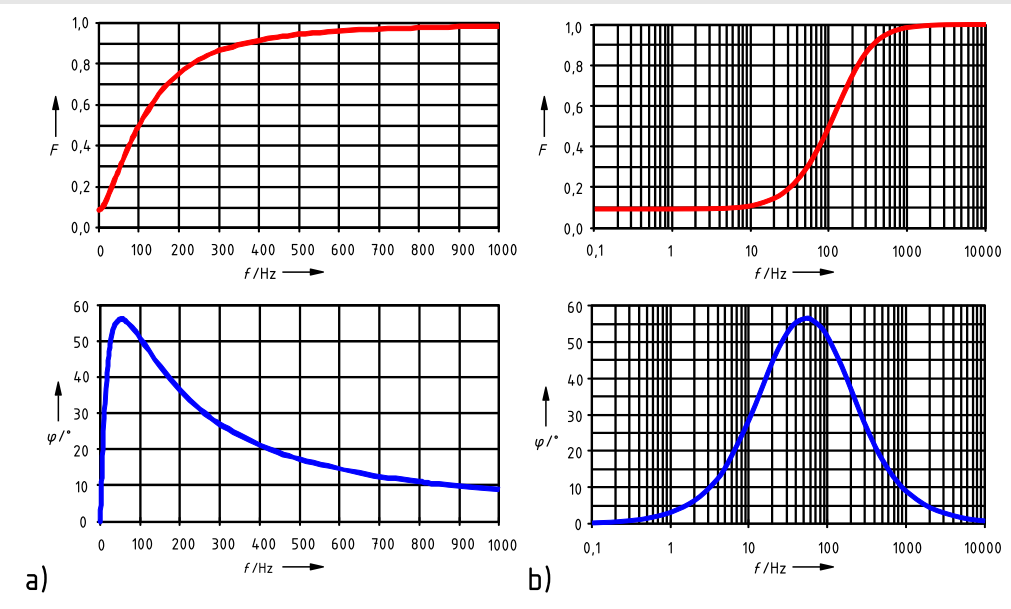


Bild 7.8: Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.7 bei linear geteilten Achsen (a), sowie logarithmisch geteilter Frequenzachse (b)

Aus $F_{\max} = 1$ folgt als Bedingung zur Ermittlung der Grenzkreisfrequenz

$$F(\omega_g) = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{R_L^2 + (\omega_g L)^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega_g L)^2}}$$

mit der Lösung

$$\omega_g = \frac{\sqrt{R^2 + 2R R_L - R_L^2}}{L} \approx 1091 \text{ s}^{-1},$$

was der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} \approx 174 \text{ Hz}$$

entspricht, bei der die Ausgangsspannung der Eingangsspannung um

$$\varphi(\omega_g) = \arctan \frac{\omega_g L}{R_L} - \arctan \frac{\omega_g L}{R + R_L} \approx 40^\circ$$

voreilt. Aus der Gleichung zur Bestimmung von ω_g ist ersichtlich, dass es eine obere Grenze für den Wert von R_L gibt, ab der keine Grenzfrequenz mehr existiert.

Bild 7.8 zeigt den Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.7 bei unterschiedlich geteilten Frequenzachsen.

Beispiel 7.5: Hochpass mit Grunddämpfung

Untersucht werden soll eine nicht elementare Filterschaltung, die gemäß Bild 7.9 aus einer Kapazität C und zwei Widerständen R_1 und R_2 besteht. Zur Vereinfachung der Rechnungen soll $R_1 = R_2 = R$ gelten.

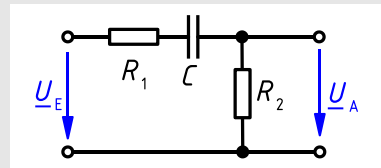


Bild 7.9: Nicht elementarer RC-Hochpass

Aus der Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R_2}{1/j\omega C + R_1 + R_2} = \frac{j\omega RC}{1 + 2j\omega RC}$$

ist ersichtlich, dass es sich um ein Filter 1. Ordnung handelt. Die Normierung $\Omega = 2\omega RC$ ergibt

$$\underline{F}(j\Omega) = \frac{0,5j\Omega}{1 + j\Omega} = 0,5 \frac{j\Omega}{1 + j\Omega}.$$

Aus dem Betragsgang

$$F(\Omega) = 0,5 \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$$

folgen $F(\Omega \rightarrow 0) = 0$ und $F(\Omega \rightarrow \infty) = 0,5$. Es handelt sich um einen Hochpass mit einer *Grunddämpfung* von 3 dB. Der Phasengang

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctan(\Omega)$$

fällt streng monoton von 90° für $\Omega \rightarrow 0$ auf 0° für $\Omega \rightarrow \infty$.

Aus $F_{\max} = 0,5$ folgt als Bedingung zur Ermittlung der normierten Grenzfrequenz

$$F(\Omega_g) = \frac{0,5}{\sqrt{2}} = 0,5 \frac{\Omega_g}{\sqrt{1 + \Omega_g^2}}$$

mit der sofort erkennbaren Lösung

$$\Omega_g = 1$$

entsprechend

$$f_g = \frac{1}{4\pi RC}.$$

Bei seiner Grenzfrequenz erzeugt dieses Filter die Phasenverschiebung

$$\varphi(f_g) = 45^\circ.$$

Bild 7.10 zeigt den Betragsgang und Phasengang für die Schaltung in Bild 7.9.

Im Bode-Diagramm sind auch die beiden Geradenstücke, die die Asymptoten der Kurve darstellen, eingetragen. Sie berühren sich bei der Eckfrequenz, die bei dieser Schaltung mit der Grenzfrequenz übereinstimmt. Bei Filterschaltungen höherer Ordnung stimmt i. a. keine der Eckfrequenzen mit der Grenzfrequenz überein.

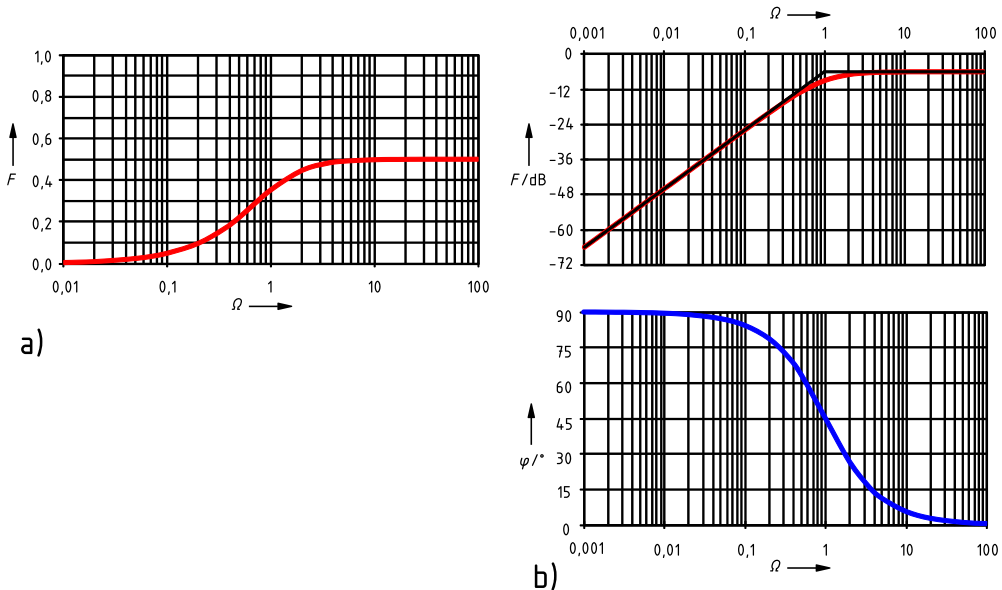


Bild 7.10: Betragsgang (a) und Bode-Diagramm (b) der Schaltung in Bild 7.9 als Funktion der normierten Frequenz Ω

7.1.2.3 Bandpässe

Filter, die spektrale Komponenten des Eingangssignals außerhalb eines bestimmten Frequenzbereiches stark dämpfen, werden als Bandpass bezeichnet. Bandpässe können auch mittels Schwingkreisen (Abschnitt 7.2) realisiert werden. Sie sind dann sogar in der Lage, spektrale Komponenten innerhalb ihres Durchlassbereiches zu verstärken (was bei passiven Bandpässen allerdings nicht mit einer Leistungsverstärkung verbunden sein kann).

Der Abstand zwischen der unteren Grenzfrequenz f_{gu} und der oberen Grenzfrequenz f_{go} wird als *Bandbreite* B bezeichnet:

$$B = f_{go} - f_{gu} \quad (7.17)$$

Bandpässe werden insbesondere in Empfangsschaltungen eingesetzt, um aus einem Frequenzgemisch das Frequenzband mit der interessierenden Information herauszufiltern.

Beispiel 7.6: Bandpass aus einer Kettenschaltung zweier elementarer Passschaltungen

Der in Bild 7.11 dargestellte Übertragungsvierpol (ÜVP) besteht aus einer Kettenschaltung von drei Teil-Übertragungsvierpolen. Der durch C_1 und R_2 gebildete Vierpol ist ein elementarer Hochpass. Der zweite ÜVP (ÜVP 2) ist ein idealer Trennverstärker, dessen Klemmenverhalten durch die beiden Gleichungen $\underline{U}_{E2} = \underline{U}_{A1}$ und $\underline{I}_{A1} = 0$ vollständig beschrieben wird. Der durch R_3 und C_4 gebildete ÜVP ist ein elementarer Tiefpass entsprechend Beispiel 7.2. Zur Vereinfachung der Berechnungen soll $C_1 = C_4 = C$ und $R_2 = R_3 = R$ gelten. Weiterhin ist die normierte Frequenz $\Omega = \omega RC$ zu verwenden.

Das Übertragungsverhalten der Schaltung ist zu analysieren und geeignet darzustellen.

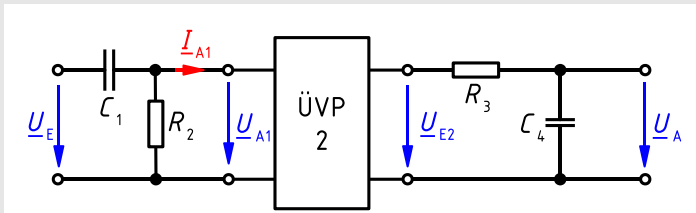


Bild 7.11: Bandpass aus RC-Hochpass, Trennverstärker und RC-Tiefpass

Für die Übertragungsfunktion gilt der Ansatz

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_{E2}(j\omega)} \cdot \frac{\underline{U}_{E2}(j\omega)}{\underline{U}_{A1}(j\omega)} \cdot \frac{\underline{U}_{A1}(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \frac{\underline{Z}_{C4}}{R_3 + \underline{Z}_{C4}} \cdot 1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_{C1}},$$

da der erste ÜVP am Ausgang wegen $\underline{I}_{A1} = 0$ leerläuft und somit als unbelasteter Spannungsteiler wirkt. Daraus folgt

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R \underline{Z}_C}{(R + \underline{Z}_C)^2} = \frac{R/\underline{Z}_C}{R^2/\underline{Z}_C^2 + 2R/\underline{Z}_C + 1} = \frac{j\omega CR}{(j\omega CR)^2 + 2j\omega CR + 1}.$$

Es handelt sich um ein Filter 2. Ordnung. Mit der normierten Frequenz $\Omega = \omega CR$ ergibt sich die Darstellung

$$\underline{F}(j\Omega) = \frac{j\Omega}{(j\Omega)^2 + 2j\Omega + 1} = \frac{j\Omega}{1 - \Omega^2 + 2j\Omega} = \frac{j\Omega}{(1 + j\Omega)^2}.$$

Aus dem Betragsgang

$$F(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2 + 1}$$

folgt $F(\Omega \rightarrow 0) = 0$ und $F(\Omega \rightarrow \infty) = 0$. Es muss sich also um einen Bandpass handeln. Der Extremwert von $F(\Omega)$ ist

$$F_{\max} = F(\Omega = 1) = \frac{1}{2}.$$

Die Schaltung weist eine Grunddämpfung von 6 dB auf. Die normierten Grenzfrequenzen lassen sich aus der Bedingung

$$F(\Omega_g) = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\Omega_g}{\Omega_g^2 + 1}$$

berechnen. Die Lösungen sind

$$\Omega_{\text{gu}} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{und} \quad \Omega_{\text{go}} = \sqrt{2} + 1.$$

Aus der normierten Bandbreite

$$B_\Omega = \Omega_{\text{go}} - \Omega_{\text{gu}} = 2$$

errechnet sich die Bandbreite

$$B = \frac{1}{\pi RC}.$$

Die *Mittenfrequenz* f_0 des Bandpasses ist definiert als das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen. Aus der normierten Mittenfrequenz

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{\text{gu}} \cdot \Omega_{\text{go}}} = 1$$

folgt hier für die Mittenfrequenz der Ausdruck

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Der Phasengang des Bandpasses ist

$$\varphi(\Omega) = 90^\circ - \arctan \frac{2\Omega}{1 - \Omega^2}.$$

Er fällt monoton von $\varphi(\Omega \rightarrow 0) = 90^\circ$ auf $\varphi(\Omega \rightarrow \infty) = -90^\circ$ ab.

An der Polstelle des Argumentes der Arcustangens-Funktion bei $\Omega = 1$ ist vom Hauptzweig der Funktion auf den benachbarten Nebenzweig zu wechseln, was einer Addition von 180° zum Funktionswert entspricht. Die Phasenverschiebung bei den Grenzfrequenzen ist

$$\varphi(\Omega_{gu}) = 45^\circ$$

und

$$\varphi(\Omega_{go}) = -45^\circ.$$

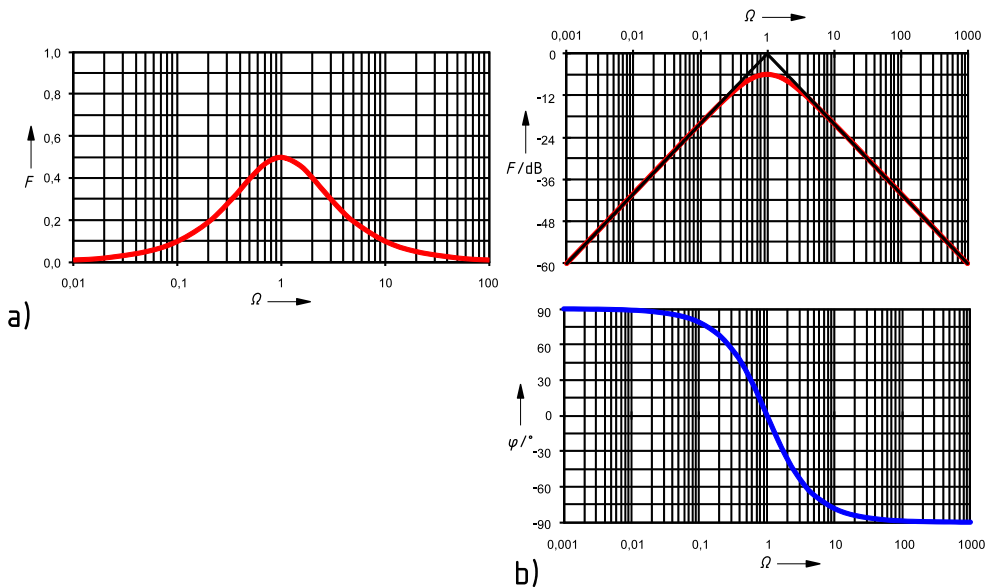


Bild 7.12: Betragsgang der Schaltung in Bild 7.11 bei logarithmisch geteilter normierter Frequenzachse (a) sowie Bode-Diagramm mit Pegelangaben (b)

In Bild 7.12 sind der Betrags- und Phasengang der Schaltung in Bild 7.11 dargestellt.

Im Bode-Diagramm sind auch die Asymptoten des Betragsgangs, die mit 20 dB pro Dekade ansteigen bzw. abfallen, eingetragen. Die beiden Geradenstücke berühren sich bei der Eckfrequenz, die auch die Mittenfrequenz des Bandpasses ist.

Eine Kettenschaltung mehrerer *voneinander entkoppelter* Funktionsblöcke, wie sie in Beispiel 7.6 untersucht wurde, spielt in der Systemtheorie und Regelungstechnik eine große Rolle. Dadurch, dass ein Funktionsblock seinen Vorgänger nicht belastet, kann die Übertragungsfunktion der Kettenschaltung einfach durch Multiplikation der Übertragungsfunktionen der einzelnen Funktionsblöcke ermittelt werden.

Beispiel 7.7: Elementarer Reihenschwingkreis als Bandpass

Dieses Beispiel setzt die Kenntnis des in Abschnitt 7.2.4.1 behandelten Verhaltens eines elementaren Reihenschwingkreises als Zweipol voraus. Sein Ersatzschaltbild ist in Zeile 1

von Tabelle 7.1 dargestellt.

Werden die Klemmenspannung \underline{U} als Eingangsgröße und die Spannung über einem der enthaltenen Zweipole ($\underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C$) als Ausgangsgröße eines Übertragungsvierpols aufgefasst, so weist dieser Bandpasscharakteristik auf.

Die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}_R(j\omega) = \frac{\underline{U}_R(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))}$$

führt zum gleichen prinzipiellen Betragsfrequenzgang wie der in Zeile 7 links von Tabelle 7.1 dargestellte Amplitudenfrequenzgang des Klemmenstroms I mit $F_R(\omega \rightarrow 0) = 0$, $F_R(\omega_{\text{res}}) = 1$ und $F_R(\omega \rightarrow \infty) = 0$. Das Maximum von F_R tritt bei der in Gl. (7.30) angegebenen Resonanzfrequenz f_{res} des Schwingkreises auf. Diese Resonanzfrequenz ist unabhängig von der in Gl. (7.24) definierten Güte Q des Schwingkreises. Die Grenzfrequenzen von F_R stimmen mit denen des Schwingkreises überein.

Die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}_L(j\omega) = \frac{\underline{U}_L(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))}$$

führt zum gleichen prinzipiellen Betragsfrequenzgang wie der in Zeile 7 links von Tabelle 7.1 dargestellte Amplitudenfrequenzgang der Spannung \underline{U}_L mit $F_L(\omega \rightarrow 0) = 0$, $F_L(\omega_{\text{res}}) = Q$ und $F_L(\omega \rightarrow \infty) = 1$.

Das in Gl. (7.55) angegebene Maximum $F_{L_{\text{res}}} > Q$ von F_L tritt bei der in Gl. (7.53) angegebenen Frequenz $f_{L_{\text{res}}}$ auf, die stets größer als die Resonanzfrequenz f_{res} des Schwingkreises ist und von der Güte Q des Schwingkreises abhängt. Da Q in der Regel wesentlich größer als 1 ist, ist ein Bandpass dieses Typs in der Lage, in seinem Durchlassbereich eine Spannung zu liefern, die die Eingangsspannung weit übersteigt. Diese *Spannungsüberhöhung* erfolgt ohne aktive Bauelemente oder Transformator. Die Grenzfrequenzen von F_L müssen mittels der Gl. (7.26) aus $F_L(\omega)$ berechnet werden. Sie stimmen nicht mit denen des Schwingkreises überein.

Die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}_C(j\omega) = \frac{\underline{U}_C(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{1/(j\omega C)}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))}$$

führt zum gleichen prinzipiellen Betragsfrequenzgang wie der in Zeile 7 links von Tabelle 7.1 dargestellte Amplitudenfrequenzgang der Spannung \underline{U}_C mit $F_C(\omega \rightarrow 0) = 1$, $F_C(\omega_{\text{res}}) = Q$ und $F_C(\omega \rightarrow \infty) = 0$.

Das in Gl. (7.55) angegebene Maximum $F_{C_{\text{res}}} > Q$ von F_C tritt bei der in Gl. (7.54) angegebenen, von der Güte Q abhängigen Frequenz $f_{C_{\text{res}}}$ auf, die stets kleiner als die Resonanzfrequenz f_{res} des Schwingkreises ist. Auch hier gelten die im vorigen Absatz gemachten Aussagen zur Spannungsüberhöhung; auch hier müssen die Grenzfrequenzen von F_C mittels der Gl. (7.26) aus $F_C(\omega)$ berechnet werden. Sie stimmen ebenfalls nicht mit denen des Schwingkreises überein.

7.1.2.4 Bandsperren

Bandsperren dämpfen spektrale Komponenten des Eingangssignals innerhalb eines bestimmten Frequenzbandes stark, außerhalb dieses Bereiches jedoch nur schwach. Bandsperren können ebenso wie Bandpässe mittels Schwingkreisen realisiert werden. Dieser Typ von Filterschaltungen wird z. B. eingesetzt, um schmalbandige Störsignale aus breitbandigen Nutzsignalen zu entfernen.

Die Bandbreite von Bandsperren ist wie bei den Bandpässen definiert. Bandsperren mit besonders kleiner Bandbreite werden als *KerbfILTER* (engl. *notch filter*) bezeichnet. Sie werden beispielsweise verwendet, um 50 Hz-Brummen aus Audiosignalen zu entfernen.

Eine besonders einfache Realisierung einer Bandsperre ergibt sich, wenn man die Prinzipschaltung in Bild 7.1 betrachtet und als Übertragungsvierpol einen *elementaren Reihenschwingkreis* nach Abschnitt 7.2.4.1 *parallel* zum Lastwiderstand schaltet. Ist der Wirkwiderstand R des Schwingkreises wesentlich kleiner als der Lastwiderstand R_{Last} , so werden Signalanteile der Eingangsspannung im Bereich der Resonanzfrequenz des Schwingkreises näherungsweise kurzgeschlossen. Daher nennt man eine solche Schaltung *Saugkreis*.

Alternativ kann in der Prinzipschaltung in Bild 7.1 ein *elementarer Parallelschwingkreis* nach Abschnitt 7.2.4.2 als Übertragungsvierpol *in Reihe* zum Lastwiderstand geschaltet werden. Ist die Güte des Schwingkreises sehr hoch, sein Wirkleitwert G also sehr klein, so fallen wegen $1/G \gg R_{\text{Last}}$ spektrale Komponenten der Eingangsspannung im Bereich der Resonanzfrequenz des Schwingkreises weitgehend über dem Schwingkreis und nicht dem Lastwiderstand ab. Eine solche Schaltung wird als *Sperrkreis* bezeichnet.

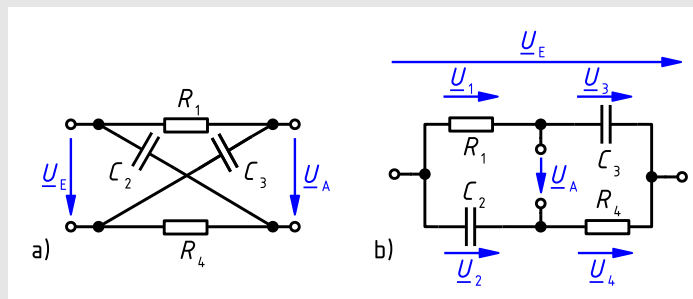
7.1.2.5 Allpässe

Als Allpass werden Filterschaltungen bezeichnet, deren *Betragsgang frequenzunabhängig* ist, bei denen also $F(\omega) = \text{const.}$ gilt, die aber eine frequenzabhängige Phasenverschiebung bewirken. Allpässe werden in der Nachrichtentechnik zur Kompensation von durch andere Übertragungsglieder bewirkten, unerwünschten Phasenverschiebungen verwendet.

Beispiel 7.8: RC-Allpass 1. Ordnung

Das Übertragungsverhalten des Übertragungsvierpols in Bild 7.13 ist zu untersuchen. Es gilt $R_1 = R_4 = R$ und $C_2 = C_3 = C$. Die Normierung $\Omega = \omega RC$ ist zu verwenden.

Bild 7.13: Schaltung eines Allpasses, dargestellt als Zweitor (a) und als Brückenschaltung (b)



Aus Bild 7.13b folgt

$$\underline{U}_A = \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = \underline{U}_E \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \right) = \underline{U}_E \left(\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} - \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \right),$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\Omega}{1 + j\Omega}.$$

Es handelt es sich um ein Filter 1. Ordnung mit

$$F(\Omega) = \frac{\sqrt{1 + \Omega^2}}{\sqrt{1 + \Omega^2}} = 1 = \text{const.},$$

also um einen Allpass mit dem Phasengang

$$\varphi(\Omega) = \arctan(-\Omega) - \arctan(\Omega) = -2 \arctan(\Omega),$$

der monoton von $\varphi(\Omega \rightarrow 0) = 0^\circ$ auf $\varphi(\Omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$ abfällt.

7.2 Schwingkreise

Eine physikalische Anordnung ist *schwingungsfähig*, wenn sie mindestens zwei *Energiespeicher* unterschiedlichen physikalischen Charakters enthält, die miteinander *Energie austauschen* können. Eine solche Anordnung wird als *Schwingkreis* bezeichnet.

In elektrischen Schaltungen sind diese unterschiedlichen Typen von Energiespeichern Induktivitäten, die *magnetische* Feldenergie speichern und Kapazitäten zur Speicherung *elektrischer* Feldenergie.

Die in einer Kapazität gespeicherte Energie wird durch den Wert C der Kapazität und die Spannung u an der Kapazität bestimmt, die in einer Induktivität gespeicherte Energie durch den Wert L der Induktivität und den Strom i durch die Induktivität.

Zu unterscheiden ist zwischen freien und erzwungenen Schwingungen. Bei freien Schwingungen (Abschnitt 7.2.1) wird einer physikalischen Anordnung einmalig Energie zugeführt und sie sich dann selbst überlassen. Durch unvermeidliche Verlustmechanismen, die dazu führen, dass im Schwingkreis pendelnde Energie in Wärme umgesetzt wird, klingt die Schwingung zeitlich ab. Bei erzwungenen Schwingungen (Abschnitt 7.2.2) wird einer zunächst energielosen Anordnung periodisch von außen Energie zugeführt. Ein Teil dieser Energie wird zur Kompensation der mit der Schwingungsintensität ansteigenden Verluste benötigt, der Rest pendelt zwischen den Energiespeichern. Ändert sich die Art der periodischen Energiezufuhr nicht, so stellt sich nach einem *Einschwingvorgang* in der Anordnung eine *stationäre Schwingung* (*eingeschwungener Zustand*) ein.

Einschwingvorgänge bei Schwingkreisen werden in den Abschnitten 9.3.2.3 und 9.3.3.3 behandelt.

Nachfolgend werden elektrische Schwingkreise aus linearen, zeitinvarianten, passiven Zweipolen betrachtet, die den eingeschwungenen Zustand erreicht haben.

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 7.1 behandelten Übertragungsvierpolen werden die Schwingkreise durchgehend als *Zweipole* betrachtet. Resonanzphänomene werden hauptsächlich bezüglich der Klemmengrößen des Zweipols interpretiert. Nur kurz werden die Zusammenhänge untersucht, die sich ergeben, wenn eine Klemmengröße als Eingangsgröße und eine Größe *innerhalb* des schwingungsfähigen Zweipols, z. B. die Spannung an einer Induktivität oder einer Kapazität, als Ausgangsgröße angesehen werden.

7.2.1 Freie Schwingungen

Freie Schwingungen treten in realen Schwingkreisen infolge der unvermeidbaren Verluste nur *instationär* auf, d. h. sie klingen mit der Zeit ab. Solche gedämpften Schwingungen werden in Abschnitt 9.3 behandelt. Stationäre freie Schwingungen können nur in ungedämpften, d. h. verlustfreien Schwingkreisen auftreten, die aber praktisch nicht realisierbar sind. Hier werden stationäre freie Schwingungen daher nur zur Erläuterung der in Schwingkreisen ablaufenden Umspeichervorgänge behandelt bzw. als Näherung, die für einige Schwingungsperioden zulässig sein kann.

Eine Induktivität L und eine Kapazität C werden in einem geschlossenen Kreis entsprechend Bild 7.14a zusammengeschaltet. Treten im Kreis keine Verluste auf, so wird eine durch einmalige Aufladung der Kapazität dem Kreis zugeführte Energie als ungedämpfte Schwingung zwischen Kapazität und Induktivität hin- und herpendeln. Diese Energiependelung wird durch Strom und Spannung im Kreis bewirkt, die sich sinusförmig ändern. Bild 7.14b zeigt eine Periode der an L und C liegenden Spannung u und des gegenüber dieser um 90° phasenverschobenen Stroms i , der durch L und C fließt.

Mit den in Bild 7.14a eingetragenen Zählpfeilen für Spannung u und Strom i ergeben sich damit die von Halbperiode zu Halbperiode wechselnden Polaritäten der Spannung an den beiden Zweipolen gemäß Bild 7.14c. Während der Entladung der Kapazität (d. h. betragsmäßig sinkender Klemmenspannung) in der 1. und 3. Viertelperiode fließt der Strom von + nach – durch die Induktivität, während der Ladung der Kapazität in der 2. und 4. Viertelperiode von + nach – durch die Kapazität. In Bild 7.14d sind die zeitlichen Verläufe der elektrischen Energie $W_e(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$ in der Kapazität C und der magnetischen Energie $W_m(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ in der Induktivität L dargestellt. Da im ungedämpften Schwingkreis keine Energie in Wärme umgeformt und, nachdem die Schwingung besteht, auch keine Energie mehr zugeführt wird, ist die *Gesamtenergie* im Schwingkreis zeitlich *konstant*:

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t) = \text{const.} \quad (7.18)$$

Die Energie schwingt innerhalb des Kreises hin und her, wobei abwechselnd Kapazität und Induktivität die Rolle von *Erzeuger* bzw. *Verbraucher* übernehmen. Zur Zeit $t = 0$ ist mit dem Scheitelwert der Spannung \hat{u} die Kapazität auf die maximale Energie aufgeladen. Sie wirkt von da an als Erzeuger und treibt den – vom Anfangswert null ausgehend – größer werdenden Entladestrom i durch die als Verbraucher wirkende Induktivität, bis bei $\omega t = \pi/2$ mit dem Scheitelwert des Stroms \hat{i} die Induktivität die maximale Energie in ihrem Magnetfeld gespeichert hat und die Kapazität energielos ist. Danach wirkt die Induktivität als Erzeuger und lädt die Kapazität von der Spannung $u = 0$ bis zum negativen Scheitelwert $-\hat{u}$ bei $\omega t = \pi$ mit kleiner werdendem Strom um. Danach wiederholt sich dieser Vorgang mit von Halbperiode zu Halbperiode wechselnden Vorzeichen von Strom und Spannung. Die aus den Klemmengrößen u

und i der Zweipole C und L berechnete Leistung $p = ui$ wechselt, wie in Bild 7.14e dargestellt, von Viertel- zu Viertelperiode der Spannung ihr Vorzeichen. Aus dem Vorzeichen dieser Leistung ergibt sich mit dem Erzeuger-Zählpeilsystem an C und dem Verbraucher-Zählpeilsystem an L die Richtung des Leistungsflusses (vgl. Abschnitt 2.1.4.3).

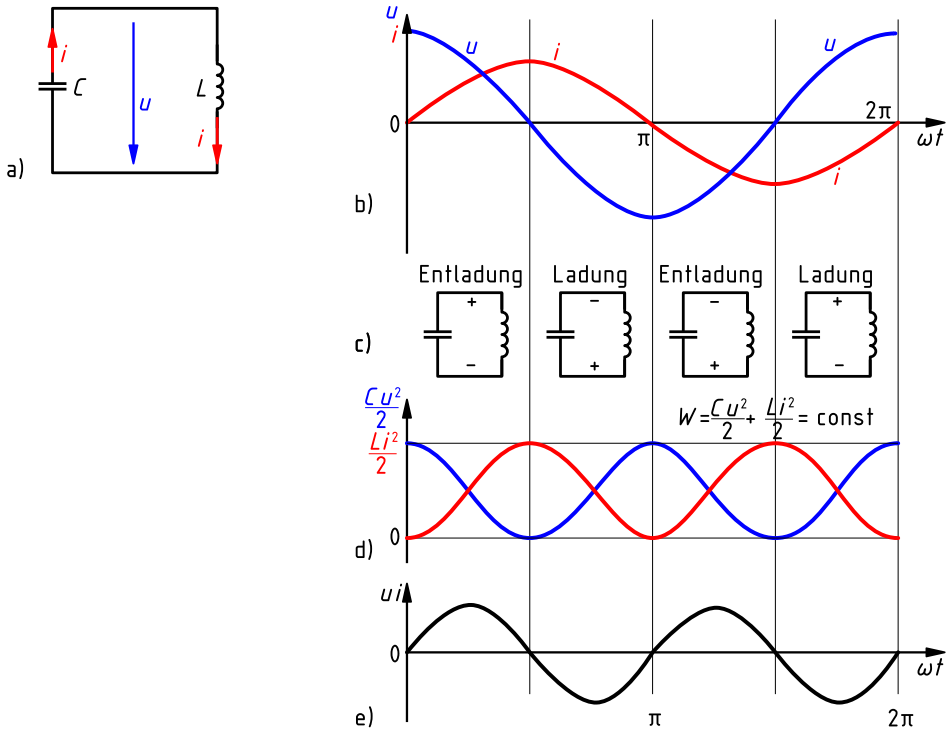


Bild 7.14: Verlauf und Richtung von Strom, Spannung und Leistung im verlustfreien Schwingkreis aus Induktivität L und Kapazität C

- Schaltung mit Strom- und Spannungszählpeilen
- zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung
- in der Schaltung auftretende Polaritäten der Spannung
- zeitlicher Verlauf der in L und C gespeicherten Energien
- zeitlicher Verlauf der von L und C aufgenommenen bzw. abgegebenen Leistung

7.2.2 Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen verlaufen mit der Frequenz der von außen eingeprägten sinusförmigen Anregungsgröße (in elektrischen Netzwerken Sinusspannung oder Sinusstrom). Sind Scheitelwert und Frequenz der Anregungsgröße über längere Zeit konstant, so stellt sich eine *stationäre Schwingung* ein, deren ebenfalls konstanter Scheitelwert gerade so groß ist, dass die durch die Dämpfung dem Schwingkreis entzogene Leistung gleich der mittels der Anregungsgröße zugeführten Wirkleistung ist.

Neben dieser *irreversiblen Energieumsetzung* findet auch ein *reversibler Energieaustausch* sowohl zwischen den Speichern des Schwingkreises als im Allgemeinen auch zwischen Schwingkreis und äußerem Anreger statt. Ein Schwingkreis enthält Energiespeicher mit *physikalisch komplementärem Speichercharakter*. Während der eine Speicher Energie abgibt, nimmt der andere Energie auf. Die Differenz der innerhalb des Schwingkreises gespeicherten Energien muss der Anreger aufnehmen bzw. abgeben. Nach dem Energieerhaltungssatz kann die Schwingung nur so verlaufen, dass zu jedem Zeitpunkt die zugeführte Leistung gleich der Summe der Dämpfungsleistung und der Differenz der von den Speichern des Schwingkreises aufgenommenen und abgegebenen Leistung ist.

Betrachtet man z. B. einen aus der Reihenschaltung von Wirkwiderstand R , Kapazität C und Induktivität L bestehenden *elementaren Reihenschwingkreis*, der von einem Sinusstrom $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ mit konstantem Scheitelwert \hat{i} angeregt wird, so ist nach den Gln. (3.98) und (5.202) der Scheitelwert der in der Kapazität gespeicherten elektrischen Feldenergie

$$\hat{W}_e = \frac{1}{2} C \hat{u}^2 = \frac{1}{2} C \left(Z_C \hat{i} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\hat{i}^2}{C \omega^2}$$

abhängig von der Kreisfrequenz ω , der der nach Gl. (4.127) in L gespeicherten magnetischen Feldenergie

$$\hat{W}_m = \frac{1}{2} L \hat{i}^2$$

jedoch nicht. Daher gibt es nur eine Kreisfrequenz ω_{res} , bei der der Maximalwert des Stroms \hat{i} in C und in L zu gleich großen Scheitelwerten der gespeicherten Energien führt. Aus der Bedingung $\hat{W}_e = \hat{W}_m$ folgt die *Resonanzkreisfrequenz* $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$ des Schwingkreises. Bei Anregung des Schwingkreises mit dieser Kreisfrequenz wird periodisch die gesamte in der Kapazität gespeicherte Energie an die Induktivität abgegeben und umgekehrt. Dem Schwingkreis braucht von außen nur die im Wirkwiderstand in Wärme umgesetzte Dämpfungsenergie als Wirkleistung zugeführt zu werden.

Bei Anregung mit irgendeiner anderen Frequenz ist die maximal gespeicherte Energie des einen Speichers größer als die des anderen. Die Differenz der beiden Energien pendelt dann nicht innerhalb des Schwingkreises, sondern zwischen Schwingkreis und äußerem Anreger. Der dem Schwingkreis gleichförmig zufließenden Dämpfungsenergie überlagert sich dann also eine Energiependelung. Der Schwingkreis tauscht in diesem Fall mit seiner Umgebung auch Blindleistung aus.

7.2.3 Kenngrößen von Schwingkreisen

Die meisten der in diesem Abschnitt definierten Kenngrößen sind nur auf schwingungsfähige *Zweipole* anwendbar, die genau eine *elektrisch unabhängige* Kapazität und genau eine *elektrisch unabhängige* Induktivität enthalten, die als *Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad* bezeichnet werden. Mehrere in Reihe und/oder parallel geschaltete Kapazitäten sind in diesem Sinne nicht elektrisch unabhängig voneinander, da sie gemäß Abschnitt 3.3.5.3 zu einer Gesamt-Kapazität zusammengefasst werden können. Sinngemäßes gilt für mehrere in Reihe und/oder parallel geschaltete Induktivitäten. In den folgenden Abschnitten wird durchgehend davon ausgegangen, dass eine solche Zusammenfassung im Rahmen der Erstellung des Ersatzschaltbildes ggf. bereits erfolgt ist.

7.2.3.1 Resonanzbedingung, Resonanzfrequenz, Kennfrequenz

Wird ein Schwingkreis mit seiner *Resonanzfrequenz* f_{res} angeregt, so tauscht er nach den Überlegungen in Abschnitt 7.2.2 über seine Klemmen keine Blindleistung mit der Umgebung aus. Sein Blindwiderstand X bzw. sein Blindleitwert B muss somit bei f_{res} verschwinden, der Phasenverschiebungswinkel ist $\varphi = 0$. Die Bedingung zur Berechnung der Resonanzfrequenz lautet also

$$\operatorname{Im} \underline{Z}(f_{\text{res}}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im} \underline{Y}(f_{\text{res}}) = 0. \quad (7.19)$$

Die *Kennfrequenz* f_0 ist definiert als die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises bei Vernachlässigung seiner Verluste. Alle Wirkwiderstände, die im Ersatzschaltbild direkt in Reihe mit einem Blindwiderstand liegen, werden hierbei durch einen Kurzschluss ersetzt und alle Wirkwiderstände, die direkt parallel zu einem Blindwiderstand liegen, durch einen Leerlauf.

Schwingkreise, die mehrere elektrisch unabhängige Induktivitäten und Kapazitäten enthalten, weisen mehrere Resonanzfrequenzen mit den zugehörigen Kennfrequenzen auf. Auf solche Schwingkreise mit mehreren Freiheitsgraden wird in Abschnitt 7.2.6 eingegangen.

Da bei der komplexen Rechnung mit Kreisfrequenzen statt mit Frequenzen gerechnet wird, werden oft auch die Größen *Resonanzkreisfrequenz* $\omega_{\text{res}} = 2\pi f_{\text{res}}$ und *Kennkreisfrequenz* $\omega_0 = 2\pi f_0$ verwendet.

7.2.3.2 Normierte Frequenz, Verstimmung

Die bereits in Abschnitt 7.1 verwendete Normierung der Frequenz wird oft auch bei der Beschreibung des Verhaltens von Schwingkreisen eingesetzt. Dabei wird in der Regel als Bezugsfrequenz die Kennfrequenz bzw. Kennkreisfrequenz verwendet:

$$\Omega = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (7.20)$$

Die Größe Ω wird als *normierte Frequenz* oder *relative Frequenz* bezeichnet. Zur Beschreibung der Abweichung der Betriebsfrequenz eines Schwingkreises von seiner Kennfrequenz f_0 bzw. seiner Kennkreisfrequenz ω_0 wird häufig die Verstimmung

$$v = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \Omega - \frac{1}{\Omega} \quad (7.21)$$

benutzt. Für $f = f_0$ ist $v = 0$, für $f \rightarrow 0$ gilt $v \rightarrow -\infty$ und aus $f \rightarrow \infty$ folgt $v \rightarrow \infty$.

7.2.3.3 Kennwiderstand, Kennleitwert

Der Scheinwiderstand der Kapazität bzw. der Induktivität bei der Kennkreisfrequenz ω_0 wird als *Kennwiderstand*

$$Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.22)$$

bezeichnet. Diese reellwertige Kenngröße ist nur für Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad definiert. Ihr Kehrwert ist der *Kennleitwert*

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (7.23)$$

Kennwiderstand und Kennleitwert werden oft zur Normierung anderer Scheinwiderstände bzw. Scheinleitwerte bei Schwingkreisen verwendet.

7.2.3.4 Güte, Dämpfung

Für Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad ist die *Güte* Q definiert als das Verhältnis des Betrages der bei Resonanz in einem der beiden Blindelemente *umgesetzten*, also innerhalb des Schwingkreises pendelnden Blindleistung Q^1 zur *aufgenommenen* Wirkleistung P :

$$Q = \frac{|Q(\omega_{\text{res}})|}{P(\omega_{\text{res}})} \quad (7.24)$$

Die Bildung des Betrages der Blindleistung ist erforderlich, damit sowohl die in der Induktivität als auch die in der Kapazität umgesetzte Blindleistung eingesetzt werden können und das Ergebnis unabhängig vom bei der Leistungsberechnung verwendeten Zählpeilsystem ist.

Der Kehrwert der Güte ist der *Verlustfaktor*, der bei Schwingkreisen auch als die *Dämpfung* bezeichnet wird:

$$d = \frac{1}{Q} \quad (7.25)$$

Die Dämpfung unterscheidet sich um den Faktor 2 von dem bei der Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung für freie Schwingungen auftretenden *Dämpfungsgrad* $\vartheta = d/2$ (Gl. 9.82).

Im Gegensatz zu nicht schwingungsfähigen passiven Zweipolen, bei denen Güte und Dämpfung Funktionen der Frequenz sind, werden diese beiden Größen bei Schwingkreisen stets bei der Resonanzfrequenz angegeben, sind also konstante Kennwerte.

7.2.3.5 Grenzfrequenzen, Bandbreite

Die *Grenzfrequenzen* eines Schwingkreises sind diejenigen Frequenzen, bei denen die Klemmengröße, die sich bei der äußeren Anregung des Schwingkreises frei einstellen kann (*Schwinggröße*), auf das $(1/\sqrt{2})$ -fache ihres bei f_{res} auftretenden Maximalwerts abgefallen (Bild 7.15) oder auf das $\sqrt{2}$ -fache ihres bei f_{res} auftretenden Minimalwerts angestiegen ist. Bei Bezeichnung der Schwinggröße mit S lässt sich die Bedingung zur Berechnung der Grenzfrequenzen f_g allgemeingültig formulieren als

$$S(f_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{\text{max}}(f_{\text{res}}) \quad \text{bzw.} \quad S(f_g) = \sqrt{2} S_{\text{min}}(f_{\text{res}}). \quad (7.26)$$

Die untere und die obere Grenzfrequenz, die zu einer Resonanzfrequenz gehören, werden meist mit f_{gu} und f_{go} sowie die entsprechenden *Grenzkreisfrequenzen* mit ω_{gu} und ω_{go} bezeichnet.

Je größer die Güte Q eines Schwingkreises ist, desto stärker ist der Extremwert im Amplitudengang der Schwinggröße ausgeprägt, d. h. desto steiler sind die Flanken dieser *Resonanzkurve*. Die Güte ist also ein Maß für die *Resonanzschärfe*.

Bei stark gedämpften Schwingkreisen ist es möglich, dass der Extremwert der Schwinggröße bei Resonanz so schwach ausgeprägt ist, dass es keine Grenzfrequenzen gibt.

¹Die Tatsache, dass in Gl. (7.24) das Formelzeichen Q für zwei verschiedene Größen auftritt, ist zunächst verwirrend, aber leider nicht vermeidbar.

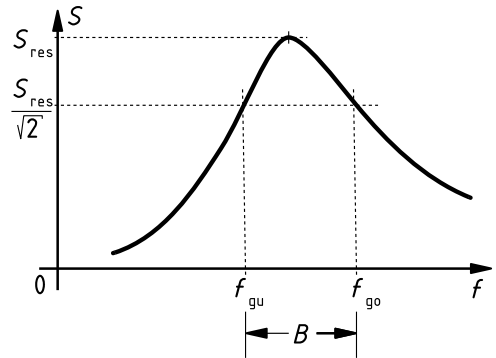


Bild 7.15: Zur Definition der Grenzfrequenzen und der Bandbreite

Die *Bandbreite* B ist der Abstand zwischen unterer und oberer Grenzfrequenz (Bild 7.15):

$$B = f_{go} - f_{gu} \quad (7.27)$$

7.2.4 Elementare Schwingkreise

Elementare Schwingkreise bestehen aus einer reinen Reihen- oder einer reinen Parallelschaltung von genau einer Kapazität C und genau einer Induktivität L sowie ggf. einem Wirkwiderstand R . Die Parameter C , L und R müssen frequenzunabhängig sein. Infolge der beiden komplementären, miteinander verbundenen Energiespeicher L und C bildet eine solche Anordnung einen Schwingkreis mit einem Freiheitsgrad, der genau eine Resonanzfrequenz aufweist.

7.2.4.1 Elementarer Reihenschwingkreis

In Abschnitt 5.7.1.3 wurde das Klemmenverhalten einer RLC-Reihenschaltung bei konstanter Kreisfrequenz ω untersucht. Diese Schaltung mit den in Bild 6.6a sowie Zeile 1 von Tabelle 7.1 eingezeichneten Zählpfeilgrößen wird nun als *elementarer Reihenschwingkreis* aufgefasst, dessen Verhalten bei Veränderung der Kreisfrequenz interessiert.

Aus der Impedanz dieses Schwingkreistyps nach Gl. (5.256) folgt mit Gl. (7.19) die *Resonanzbedingung*

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}(\omega_{\text{res}})) = X(\omega_{\text{res}}) = X_L(\omega_{\text{res}}) + X_C(\omega_{\text{res}}) = \omega_{\text{res}}L - \frac{1}{\omega_{\text{res}}C} = 0, \quad (7.28)$$

aus der die *Resonanzkreisfrequenz*

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.29)$$

bzw. die *Resonanzfrequenz*

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7.30)$$

folgt. Die *Kennkreisfrequenz* eines elementaren Reihenschwingkreises ist gleich seiner Resonanzkreisfrequenz, da bei diesem Schwingkreistyp der Wert des Wirkwiderstandes R die Resonanzfrequenz nicht beeinflusst, wie aus Gl. (7.28) zu ersehen ist:

$$\omega_0 = \omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.31)$$

Damit lässt sich die Impedanz des Schwingkreises

$$\underline{Z}(\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.32)$$

unter Verwendung des Kennwiderstandes nach Gl. (7.22) und der Verstimmung nach Gl. (7.21) in der Form

$$\underline{Z}(\omega) = R + j v Z_0 \quad (7.33)$$

schreiben.

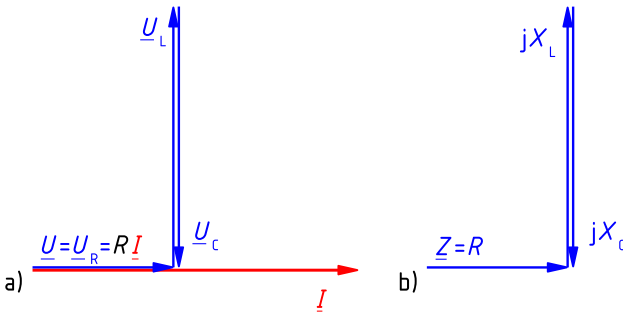


Bild 7.16: Spannungs- (a) und Impedanzzeigerdiagramm (b) eines elementaren Reihenschwingkreises bei Resonanz

Da sich nach Gl. (7.28) bei f_{res} die beiden Blindwiderstände X_L und X_C gegenseitig aufheben (Bild 7.16b), heben sich auch die beiden Teilspannungen \underline{U}_L und \underline{U}_C wegen ihres gleichen Betrages und ihrer Gegenphasigkeit gegenseitig auf (Bild 7.16a).

Bei f_{res} , also $v = 0$, nimmt der Scheinwiderstand des Schwingkreises

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (v Z_0)^2} \quad (7.34)$$

seinen Minimalwert

$$Z(\omega_{\text{res}}) = R$$

an. Die gesamte Klemmenspannung liegt somit am Wirkwiderstand:

$$U_R(\omega_{\text{res}}) = U$$

Die *Güte* des Schwingkreises ist nach Gl. (7.24) das Verhältnis der bei Resonanz in L bzw. in R umgesetzten Leistungen:

$$Q = \frac{|Q(\omega_{\text{res}})|}{P(\omega_{\text{res}})} = \frac{I^2 X_L(\omega_{\text{res}})}{I^2 R} = \frac{I Z_L(\omega_{\text{res}})}{I R} = \frac{U_L(\omega_{\text{res}})}{U_R(\omega_{\text{res}})} = \frac{U_L(\omega_{\text{res}})}{U} = \frac{\omega_{\text{res}} L}{R} \quad (7.35)$$

Alternativ kann die Güte als das Verhältnis der bei Resonanz in C bzw. in R umgesetzten Leistungen berechnet werden:

$$Q = \frac{I^2 |X_C(\omega_{\text{res}})|}{I^2 R} = \frac{I Z_C(\omega_{\text{res}})}{I R} = \frac{U_C(\omega_{\text{res}})}{U_R(\omega_{\text{res}})} = \frac{U_C(\omega_{\text{res}})}{U} = \frac{1/(\omega_{\text{res}} C)}{R} \quad (7.36)$$

Mit Gl. (7.22) folgt wegen $\omega_0 = \omega_{\text{res}}$ aus den rechten Seiten der Gln. (7.35) und (7.36)

$$Q = \frac{Z_0}{R}. \quad (7.37)$$

An den Gln. (7.35) und (7.36) erkennt man, dass die Güte des Schwingkreises gleich dem messtechnisch oft einfach bestimmbareren Verhältnis der Spannungen an einem Blindwiderstand und dem Wirkwiderstand bei f_{res} ist.

Verhalten des elementaren Reihenschwingkreises bei Spannungseinspeisung

Anregungsgröße ist die Klemmenspannung \underline{U} mit konstantem Betrag und variabler Frequenz. Die über die Klemmen des Schwingkreises erfassbare *Schwinggröße* ist der Klemmenstrom \underline{I} . Dieser nimmt bei f_{res} seinen *maximalen Betrag*

$$I_{\text{res}} = I(\omega_{\text{res}}) = \frac{U}{Z(\omega_{\text{res}})} = \frac{U}{R} \quad (7.38)$$

an. Der *Resonanzstrom* ist ein reiner Wirkstrom. Wegen der Kapazität gilt $I(\omega \rightarrow 0) = 0$ und wegen der Induktivität $I(\omega \rightarrow \infty) = 0$.

Bei den Grenzfrequenzen muss nach Gl. (7.26) der Klemmenstrom um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner als der Resonanzstrom sein. Dazu muss der Scheinwiderstand des Schwingkreises um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als sein Minimalwert R sein, d. h. es muss gelten

$$Z(\omega_g) = \sqrt{2} Z(\omega_{\text{res}}) = \sqrt{2} R. \quad (7.39)$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn der Betrag des Imaginärteils der Impedanz des Schwingkreises genauso groß ist wie ihr Realteil, also

$$|\text{Im}(Z(\omega_g))| = R \quad (7.40)$$

gilt, siehe Bild 7.17.

Bei den Grenzfrequenzen ist also

$$\varphi_g = \mp 45^\circ. \quad (7.41)$$

Beim elementaren Reihenschwingkreis beträgt die Phasenverschiebung zwischen den Klemmengrößen bei den Grenzfrequenzen $\mp 45^\circ$.

Aus Gl. (7.33) folgt mit Gl. (7.40) die Bestimmungsgleichung

$$|v_g Z_0| = R \quad (7.42)$$

für die Verstimmung v_g bei den Grenzfrequenzen, aus der sich mit Gl. (7.37)

$$v_g = \mp \frac{R}{Z_0} = \mp \frac{1}{Q} \quad (7.43)$$

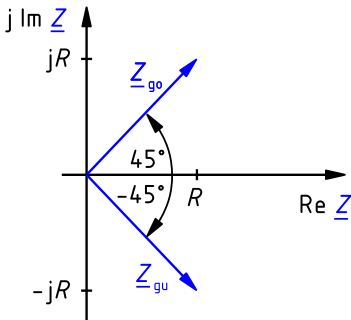


Bild 7.17: Zeigerdiagramme der Impedanzen \underline{Z} bei der unteren bzw. oberen Grenzkreisfrequenz beim elementaren Reihenschwingkreis

ergibt. Durch Einsetzen der Definition der Verstimmung gemäß Gl. (7.21) in Gl. (7.43) erhält man

$$\frac{\omega_g}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_g} = \mp \frac{1}{Q}. \quad (7.44)$$

Durch Multiplikation von Gl. (7.44) mit $\omega_0 \omega_g$ erhält man die quadratische Gleichung

$$\omega_g^2 \mp \frac{\omega_0 \omega_g}{Q} - \omega_0^2 = 0 \quad (7.45)$$

mit den beiden Lösungen (nur positive Werte von ω sind physikalisch möglich)

$$\omega_{\text{gu,o}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q} \right). \quad (7.46)$$

Für $Q \geq 4$ gilt die (nun mit Frequenzen statt Kreisfrequenzen ausgedrückte) Näherung

$$f_{\text{gu,o}} \approx f_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q} \right) \quad (7.47)$$

mit einem betragsmäßigen Fehler $< 1\%$. Aus der Differenz der beiden Grenzkreisfrequenzen gemäß Gl. (7.46) folgt die wichtige Beziehung

$$B = \frac{\omega_{\text{go}} - \omega_{\text{gu}}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q}. \quad (7.48)$$

Je größer bei fester Resonanzfrequenz die Güte eines Schwingkreises ist, desto kleiner ist seine Bandbreite. Eine große Güte führt also zu einem *steilflankigen Frequenzgang der Schwinggröße* (Resonanzkurve) und einem *ausgeprägten Resonanzextremum*, also hoher *Frequenzselektivität*. Dies ist beispielsweise für schmalbandige Filterschaltungen (Abschnitt 7.1.2.4) erforderlich. In solchen Fällen müssen Spulen und Kondensatoren mit möglichst hohen Güten für den Aufbau der Schwingkreise verwendet werden.

Die *Bandbreite* eines elementaren Reihenschwingkreises lässt sich messtechnisch also nicht nur aus den Grenzfrequenzen, sondern auch aus seiner Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} = f_0$ und seiner Güte Q bestimmen.

Multipliziert man die Ausdrücke für die beiden Grenzkreisfrequenzen nach Gl. (7.46) miteinander, erhält man die Beziehung $\omega_{\text{gu}} \omega_{\text{go}} = \omega_0^2$, aus der

$$f_0 = \sqrt{f_{\text{gu}} f_{\text{go}}} \quad (7.49)$$

folgt. Die Kennfrequenz ist also der geometrische Mittelwert der Grenzfrequenzen.

Je größer der Resonanzstrom I_{res} ist, desto größer sind auch die von ihm an der Induktivität und der Kapazität verursachten Spannungen $I_{\text{res}}(\omega_{\text{res}}L)$ und $I_{\text{res}}/(\omega_{\text{res}}C)$. Diese Spannungen können die Klemmenspannung U überschreiten, sofern die Scheinwiderstände Z_L und Z_C bei Resonanzfrequenz größer als der Wirkwiderstand R sind. Dies ist nach den Gln. (7.35) und (7.36) für $Q > 1$ der Fall. Diese *Spannungsüberhöhung* bei Resonanzfrequenz wird als *Spannungs-Resonanz* bezeichnet. In Reihenschwingkreisen können an Spulen und Kondensatoren Spannungen auftreten, die erheblich größer als die Klemmenspannung sind und deren Werte bei der Dimensionierung der Bauelemente hinsichtlich ihrer Spannungsfestigkeit zu berücksichtigen sind. Praktisch eingesetzt wird dieser Effekt zur frequenzselektiven Erhöhung von Spannungen ohne Verstärker oder Transformatoren z. B. in Rundfunk- und Fernsehempfängern.

Wegen $U_R = IR$ erreicht auch die Spannung über dem Wirkwiderstand bei f_{res} ihren Maximalwert. Es tritt aber keine Spannungsüberhöhung auf, da maximal die Klemmenspannung erreicht wird.

Beispiel 7.9: Elementarer Reihenschwingkreis bei Spannungseinspeisung

Betrachtet wird der elementare Reihenschwingkreis aus Wirkwiderstand $R = 15 \Omega$, Induktivität $L = 0,2 \text{ H}$ und Kapazität $C = 30 \mu\text{F}$, dessen Impedanz-Ortskurve bereits in Beispiel 6.3 behandelt wurde. An die Klemmen der Schaltung wird eine Sinusspannung mit konstantem Effektivwert $U = 120 \text{ V}$ und variabler Frequenz gelegt.

Für den *Frequenzbereich* $f \rightarrow 0 \text{ Hz}$ bis $f = 120 \text{ Hz}$ sollen der Klemmenstrom I , die Spannungen U_L und U_C über den Blindwiderständen sowie der Phasenverschiebungswinkel φ als Funktionen der Frequenz dargestellt werden.

Für diskrete Frequenzwerte, z. B. im Abstand von 5 Hz, werden jeweils die Zahlenwerte von Scheinwiderstand

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

Klemmenstrom, den gesuchten Spannungen sowie des Phasenverschiebungswinkels

$$I = \frac{U}{Z}, \quad U_L = I\omega L, \quad U_C = \frac{I}{\omega C}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

berechnet. Die mittels der so berechneten Stützwerte konstruierten Frequenzgänge sind in Bild 7.18 dargestellt.

Die Asymptoten der dargestellten Spannungen sind $U_C(f \rightarrow 0) = U$, $U_C(f \rightarrow \infty) = 0$, $U_L(f \rightarrow 0) = 0$, $U_L(f \rightarrow \infty) = U$.

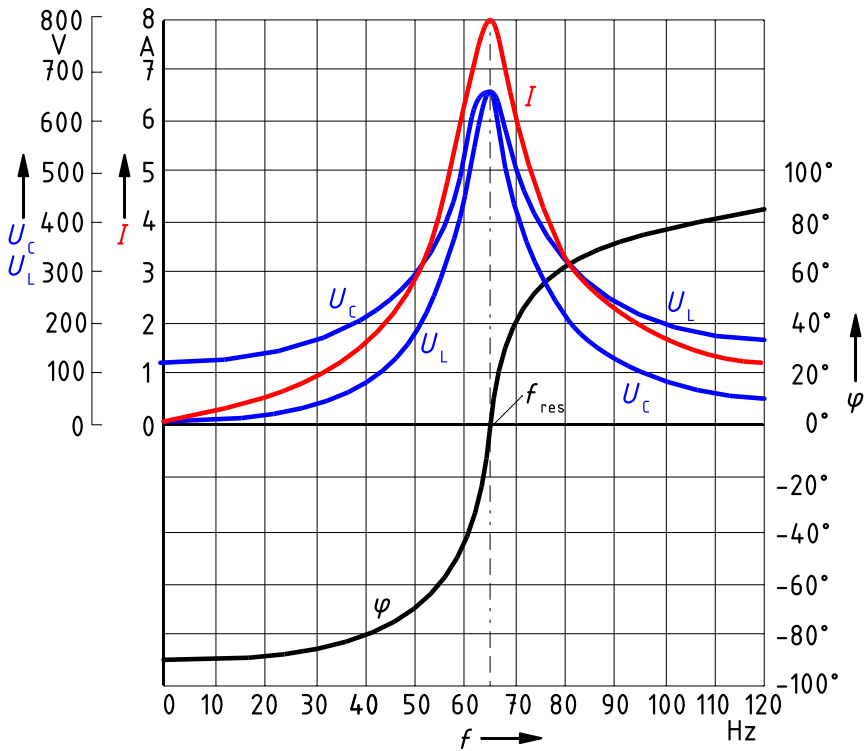


Bild 7.18: Frequenzabhängigkeit von Strom I , Spannungen U_C , U_L und Phasenverschiebungswinkel φ eines elementaren Reihenschwingkreises in Beispiel 7.9 bei kleiner Dämpfung und Spannungseinspeisung

Die Resonanzfrequenz beträgt nach Gl. (7.30)

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28\sqrt{0,2(\text{Vs/A})30\mu\text{As/V}}} = 65 \text{ Hz}.$$

Bei f_{res} erreicht der Frequenzgang des Klemmenstroms $I = g(f)$ seinen Maximalwert mit dem Resonanzstrom

$$I_{\text{res}} = \frac{U}{R} = \frac{120 \text{ V}}{15 \Omega} = 8 \text{ A}.$$

Der in Bild 7.18 nicht dargestellte Frequenzgang der Spannung U_R über dem Wirkwiderstand hat die gleiche Form wie der Frequenzgang von I mit dem Maximalwert $U_R(\omega_{\text{res}}) = U = 120 \text{ V}$ und den Asymptoten $U_R(f \rightarrow 0) = 0$, $U_R(f \rightarrow \infty) = 0$.

Die Güte des Schwingkreises ist nach Gl. (7.35)

$$Q = \frac{\omega_{\text{res}}L}{R} = \frac{2\pi \cdot 65 \text{ Hz} \cdot 0,2 (\text{Vs/A})}{15 \Omega} = 5,44 \gg 1;$$

er ist also nur schwach gedämpft.

Die bei f_{res} auftretenden Spannungen an der Induktivität

$$U_L(\omega_{\text{res}}) = I_{\text{res}} \omega_{\text{res}} L = 8 \text{ A} \cdot 2\pi \cdot 65 \text{ Hz} \cdot 0,2 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 652 \text{ V}$$

und an der Kapazität

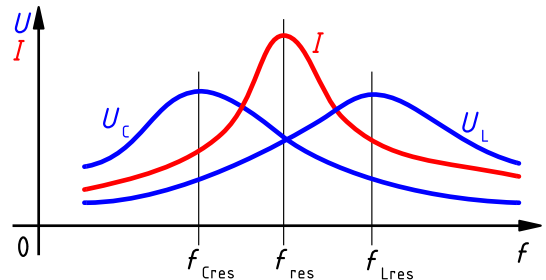
$$U_C(\omega_{\text{res}}) = \frac{I_{\text{res}}}{\omega_{\text{res}} C} = \frac{8 \text{ A}}{2\pi \cdot 65 \text{ Hz} \cdot 30 \mu\text{As/V}} = 652 \text{ V}$$

stimmen im vorliegenden Fall eines schwach gedämpften Schwingkreises *näherungsweise* mit den Maximalwerten, die diese Spannungen annehmen können, überein, wie aus Bild 7.18 ersichtlich ist. Das Verhältnis der Spannungen an Induktivität bzw. Kapazität und der am Schwingkreis anliegenden Klemmenspannung ist bei f_{res} gleich der Güte Q des Schwingkreises.

Bild 7.18 zeigt, dass der Strom I und die Spannungen U_L und U_C in Resonanznähe sehr steil ansteigen bzw. abfallen. Dieser Verlauf der *Resonanzkurven* ist um so schärfer ausgeprägt, je größer die Güte Q des Schwingkreises ist.

In Bild 7.18 liegen die Maxima des Stroms I und der Spannungen U_L und U_C ungefähr bei der Resonanzfrequenz f_{res} . Das gilt aber nur, weil der Schwingkreis schwach gedämpft ist. Für größere Dämpfungen liegen die Maxima der drei Resonanzkurven von Strom I und den Spannungen U_L und U_C bei deutlich unterschiedlichen Frequenzen, wie in Bild 7.19 dargestellt.

Bild 7.19: Frequenzabhängigkeit von Strom I und Spannungen U_L , U_C in einem stark gedämpften elementaren Reihenschwingkreis



Aus dem Amplitudenfrequenzgang des Stroms durch einen elementaren Reihenschwingkreis

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} \quad (7.50)$$

lassen sich einfach die Amplitudenfrequenzgänge der Spannungen an der Induktivität

$$U_L(\omega) = I\omega L = \frac{U \omega L}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} \quad (7.51)$$

und an der Kapazität

$$U_C(\omega) = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} \quad (7.52)$$

berechnen.

Der Frequenzgang von U_L ergibt sich durch Multiplikation des Frequenzgangs von I (mit seinem Maximum bei f_{res}) mit dem Frequenzgang von $Z_L = \omega L \sim \omega$. Hierdurch tritt das Maximum von U_L bei einer Frequenz $f_{L\text{res}} > f_{\text{res}}$ auf.

Der Frequenzgang von U_C ergibt sich durch Multiplikation des Frequenzgangs von I mit dem Frequenzgang $Z_C = 1/\omega C \sim 1/\omega$. Hierdurch tritt das Maximum von U_C bei einer Frequenz $f_{C\text{res}} < f_{\text{res}}$ auf.

Nach den Regeln der Differenzialrechnung erhält man die Maxima der Spannungen aus den Ableitungen $dU_C/d\omega = 0$ bzw. $dU_L/d\omega = 0$ und damit die Bestimmungsgleichungen für die Frequenz

$$f_{L\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = f_{\text{res}} / \sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}} = f_{\text{res}} / \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > f_{\text{res}}, \quad (7.53)$$

bei der die Spannung U_L ihr Maximum erreicht, und für die Frequenz

$$f_{C\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = f_{\text{res}} \cdot \sqrt{1 - \frac{CR^2}{2L}} = f_{\text{res}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < f_{\text{res}}, \quad (7.54)$$

bei der der Maximalwert der Spannung U_C auftritt. Die Resonanzfrequenzen für die Spannungen über den beiden Blindwiderständen weichen also wie erwartet von der nach Gl. (7.31) berechneten Resonanzfrequenz f_{res} des Schwingkreises ab. Es gilt $f_{C\text{res}} < f_{\text{res}} < f_{L\text{res}}$. Die Abweichung beträgt allerdings weniger als 3%, sofern $Q \geq 3$ ist.

Aus den Gln. (7.53) und (7.54) ist ersichtlich, dass an den beiden Blindwiderständen keine Resonanz auftritt, sofern das Argument der Wurzel kleiner oder gleich null ist. Aus dieser Bedingung folgt, dass dieser Fall bei $Q < 1/\sqrt{2} \approx 0,71$ vorliegt.

Setzt man Gl. (7.53) in Gl. (7.51) bzw. Gl. (7.54) in Gl. (7.52) ein und bezieht das Ergebnis auf die Klemmenspannung U , so erhält man unter Verwendung der Gln. (7.35) und (7.36) die maximal auftretenden Spannungsüberhöhungen an Induktivität bzw. Kapazität, die den gleichen Wert

$$\frac{U_L(\omega_{L\text{res}})}{U} = \frac{U_C(\omega_{C\text{res}})}{U} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > Q \quad (7.55)$$

haben. Aus Gl. (7.55) folgt, dass für $Q \geq 3$ der Maximalwert der Spannungen über Induktivität und Kapazität um weniger als 1,5% von dem Wert bei der Resonanzfrequenz f_{res} des Schwingkreises abweicht.

Verhalten des elementaren Reihenschwingkreises bei Stromspeisung

Anregungsgröße ist der Klemmenstrom \underline{I} mit konstantem Betrag und variabler Frequenz. Die über die Klemmen des Schwingkreises erfassbare *Schwinggröße* ist die Klemmenspannung \underline{U} . Diese nimmt bei f_{res} ihren *minimalen Betrag*

$$U_{\text{res}} = U(\omega_{\text{res}}) = IZ(\omega_{\text{res}}) = IR \quad (7.56)$$

an. Die *Resonanzspannung* ist eine reine Wirkspannung.

Wegen der Spannung an der Kapazität $U_C = IZ_C = I/(\omega C) \sim 1/\omega$ gilt $U(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Die an der Induktivität anliegende Spannung $U_L = IZ_L = I\omega L \sim \omega$ bewirkt $U(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Da reale Stromquellen keine beliebig großen Spannungen liefern können, sind diese Aussagen nur von theoretischer Bedeutung.

Bei den Grenzfrequenzen muss nach Gl. (7.26) die Klemmenspannung um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Resonanzspannung sein. Dazu muss der Scheinwiderstand des Schwingkreises um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als sein Minimalwert R sein. Hieraus folgt der selbe Rechengang zur Bestimmung der Grenzfrequenzen wie bei Spannungseinspeisung mit den selben Ergebnissen.

7.2.4.2 Elementarer Parallelschwingkreis

Die in Abschnitt 5.7.2.3 bei konstanter Kreisfrequenz ω untersuchte GCL-Parallelschaltung wird nun als *elementarer Parallelschwingkreis* betrachtet und ihr Verhalten bei Veränderung der Kreisfrequenz untersucht.

Bei seiner Resonanzfrequenz nimmt der Schwingkreis nur noch Wirkleistung auf; sein Blindleitwert gemäß Gl. (5.293) muss also verschwinden:

$$\operatorname{Im}(\underline{Y}(\omega_{\text{res}})) = B(\omega_{\text{res}}) = B_C(\omega_{\text{res}}) + B_L(\omega_{\text{res}}) = \omega_{\text{res}} C - \frac{1}{\omega_{\text{res}} L} = 0 \quad (7.57)$$

Die aus dieser Bedingung bestimmte Resonanzkreisfrequenz ω_{res} stimmt wie beim elementaren Reihenschwingkreis mit der *Kennkreisfrequenz* ω_0 überein:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.58)$$

Mittels der Kennkreisfrequenz, des Kennleitwertes nach Gl. (7.23) und der Verstimmung nach Gl. (7.21) lässt sich die Admittanz des Schwingkreises in der Form

$$\underline{Y}(\omega) = G + jvY_0 \quad (7.59)$$

darstellen.

Bei f_{res} , also $v = 0$, nimmt der Scheinleitwert des Schwingkreises

$$Y(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + (vY_0)^2} \quad (7.60)$$

seinen Minimalwert $Y(\omega_{\text{res}}) = G$ an. Der Klemmenstrom I fließt auch durch den Wirkleitwert: $I_G(\omega_{\text{res}}) = I$.

Die *Güte* des Schwingkreises ist nach Gl. (7.24) das Verhältnis der bei Resonanz in C bzw. in G umgesetzten Leistungen

$$Q = \frac{|Q(\omega_{\text{res}})|}{P(\omega_{\text{res}})} = \frac{U^2 B_C(\omega_{\text{res}})}{U^2 G} = \frac{U Y_C(\omega_{\text{res}})}{U G} = \frac{I_C(\omega_{\text{res}})}{I_G(\omega_{\text{res}})} = \frac{I_C(\omega_{\text{res}})}{I} = \frac{\omega_{\text{res}} C}{G}, \quad (7.61)$$

das mit dem Verhältnis der bei Resonanz in L bzw. in G umgesetzten Leistungen übereinstimmt:

$$Q = \frac{U^2 |B_L(\omega_{\text{res}})|}{U^2 G} = \frac{U Y_L(\omega_{\text{res}})}{U G} = \frac{I_L(\omega_{\text{res}})}{I_G(\omega_{\text{res}})} = \frac{I_L(\omega_{\text{res}})}{I} = \frac{1/(\omega_{\text{res}} L)}{G} \quad (7.62)$$

Mit Gl. (7.23) folgt aus den rechten Seiten der Gln. (7.61) und (7.62)

$$Q = \frac{Y_0}{G}. \quad (7.63)$$

Verhalten des elementaren Parallelschwingkreises bei Stromeinspeisung

Anregungsgröße ist der Klemmenstrom \underline{I} mit konstantem Betrag und variabler Frequenz. Die über die Klemmen des Schwingkreises erfassbare *Schwinggröße* ist die Klemmenspannung \underline{U} . Diese nimmt bei f_{res} ihren *maximalen Betrag* an:

$$U_{\text{res}} = U(\omega_{\text{res}}) = \frac{I}{Y(\omega_{\text{res}})} = \frac{I}{G} \quad (7.64)$$

Die *Resonanzspannung* ist eine reine Wirkspannung. Wegen der Induktivität gilt $U(\omega \rightarrow 0) = 0$ und wegen der Kapazität $U(\omega \rightarrow \infty) = 0$.

Der Amplitudenfrequenzgang der Spannung hat den gleichen Verlauf wie der Amplitudenfrequenzgang des Klemmenstromes beim elementaren Reihenschwingkreis bei Spannungseinspeisung.

Bei den Grenzfrequenzen muss nach Gl. (7.26) die Klemmenspannung um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner als die Resonanzspannung sein. Dazu muss der Scheinleitwert des Schwingkreises um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als sein Minimalwert G sein, d. h. es muss gelten:

$$Y(\omega_g) = \sqrt{2}Y(\omega_{\text{res}}) = \sqrt{2}G \quad (7.65)$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn der Betrag des Imaginärteils der Admittanz des Schwingkreises genauso groß ist wie ihr Realteil, also

$$|\text{Im } \underline{Y}(\omega_g)| = G \quad (7.66)$$

gilt, siehe Bild 7.20.

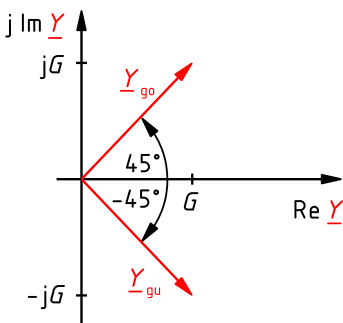


Bild 7.20: Zeigerdiagramme der Admittanzen \underline{Y} bei der unteren bzw. oberen Grenzfrequenz beim elementaren Parallelschwingkreis

Bei den Grenzfrequenzen gilt also, wie beim elementaren Reihenschwingkreis,

$$\varphi_g = \mp 45^\circ. \quad (7.67)$$

Zusammen mit Gl. (7.41) bedeutet dies, dass bei beiden Typen *elementarer* Schwingkreise die Phasenverschiebung zwischen den Klemmengrößen bei den Grenzfrequenzen $\mp 45^\circ$ beträgt. (Diese Aussage ist auf nichtelementare Schwingkreise nicht übertragbar.)

Aus Gl. (7.59) folgt mit Gl. (7.66) die Bedingung für die Verstimmung v_g bei den Grenzfrequenzen

$$|v_g Y_0| = G, \quad (7.68)$$

aus der sich mit Gl. (7.63) die Bedingung

$$v_g = \mp \frac{G}{Y_0} = \mp \frac{1}{Q} \quad (7.69)$$

ergibt. Der weitere Rechengang zur Bestimmung der Grenzfrequenzen und der Bandbreite sowie die daraus folgenden Ergebnisse sind mit denen in Abschnitt 7.2.4.1 ab Gl. (7.45) identisch.

Verhalten des elementaren Parallelschwingkreises bei Spannungseinspeisung

Anregungsgröße ist die Klemmenspannung \underline{U} mit konstantem Betrag und variabler Frequenz. Die über die Klemmen des Schwingkreises erfassbare *Schwinggröße* ist der Klemmenstrom \underline{I} . Dieser nimmt bei f_{res} seinen *minimalen Betrag*

$$I_{\text{res}} = I(\omega_{\text{res}}) = U Y(\omega_{\text{res}}) = UG \quad (7.70)$$

an. Der *Resonanzstrom* ist ein reiner Wirkstrom.

Wegen des durch die Induktivität fließenden Stromes $I_L = U Y_L = U/(\omega L) \sim 1/\omega$ gilt $I(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Der durch die Kapazität fließende Strom $I_C = U Y_C = U \omega C \sim \omega$ bewirkt $I(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Diese Grenzwerte sind nur von theoretischer Bedeutung, da reale Spannungsquellen keine unendlich großen Ströme liefern können.

Die bei Resonanz durch Induktivität L und Kapazität C fließenden Ströme $I_L(\omega_{\text{res}}) = U/(\omega_{\text{res}} L)$ und $I_C(\omega_{\text{res}}) = U \omega_{\text{res}} C$ können sehr groß werden, da sie sich infolge entgegengesetzter Phasenlage kompensieren. Bei Parallelschwingkreisen ist also ein kleiner Klemmenstrom keine Gewähr dafür, dass die Induktivität strommäßig nicht überlastet wird.

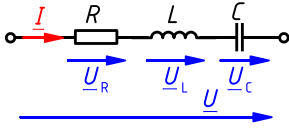
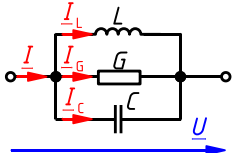
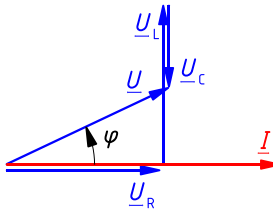
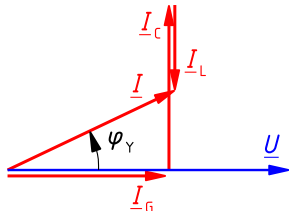
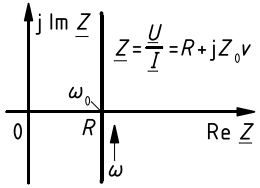
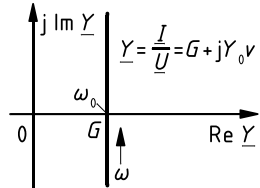
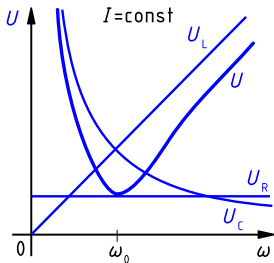
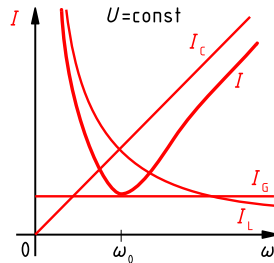
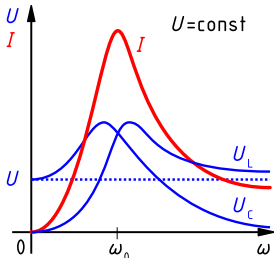
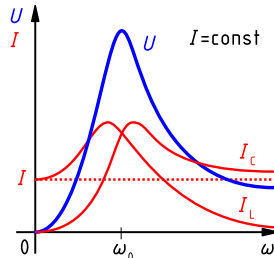
7.2.4.3 Vergleich der elementaren Schwingkreise

Die in den Abschnitten 7.2.4.1 und 7.2.4.2 behandelten elementaren Schwingkreise zeigen ein zueinander *duales Verhalten*. Die einander entsprechenden Größen sind $\underline{U} \leftrightarrow \underline{I}$, $\underline{Z} \leftrightarrow \underline{Y}$, $R \leftrightarrow G$, $L \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow L$, $\varphi = \varphi_Z \leftrightarrow -\varphi_Y$. Diese Entsprechungen werden nachfolgend zusammengefasst und einander in Tabelle 7.1 gegenübergestellt.

Für die Ersatzschaltbilder in Zeile 1 von Tabelle 7.1 gelten die Gleichungen für die Klemmengrößen in Zeile 2, die in Zeile 3 als Zeigerdiagramme für eine Frequenz dargestellt sind, bei der $Z_L > Z_C$ gilt.

Für beide Schwingkreistypen ergibt sich nach Gl. (7.31) bzw. (7.58) die gleiche Kennkreisfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, bei der nur der Wirkanteil von \underline{Z} bzw. von \underline{Y} nach außen wirksam ist. Kennkreisfrequenz und Resonanzkreisfrequenz ω_{res} stimmen bei den elementaren Schwingkreisen überein. Bei den Grenzfrequenzen ist der Phasenverschiebungswinkel jeweils $\varphi_g = \mp 45^\circ$.

Tabelle 7.1: Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise

Zeile	Elementarer Reihenschwingkreis	Elementarer Parallelschwingkreis
1 Ersatzschaltbild		
2 Klemmenverhalten	$\underline{U} = \underline{I}(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})$	$\underline{I} = \underline{U}(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L})$
3 Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme		
4 Kenngrößen	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$	
5 Ortskurve von Impedanz bzw. Admittanz		
6 Amplitudengänge mit Resonanzminimum		
7 Amplitudengänge mit Resonanzmaxima		

Die identische Art der Frequenzabhängigkeit von Impedanz \underline{Z} bzw. Admittanz \underline{Y} der beiden Schwingkreistypen lässt sich mittels der Gln. (7.37) bzw. (7.63) aus den Gln. (7.33) bzw. (7.59) besonders deutlich unter Verwendung der Verstimmung v darstellen:

$$\underline{Z}(\omega) = R(1 + jvQ) \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y}(\omega) = G(1 + jvQ) \quad (7.71)$$

Damit ergibt sich die einheitliche Gleichung

$$\varphi_Z(\omega) = \varphi_Y(\omega) = \arctan(vQ) \quad (7.72)$$

für die Argumente von Impedanz bzw. Admittanz der beiden Schwingkreistypen.

Die Ortskurven von Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ bzw. Admittanz $\underline{Y}(\omega)$ sind in Zeile 5 dargestellt. Beide sind Geraden parallel zur imaginären Achse im 1. und 4. Quadranten und in gleicher Art bzgl. ω parametrisiert.

Bei *Spannungseinspeisung* weist der Amplitudenfrequenzgang des Klemmenstroms I beim Reihenschwingkreis ein *Maximum* (linkes Diagramm in Zeile 7), beim Parallelschwingkreis jedoch ein *Minimum* (rechtes Diagramm in Zeile 6) auf.

Bei *Stromeinspeisung* zeigt der Amplitudenfrequenzgang der Klemmenspannung U beim Reihenschwingkreis ein *Minimum* (linkes Diagramm in Zeile 6), beim Parallelschwingkreis aber ein *Maximum* (rechtes Diagramm in Zeile 7).

7.2.5 Nichtelementare Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad

Die Ersatzschaltungen realer Schwingkreise haben nicht die Struktur der bisher behandelten elementaren Schwingkreise, wenn die Verluste in Spule und Kondensator durch je mindestens einen Wirkwiderstand modelliert werden. Bei üblichen Bauelementen erfolgt dies durch einen Reihenwiderstand zur Induktivität L und einen Parallelwiderstand zur Kapazität C .

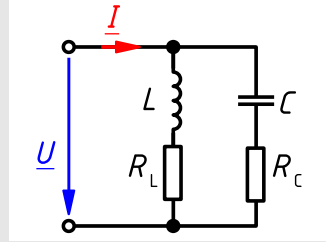
In diesem Abschnitt werden daher Zweipole betrachtet, deren Ersatzschaltbild genau eine Kapazität und genau eine Induktivität enthält, jedoch im Unterschied zu den bisher behandelten elementaren Schwingkreisen einen oder mehrere Wirkwiderstände, die so angeordnet sind, dass eine gemischte Schaltung (Abschnitt 2.2.5) entsteht.

Der mathematische Aufwand zur Analyse dieser Schwingkreise ist vergleichsweise groß. Durch Reihen-/Parallelumwandlung können solche Schaltungen meist in elementare Schwingkreise umgewandelt werden. Als Folge dieser Umwandlung werden die Ersatzparameter R (bzw. G), L und C jedoch selbst frequenzabhängig. Nach dieser Umwandlung können die zunächst nur für elementare Schwingkreise geltenden Gleichungen zur Bestimmung von Resonanzfrequenz und Grenzfrequenzen verwendet werden. Resonanz- und Kennfrequenz stimmen bei diesen Schwingkreisen nicht mehr überein. Ihr Phasenverschiebungswinkel bei den Grenzfrequenzen beträgt nicht mehr $\mp 45^\circ$.

Beispiel 7.10: Parallelschwingkreis aus verlustbehafteten Bauelementen

Für den *nichtelementaren Parallelschwingkreis* nach Bild 7.21 sind die *Resonanzfrequenz* und der Betrag des *Resonanzstroms* bei Spannungseinspeisung zu bestimmen. Der Einfluss der Verluste in Spule und Kapazität, die mittels der als konstant angenommenen Widerstände R_L und R_C modelliert werden, auf die Resonanzgrößen ist zu untersuchen.

Bild 7.21: Parallelschwingkreis mit Berücksichtigung der Verluste in Spule und Kondensator durch je einen den Blindwiderständen vorgeschalteten Wirkwiderstand



Wandelt man die Reihenschaltungen aus R_L und L bzw. R_C und C der parallelen Zweige in Bild 7.21 jeweils in äquivalente Teilparallelzweige um und bezeichnet die resultierende Admittanz mit $G + jB$, so ist der komplexe Klemmenstrom nach Bild 7.21

$$\underline{I} = \underline{U}(G + jB) \quad (7.73)$$

mit dem resultierenden Wirkleitwert

$$G = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \quad (7.74)$$

und dem resultierenden Blindleitwert

$$B = -\frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2}. \quad (7.75)$$

Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ergibt sich aus der Bedingung, dass er sich an seinen Klemmen wie ein reiner Wirkwiderstand verhält, sein Blindleitwert B also null ist. Mit $X_L = \omega L$ und $X_C = -1/(\omega C)$ folgt aus Gl. (7.75) die *Resonanzbedingung*

$$B(\omega_{\text{res}}) = -\frac{\omega_{\text{res}} L}{R_L^2 + (\omega_{\text{res}} L)^2} + \frac{1/(\omega_{\text{res}} C)}{R_C^2 + (\omega_{\text{res}} C)^{-2}} = 0. \quad (7.76)$$

Bringt man die Brüche auf einen Nenner, so ist der Ausdruck null, wenn der Zähler des Bruches null ist:

$$-\left[R_C^2 + \frac{1}{(\omega_{\text{res}} C)^2} \right] \omega_{\text{res}} L + \frac{R_L^2 + (\omega_{\text{res}} L)^2}{\omega_{\text{res}} C} = 0. \quad (7.77)$$

Je nach Fragestellung kann Gl. (7.77) nach ω_{res} , L , C , R_C oder R_L aufgelöst werden. Hier soll sie nach ω_{res} aufgelöst werden. Durch Erweitern von Gl. (7.77) mit $(\omega_{\text{res}} C)^2$ erhält man

$$\omega_{\text{res}} C [R_L^2 + (\omega_{\text{res}} L)^2] - \omega_{\text{res}} L (\omega_{\text{res}}^2 C^2 R_C^2 + 1) = 0$$

und nach Kürzen durch ω_{res} die quadratische Gleichung

$$\omega_{\text{res}}^2 L^2 C - \omega_{\text{res}}^2 L C^2 R_C^2 + C R_L^2 - L = 0.$$

Damit ergibt sich mit der Kennkreisfrequenz ω_0 nach Gl. (7.58) für den Schwingkreis in Bild 7.21 die Resonanzfrequenz

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L - CR_L^2}{CL(L - CR_C^2)}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{L/C - R_L^2}{L/C - R_C^2}}, \quad (7.78)$$

die unter Verwendung des Kennwiderstandes Z_0 gemäß Gl. (7.22) in die Form

$$f_{\text{res}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_0^2 - R_L^2}{Z_0^2 - R_C^2}} \quad (7.79)$$

gebracht werden kann.

Nun wird der *Einfluss der beiden Wirkwiderstände* R_L und R_C auf den Resonanzstrom und die Resonanzfrequenz untersucht.

1. Fall: Im Schwingkreis werden sowohl die Verluste der Spule als auch die des Kondensators mittels der Wirkwiderstände R_L und R_C berücksichtigt.

Im Resonanzfall ist der Blindleitwert $B = 0$ und nach Gl. (7.73) wird der Betrag des Stroms $\underline{I} = \underline{U}G$. Setzt man den Wirkleitwert aus Gl. (7.74) ein, erhält man den *Resonanzstrom*

$$I_{\text{res}} = U \left[\frac{R_L}{R_L^2 + (\omega_{\text{res}}L)^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + (\omega_{\text{res}}C)^{-2}} \right]. \quad (7.80)$$

Die Zusammenfassung der beiden Brüche ergibt mit Gl. (7.77)

$$I_{\text{res}} = U \frac{R_L + R_C \omega_{\text{res}}^2 LC}{R_L^2 + (\omega_{\text{res}}L)^2}. \quad (7.81)$$

Die zugehörige *Resonanzfrequenz* f_{res} ist bereits in Gl. (7.79) angegeben.

2. Fall: Die Verluste der Spule werden berücksichtigt, die des Kondensators vernachlässigt, also ein verlustloser Kondensator angenommen. Mit $R_C = 0$ vereinfacht sich Gl. (7.79) zu

$$f_{\text{res}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_0^2 - R_L^2}{Z_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{R_L^2}{Z_0^2}} < \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0 \quad (7.82)$$

Diese Resonanzfrequenz ist kleiner als die des ungedämpften Schwingkreises nach Gl. (7.84). Der *Resonanzstrom* ergibt sich aus Gl. (7.81), indem ebenfalls $R_C = 0$ eingesetzt wird:

$$I_{\text{res}} = U \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega_{\text{res}}L)^2} \quad (7.83)$$

3. Fall: Die Verluste von Spule und Kondensator werden vernachlässigt. Damit reduziert sich das Ersatzschaltbild für diesen Fall auf einen elementaren, ungedämpften Parallelschwingkreis.

Wird in Gl. (7.82) $R_L = 0$ gesetzt, so erhält man die *Resonanzfrequenz*

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0. \quad (7.84)$$

Wie nicht anders zu erwarten war, stimmt in diesem Fall die Resonanzfrequenz mit der Kennkreisfrequenz überein. Der *Resonanzstrom* ergibt sich aus Gl. (7.83), indem $R_L = 0$ gesetzt wird:

$$I_{\text{res}} = 0 \quad (7.85)$$

Bei einem verlustlosen Parallelschwingkreis verschwindet bei der Resonanzfrequenz also der Klemmenstrom; er wirkt wie eine Unterbrechung. Innerhalb des Schwingkreises fließt jedoch ein durch Z_0 bestimmter Strom, der die Energiependelung zwischen L und C bewirkt.

Die Strom-Ortskurve eines Schwingkreises mit der hier betrachteten Struktur bei Spannungs- einpeisung wird in Beispiel 6.5 behandelt.

Beim Messen von Spannungen oder Strömen in Schwingkreisen ist zu beachten, dass durch die Innenwiderstände der Messgeräte zusätzliche, unerwünschte Wirkwiderstände in die Schaltung eingebracht werden. Die hierdurch verursachte Verringerung der Güte führt zu weniger deutlich ausgeprägten Resonanzextrema. Außerdem kann eine Verringerung der Resonanzfrequenz bewirkt werden.

7.2.6 Schwingkreise mit mehreren Freiheitsgraden

In den Abschnitten 7.2.4 und 7.2.5 werden einfache Schwingkreise betrachtet, bei denen eine Energiependelung nur zwischen einer Kapazität und einer Induktivität stattfindet. Solche Schwingkreise haben nur einen *Freiheitsgrad*. Sich selbst überlassen, schwingt ein solcher Kreis mit *einer* ganz bestimmten, ihm eigenen Frequenz, seiner *Eigenfrequenz*.

Ein weit verbreitetes Beispiel für schwingungsfähige Zweipole mit mehreren Resonanzfrequenzen sind *Schwingquarze* [LBL08], [ZB99]. Durch ihren elektromechanischen Aufbau weisen sie neben einer Grund-Resonanzfrequenz weitere ausgeprägte Resonanzen bei ungeradzahligem Vielfachen dieser Frequenz auf [Süß05]. Quarze können Güten Q von weit über 10^5 erreichen und werden zum Aufbau von Oszillatoren im Frequenzbereich von ca. 0,1 MHz bis ca. 0,1 GHz verwendet.

Die in beliebigen elektrischen Schaltungen – von der Mikroelektronik bis zur Hochspannungstechnik – tatsächlich auftretenden Schwingungsvorgänge sind bei genauer Betrachtung im Allgemeinen weitaus komplizierter als bisher dargestellt. Die Ersatzschaltungen aus den passiven Grundzweipolen mit den konzentrierten Parametern Wirkwiderstand R , Induktivität L und Kapazität C können nur ein vereinfachtes Modell der tatsächlich auftretenden *räumlich verteilten* physikalischen Effekte sein, die genauer mittels elektrischer und magnetischer Feldgrößen (Kapitel 3 und 4) beschrieben werden.

Neben der erwünschten Wirkung einer realisierten Schaltung gibt es immer auch *parasitäre Effekte*, die durch unerwünschte, jedoch unvermeidbare elektrische und magnetische Felder in der Anordnung entstehen.

Sowohl die räumlich verteilten Parameter als auch die parasitären Effekte können durch – evtl. komplizierte – Ersatzschaltungen mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit berücksichtigt werden. Die Herausforderung für Ingenieure besteht darin, zur Modellierung einer konkreten Anordnung mittels einer Ersatzschaltung eine geeignete Struktur und die richtigen Parameterwerte der Elemente, aus denen sie besteht, zu bestimmen.

Beispiel 7.11: Schwingungsverhalten einer verfeinerten Schwingkreis-Ersatzschaltung

Betrachtet wird ein Reihenschwingkreis aus einer Spule und einem sehr verlustarmen Kondensator. Der Schwingkreis soll so modelliert werden, dass die Auswirkungen der räumlichen Ausdehnung der Wicklung der Spule auf das Schwingungsverhalten der Schaltung qualitativ diskutiert werden können.

Ausgangspunkt ist das Ersatzschaltbild in Bild 7.22a, in dem die Spule durch eine RL-Reihenschaltung und der Kondensator durch eine Kapazität modelliert werden.

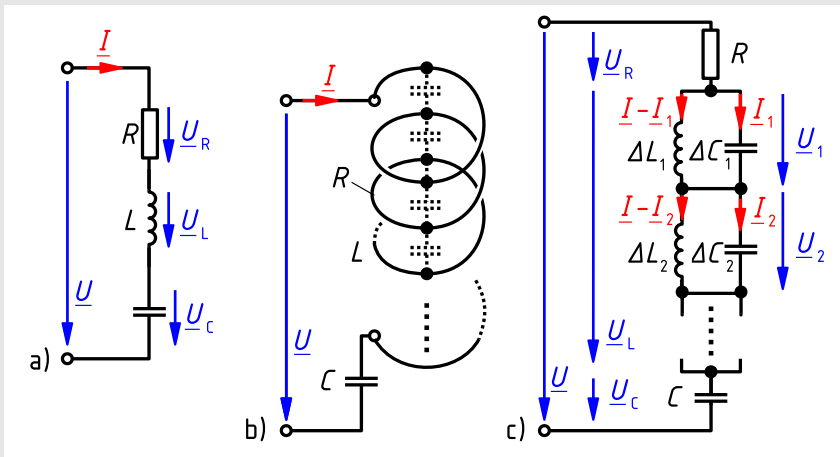


Bild 7.22: Realer Reihenschwingkreis aus widerstandsbehafteter Spule und Kondensator
 a) einfachste Ersatzschaltung für Schwingungen in der ersten Eigenform
 b) schematische Darstellung der Wicklungskapazitäten
 c) verfeinerte Ersatzschaltung für Schwingungen in mehreren Eigenformen

Die Gesamtinduktivität L der Spule wird durch eine Reihenschaltung von Teilinduktivitäten ΔL_μ nachgebildet, die z. B. jeweils eine Windung der Wicklung repräsentieren. Zwischen den Windungen der Spule sind *parasitäre Kapazitäten* wirksam, die durch Teilkapazitäten ΔC_ν modelliert werden, die gemäß Bild 7.22b parallel zu den Teilinduktivitäten zu schalten sind. Der Wirkwiderstand der Spule ist ebenfalls über die gesamte Wicklung verteilt. Er könnte durch Teilwiderstände ΔR_λ modelliert werden, die jeweils in Reihe zu den einzelnen Teilinduktivitäten geschaltet werden. Darauf wird verzichtet, da eine solche Verfeinerung des Modells auf das hier betrachtete qualitative Schwingungsverhalten keinen

Einfluss hätte.

Die so verfeinerte Ersatzschaltung in Bild 7.22c kann neben der Energiependelung zwischen dem durch die Kapazität C modellierten Kondensator und der durch die Gesamtinduktivität L modellierten Spule auch Energieumspeichervorgänge innerhalb der Spule zwischen den Teilinduktivitäten ΔL und den Teilkapazitäten ΔC der einzelnen Windungen nachbilden.

Daraus ist erkennbar, dass außer der Schwingung in der *ersten Eigenform*, die dem Energieaustausch zwischen L und C entspricht, offensichtlich *weitere Schwingungseigenformen* möglich sind, die als Energiependelungen zwischen den Teilinduktivitäten ΔL_μ und den Teilkapazitäten ΔC_ν innerhalb der Spule ablaufen.

Die Schwingungen der einzelnen Eigenformen eines Schwingkreises beeinflussen sich gegenseitig, sie sind miteinander gekoppelt. Überlässt man nach geeigneter Anregung das System sich selbst, so verlaufen die Schwingungen jeder Eigenform mit der ihnen eigenen Frequenz, die als *Eigenfrequenz der jeweiligen Eigenform* bezeichnet wird. Schwingkreise, deren Schwingungsvorgang durch n Parameter, also durch n *voneinander unabhängige Gleichungen*, eindeutig bestimmt wird, nennt man Schwingkreise mit n *Freiheitsgraden*. Der Schwingungsvorgang solcher Systeme lässt sich als Überlagerung von n Einzelschwingungen in n charakteristischen Eigenformen auffassen.

Bei *erzwungenen* Schwingungen bilden sich nur diejenigen Schwingungseigenformen aus, deren Eigenfrequenzen weitgehend mit der Frequenz der Anregungsgröße übereinstimmen. Werden durch Variation der Frequenz der Anregungsgröße nacheinander alle n Eigenfrequenzen angeregt, so weist die Resonanzkurve, d. h. der Amplitudengang, bei jeder der n Eigenfrequenzen ein relatives Extremum auf. Es treten also so viele Extrema auf, wie das System Freiheitsgrade hat.

Bei der Betrachtung des Reihenschwingkreises in Beispiel 7.11 wurde nicht festgelegt, durch wie viele Teilinduktivitäten und Teilkapazitäten die Spule modelliert wird. Die Eigenschaften der Spule werden um so genauer modelliert, je feiner man sie in einzelne Elemente ΔL_μ und ΔC_ν unterteilt. Damit steigt natürlich die Anzahl der Freiheitsgrade des durch die Ersatzschaltung beschriebenen Schwingungsmodells und die mathematische Behandlung wird aufwändiger.

So wie hier beispielhaft erläutert, müssen alle praktisch gegebenen Schwingungssysteme untersucht werden, um Modelle zu entwerfen, die bei *möglichst einfacher Struktur* die praktischen Gegebenheiten für den jeweiligen Anwendungszweck *hinreichend genau* beschreiben.



8 Mehrphasensysteme

Die in den Kapiteln 5 bis 7 betrachteten Schaltungen werden aus nur einer Quelle mit sinusförmiger Spannung bzw. sinusförmigem Strom gespeist. Solche Systeme nennt man *einphasige Systeme*. Rotierende Generatoren, die nur eine einzige spannungserzeugende Wicklung enthalten, haben aber schwerwiegende Nachteile. Diese vermeidet man, wenn man z. B. drei gleichartige Wicklungen gleichmäßig über den Umfang verteilt unterbringt, sodass drei gleich große, gegeneinander phasenverschobene Sinusspannungen erzeugt werden. Derartige *Mehrphasensysteme* werden in diesem Kapitel beschrieben.

An Abschnitt 8.1 werden einige neue Begriffe sowie die in Mehrphasensystemen üblichen Schaltungsarten erläutert. In Abschnitt 8.2 konzentrieren sich die Betrachtungen auf das technisch bedeutsame *symmetrische Dreiphasensystem*, das auch als *Drehstromsystem* bezeichnet wird. Hierbei werden in Stern- und Dreieckschaltung sowohl Verbraucher betrachtet, die das Dreiphasensystem gleichmäßig belasten, als auch solche, die eine ungleiche Belastung der drei Phasen verursachen.

8.1 Verkettete Mehrphasensysteme

Die in einem rotierenden Mehrphasengenerator in seinen m verschiedenen Wicklungen erzeugten Sinusspannungen können im Prinzip galvanisch voneinander völlig getrennt zur Versorgung verschiedener einphasiger Verbraucher verwendet werden. Ein solches System, wie es z. B. in Bild 8.2a für $m = 6$ dargestellt ist, nennt man ein *offenes Mehrphasensystem*. Zum Anschluss der Verbraucher benötigt man für jede Wicklung zwei, insgesamt also $2m$ Zuleitungen. Wenn man hingegen die m Wicklungen, die auch als *Wicklungsstränge* oder einfach als *Stränge* bezeichnet werden (Abschnitt 8.2.1.1), in geeigneter Weise galvanisch miteinander verbindet, lässt sich die Anzahl der Zuleitungen auf $m + 1$ oder sogar auf m verringern. In diesem Fall spricht man von einem *verketteten Mehrphasensystem*.

8.1.1 Schaltungsarten

Im Folgenden werden zunächst die beiden bei verketteten Mehrphasensystemen gebräuchlichen Schaltungsarten Sternschaltung und Ringschaltung vorgestellt. Danach wird als kleinstmögliches Mehrphasensystem das Zweiphasensystem untersucht.

8.1.1.1 Mehrphasengenerator

In den m Wicklungssträngen eines Mehrphasengenerators, die über den Umfang um bestimmte Winkel gegeneinander versetzt angeordnet sind, werden m gleichfrequente, gegeneinander phasenverschobene Sinusspannungen erzeugt. Bei Generatoren mit zwei magnetischen Polen entsprechen die Phasenverschiebungen zwischen den Strangspannungen den Winkeln zwischen den Wicklungsachsen.

Wenn die Wicklungen gleich ausgeführt und alle um denselben Winkel $360^\circ/m$ gegeneinander versetzt sind, entsteht wie in Beispiel 8.1 ein *symmetrisches*, sonst wie in Beispiel 8.2 ein *unsymmetrisches Mehrphasensystem*.

Beispiel 8.1: Strangspannungen bei einem symmetrischen Dreiphasengenerator

Bei einem symmetrischen rotierenden Dreiphasengenerator sind die $m = 3$ Strangwicklungen über den Umfang gleichmäßig verteilt. Bei einer zweipoligen Maschine nach Bild 8.1a müssen die Wicklungsachsen daher jeweils um $360^\circ/3 = 120^\circ$ räumlich gegeneinander versetzt sein.

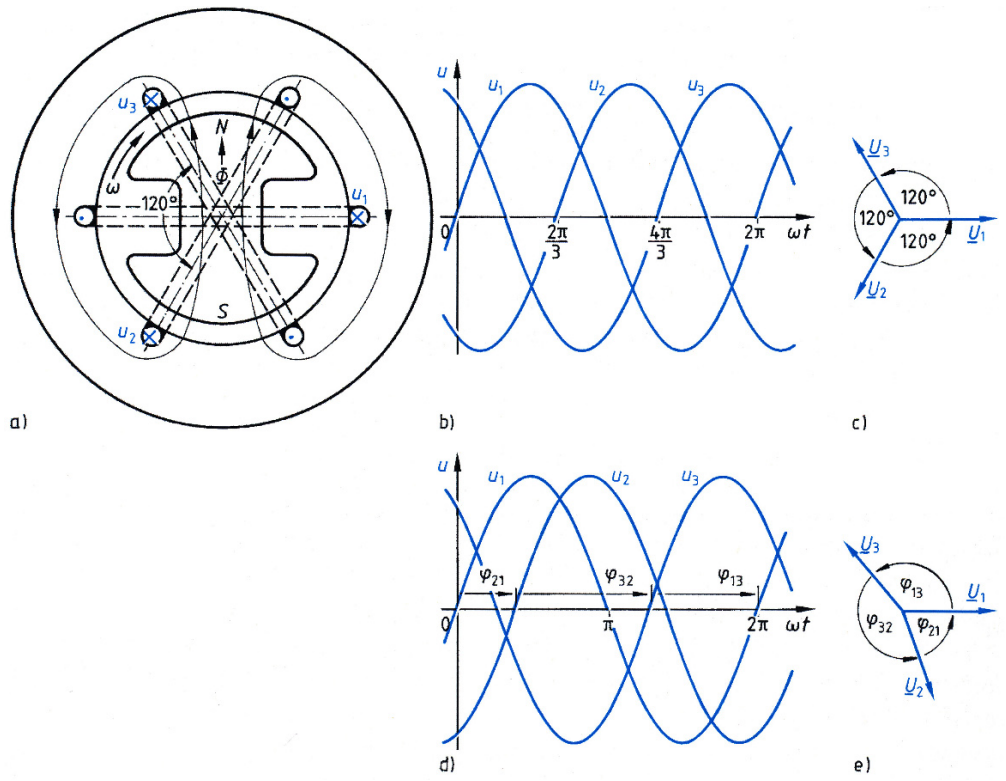


Bild 8.1: Symmetrischer zweipoliger Dreiphasengenerator im Querschnitt (a) mit den drei Wicklungssträngen, dem Zeitdiagramm (b) und dem Effektivwertzeigerdiagramm (c) der Strangspannungen u_1 , u_2 , u_3 ; ferner zum Vergleich Zeitdiagramm (d) und Effektivwertzeigerdiagramm (e) der Strangspannungen bei unsymmetrischer Anordnung der Wicklungsstränge

Da die Wicklungsstränge gleich ausgeführt sind und nacheinander im zeitlichen Abstand von einer drittel Periodendauer $T/3$ vom gleichen magnetischen Fluss Φ durchsetzt werden, werden in ihnen nach Gl. (5.26) Strangspannungen mit gleicher Frequenz f , gleichem Scheitelwert \hat{u}_{Str} und gleichem Effektivwert U_{Str} induziert und die erzeugten Spannungen sind nach Bild 8.1b um je 120° gegeneinander phasenverschoben. Die Spannungen unterscheiden sich also nur im Nullphasenwinkel (Abschnitt 5.2.2.3) um jeweils 120° . Bei rein sinusförmiger Flussänderung gilt daher nach Gl. (5.26) für die Augenblickswerte der

Strangspannungen

$$u_1 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t), \quad u_2 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t - 120^\circ), \quad u_3 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t - 240^\circ)$$

bzw. nach Bild 8.1c für die Spannungszeiger

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j120^\circ}, \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_2 e^{-j120^\circ} = \underline{U}_1 e^{-j240^\circ}.$$

Beispiel 8.2: Strangspannungen bei einem unsymmetrischen Dreiphasengenerator

Für den Fall, dass die drei Strangwicklungen des Dreiphasengenerators aus Beispiel 8.1 nicht gleichmäßig über den Umfang verteilt angeordnet sind, erhält man ein entsprechend unsymmetrisches Spannungssystem. Wenn z. B. die zweite Wicklung gegenüber der ersten um $\varphi_{21} = 70^\circ$ und die dritte Wicklung gegenüber der zweiten um $\varphi_{32} = 160^\circ$ versetzt angeordnet ist, gilt für die Augenblickswerte der Strangspannungen

$$u_1 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t), \quad u_2 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t - 70^\circ), \quad u_3 = \hat{u}_{\text{Str}} \sin(\omega t - 230^\circ),$$

wie in Bild 8.1d gezeigt, und nach Bild 8.1e für die Spannungszeiger

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j70^\circ}, \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_2 e^{-j160^\circ} = \underline{U}_1 e^{-j230^\circ}.$$

Die in den einzelnen Wicklungssträngen eines Mehrphasengenerators induzierten Spannungen können, wie in Bild 8.2a für $m = 6$ dargestellt, als Quellenspannungen separater einphasiger Netze innerhalb eines offenen Mehrphasensystems mit $2m$ Leitungen genutzt werden. Um die Anzahl der benötigten Leitungen zu verringern, ist es jedoch vorteilhafter, zu verketteten Mehrphasensystemen überzugehen.

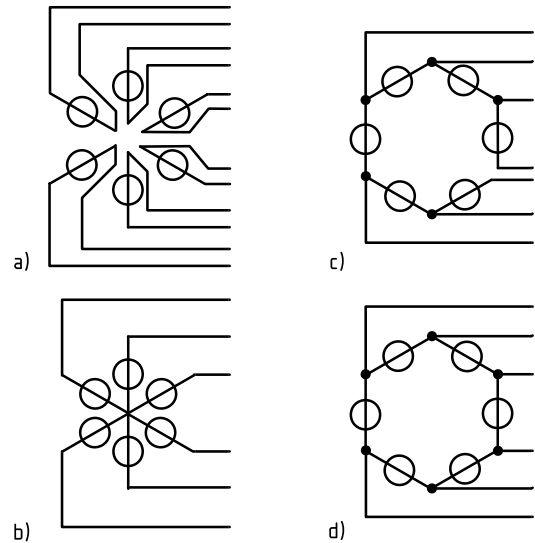


Bild 8.2: Offenes (a) und verkettetes Sechssystem in Sternschaltung (b) sowie in offener (c) und in geschlossener Ringschaltung (d)

8.1.1.2 Sternschaltung

Die Anzahl der benötigten Leitungen wird dadurch reduziert, dass nur noch die Eingangsklemmen der m Strangwicklungen einzeln an die Leitungen des Mehrphasennetzes angeschlossen werden, während die Ausgangsklemmen aller m Strangwicklungen nach Bild 8.2b auf einen gemeinsamen *Sternpunkt* geführt und ggf. auf eine einzige Leitung des Mehrphasennetzes geschaltet werden. Hierdurch verringert sich die Anzahl der Leitungen auf m bzw. $m + 1$.

8.1.1.3 Ringschaltung

Wenn man die m Strangwicklungen hintereinanderschaltet, indem man jeweils die Ausgangsklemme jeder Wicklung (mit Ausnahme der letzten) mit der Eingangsklemme der nächsten Wicklung verbindet, entsteht eine *offene Ring-* oder *Polygonschaltung* nach Bild 8.2c. Über die $m + 1$ Leitungen des Mehrphasennetzes sind die Ein- und Ausgangsklemmen aller m Strangwicklungen zugänglich.

Zwischen der Eingangsklemme der ersten und der Ausgangsklemme der letzten Wicklung liegt die Summenspannung

$$\sum_{\nu=1}^m \underline{U}_{\nu},$$

die bei unsymmetrischen Mehrphasensystemen im Allgemeinen einen von null verschiedenen Wert hat. Bei symmetrischen Mehrphasensystemen, wie z. B. dem *symmetrischen Dreiphasensystem* in Bild 8.1c, ist diese Summenspannung hingegen stets null, d. h. die Eingangsklemme der ersten und die Ausgangsklemme der letzten Wicklung liegen auf demselben Potenzial. Sie können, wie in Bild 8.2d gezeigt, miteinander verbunden und auf eine gemeinsame Leitung des Mehrphasennetzes geschaltet werden. Damit erhält man eine *geschlossene Ringschaltung* und ein Mehrphasennetz mit nur m Leitungen.

8.1.2 Zweiphasensysteme

8.1.2.1 Symmetrisches Zweiphasensystem

Bei einem symmetrischen Zweiphasensystem sind die beiden Sinusspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 nach Bild 8.3a um $360^\circ/2 = 180^\circ$ gegeneinander phasenverschoben. Daher gilt

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j180^\circ} = -\underline{U}_1.$$

Die Sternschaltung führt nach Bild 8.3b zu einem Dreileitersystem mit zwei gegenphasigen (bzw. bei Richtungsumkehr eines Zählpfeils gleichphasigen) Spannungen. Da es sich um ein symmetrisches System handelt, kann man nach Abschnitt 8.1.1.3 eine geschlossene Ringschaltung nach Bild 8.3c aufbauen. Dadurch entsteht ein Zweileitersystem mit der Spannung $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2$, das von einem einphasigen Wechselspannungssystem nicht zu unterscheiden ist. In dieser Form bietet das symmetrische Zweiphasensystem keine Vorteile und wird in der Praxis nicht verwendet.

Symmetrische Zweileitersysteme in Sternschaltung haben jedoch große praktische Bedeutung in der Nachrichtentechnik. Symmetrische Zweidrahtleitungen, wie sie z. B. als Telefonleitungen oder als Übertragungsmedien für lokale Computernetze (LAN) zum Einsatz kommen, werden

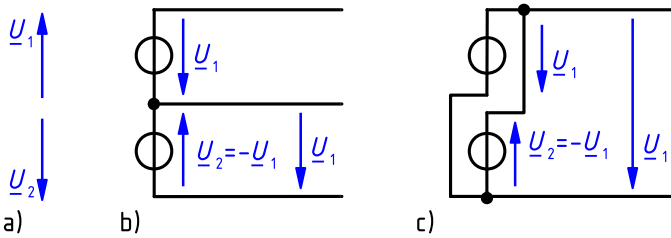


Bild 8.3: Symmetrisches Zweiphasensystem

Spannungszeigerdiagramm (a), Sternschaltung (b), geschlossene Ringschaltung (c)

auf diese Weise betrieben. Der Sternpunkt stellt in diesem Fall das Bezugspotenzial (Masse) für die s zu übertragenden Signale dar und die beiden Leitungsadern werden *gegenphasig* angesteuert. Die sich dadurch ergebende Signalsymmetrie lässt sich nutzen, um eingekoppelte Gleichtaktstörungen, wie sie z. B. durch unterschiedliche Bezugspotenziale an den beiden Leitungsenden entstehen können, zu unterdrücken [Fra13].

8.1.2.2 Unsymmetrisches Zweiphasensystem

Im Folgenden wird ein Zweiphasensystem in Sternschaltung nach Bild 8.4a betrachtet, bei dem die Spannung \underline{U}_2 (wie auch durch die räumliche Anordnung der Schaltzeichen angedeutet) um $\varphi_{21} = 90^\circ$ gegenüber der Spannung \underline{U}_1 nacheilt. Am Dreileitersystem ist neben den Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 zusätzlich die Spannung $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ verfügbar.

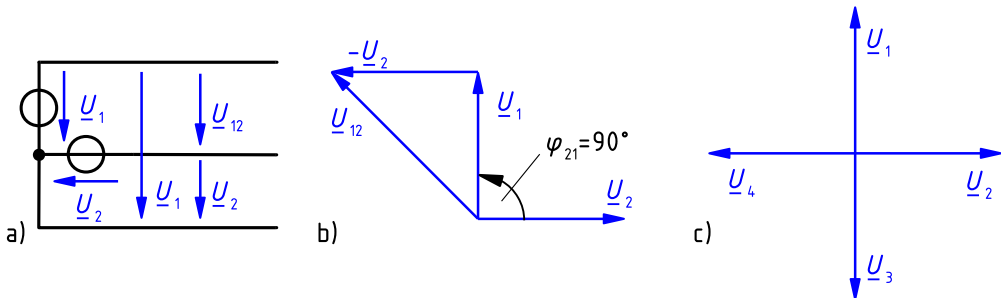


Bild 8.4: Unsymmetrisches Zweiphasensystem mit $\varphi_{21} = 90^\circ$ in Sternschaltung (a) mit Spannungszeigerdiagramm (b), zum Vergleich das Spannungszeigerdiagramm eines symmetrischen Vierphasensystems (c)

Wie der Vergleich der Bilder 8.4b und c zeigt, kann man dieses System als ein unvollständiges symmetrisches Vierphasensystem auffassen. Das Zweiphasensystem nach Bild 8.4a und b besitzt deshalb Eigenschaften, die sonst nur bei symmetrischen Mehrphasensystemen (mit $m > 2$) auftreten. Trotzdem wird es in der Praxis nicht verwendet, da das symmetrische Dreiphasensystem (Abschnitt 8.2) weitergehende Vorteile bietet; es wird aber für theoretische Untersuchungen genutzt.

Konstante Augenblicksleistung

An die Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 aus Bild 8.4 werden zwei gleiche Zweipole mit der Impedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ angeschlossen. (Man bezeichnet diese Zweipole dann als die beiden Stränge eines symmetrischen zweiphasigen Verbrauchers.) Die in beiden Zweipolen zusammen umgesetzte Augenblicksleistung bei Verbraucher-Zählfeilsystem an den Zweipolen ist

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2. \quad (8.1)$$

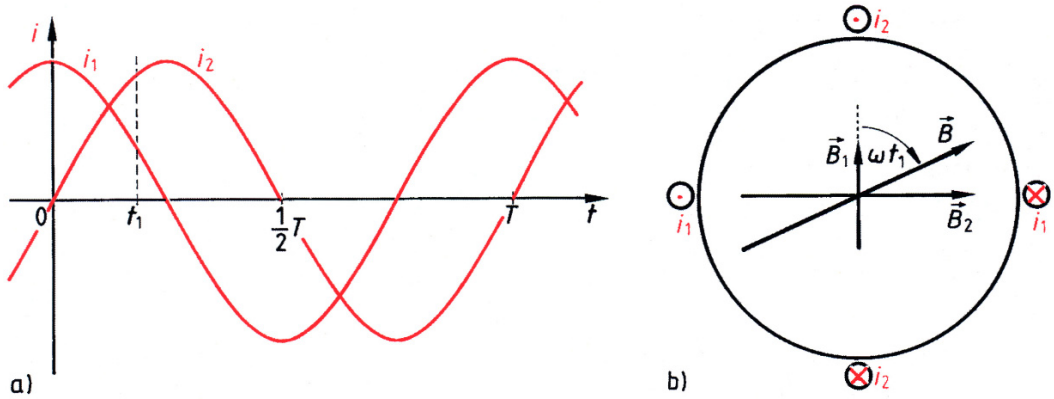


Bild 8.5: Symmetrischer Verbraucher am Zweiphasennetz nach Bild 8.4b

Strangströme i_1 und i_2 (a), räumliche Anordnung der beiden Spulen zur Drehfeld-erzeugung (b) mit Stromzählfeilen und Vektor der magnetischen Flussdichte \vec{B} für $\omega t_1 = 65^\circ$

Bei Wahl des zeitlichen Nullpunktes wie in Bild 8.5a gilt für die Augenblickswerte der beiden Ströme

$$i_1 = \frac{\hat{u}}{Z} \cos(\omega t), \quad i_2 = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\omega t) \quad (8.2)$$

und damit für die Augenblickswerte der beiden Spannungen

$$u_1 = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi), \quad u_2 = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.3)$$

Hieraus folgt nach Gl. (8.1) für die Augenblicksleistung

$$p = \frac{\hat{u}^2}{Z} [\cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t)]$$

und mit der Beziehung $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$

$$p = \frac{\hat{u}^2}{Z} \cos \varphi = 2 \frac{U^2}{Z} \cos \varphi, \quad (8.4)$$

also ein zeitlich konstanter Wert.

8.1.2.3 Drehfelderzeugung

In Abschnitt 8.1.2.2 wurde für das unsymmetrische Zweiphasensystem mit $\varphi_{21} = 90^\circ$ nachgewiesen, dass in einem angeschlossenen symmetrischen Verbraucher die in den Strängen insgesamt umgesetzte Augenblicksleistung zeitinvariant ist. Dies ist eine Eigenschaft, die auch alle symmetrischen Mehrphasensysteme mit $m > 2$ besitzen. Sie ermöglicht es z. B., mit einem Motor eine zeitlich konstante mechanische Leistung und damit auch (bei konstanter Drehzahl) ein zeitlich konstantes Drehmoment zu erzeugen.

Nun wird ein symmetrischer Verbraucher betrachtet, der wie die zur Spannungserzeugung verwendete Wicklungsanordnung in Bild 8.4a aus zwei gleichen, um 90° gegeneinander versetzten Wicklungen mit der Impedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ besteht. Die beiden Ströme i_1 und i_2 nach Gl. (8.2) sind in Bild 8.5a dargestellt; die zugehörigen Zählpfeile sind Bild 8.5b zu entnehmen.

Die von den beiden Wicklungen erzeugten magnetischen Felder überlagern sich im von ihnen durchsetzten Raum. Wenn die Zusammenhänge linear sind, kann die magnetische Flussdichte \vec{B} nach dem Überlagerungssatz (Abschnitt 2.4.4) einfach durch vektorielle Addition der Teilgrößen \vec{B}_1 und \vec{B}_2 ermittelt werden. Wie in Bild 8.5b gezeigt, ergänzen sich im Zentrum der Anordnung die auf den Strom $i_1 = \hat{i} \cos(\omega t)$ zurückzuführende Vertikalkomponente $B_1 = B \cos(\omega t)$ und die auf den Strom $i_2 = \hat{i} \sin(\omega t)$ zurückzuführende Horizontalkomponente $B_2 = B \sin(\omega t)$ zu einem Vektor \vec{B} , dessen Betrag

$$\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = B \quad (8.5)$$

zeitinvariant ist, dessen Richtung sich aber mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

Diesen Effekt nutzt man bei *Induktionsmotoren*, die am einphasigen Wechselstromnetz betrieben werden, indem man eine der beiden Wicklungen (z. B. i_2 in Bild 8.5) direkt, die zweite (sog. Hilfswicklung) aber mit einem Kondensator in Reihe geschaltet an die Netzspannung legt, damit der Strom i_1 wie in Bild 8.5a gegenüber dem Strom i_2 der anderen Wicklung um möglichst 90° voreilt. Derartige *Einphasen-Asynchronmotoren mit Hilfswicklung* sind als Antriebe mit geringer Leistung z. B. für Waschmaschinen, Pumpen und Kühlschränke weit verbreitet [LBL08].

Magnetische Drehfelder können auch mit allen symmetrischen Mehrphasensystemen mit $m > 2$ erzeugt werden, wenn man die Spannungen \underline{U}_1 bis \underline{U}_m in zyklischer Folge an m gleiche, jeweils um den Winkel $360^\circ/m$ gegeneinander versetzte Spulen anschließt. Wegen dieses Effektes nennt man solche Systeme *Drehstromsysteme* und die Motoren, die diesen Effekt ausnutzen, *Drehstrommotoren*.

8.2 Symmetrisches Dreiphasensystem

Von allen symmetrischen Mehrphasensystemen, mit denen man Drehfelder erzeugen kann, ist das symmetrische Dreiphasensystem mit $m = 3$ das einfachste. Es findet verbreitete Anwendung, da es eine besonders effiziente Übertragung und Nutzung elektrischer Energie ermöglicht. In Niederspannungsnetzen ist dabei das *Vierleitersystem* nach Bild 8.6a vorherrschend, das drei Sinusspannungssysteme mit dem gemeinsamen *Neutralleiter* N in sich vereinigt.

Im Folgenden werden die gebräuchlichen Benennungen vorgestellt sowie Spannungen, Ströme und Leistungen bei symmetrischer Last erläutert.

8.2.1 Spannungen und Ströme

8.2.1.1 Benennungen

Bei Dreiphasengeneratoren und -verbrauchern werden die jeweils zwischen zwei Anschlusspunkten liegenden Zweige (z. B. Wicklungen) als *Stränge* bezeichnet.

Unter der *Strangspannung* U_{Str} versteht man die Spannung an einem Strang.

Der *Strangstrom* I_{Str} ist der Strom, der durch einen Strang fließt.

Ein dreiphasiger Verbraucher (Drehstromverbraucher) mit drei gleichen Strängen wird als *symmetrischer Verbraucher* oder auch als *symmetrische Last* bezeichnet.

Bei den Leitern des Vierleitersystems nach Bild 8.6a unterscheidet man zwischen dem *Neutralleiter* N (früher auch Sternpunkt- oder Mittelpunktleiter genannt), der mit dem Sternpunkt des Generators verbunden ist, und den drei *Außenleitern* L1, L2 und L3.

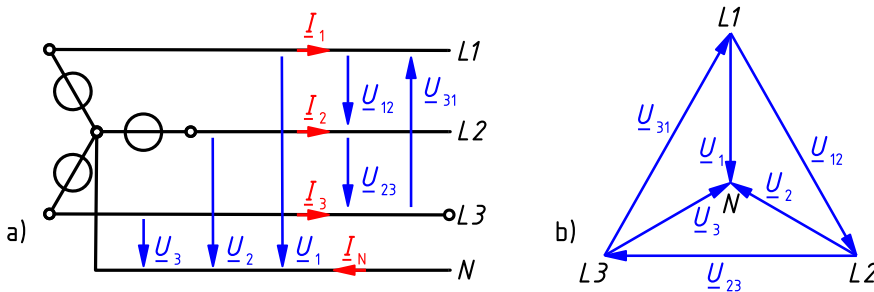


Bild 8.6: Symmetrisches Vierleitersystem mit Spannungs- und Stromzählpfeilen (a) und zugehöriges Spannungszeigerdiagramm (b)

Entsprechend werden die Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 in den Außenleitern als *Außenleiterströme* und der Strom \underline{I}_N als *Neutralleiterstrom* (auch Sternpunktleiter- oder Mittelpunktleiterstrom) bezeichnet.

8.2.1.2 Spannungen

Die Spannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 und \underline{U}_3 zwischen je einem Außenleiter und dem Neutralleiter heißen *Sternspannungen*. Ihre Beträge

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_\lambda \quad (8.6)$$

sind untereinander gleich und für ihre Phasenfolge gilt in Übereinstimmung mit den Bildern 8.1c und 8.6

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j120^\circ}, \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_2 e^{-j120^\circ} = \underline{U}_1 e^{-j240^\circ}. \quad (8.7)$$

Die Phasenlage der Sternspannungen zueinander gemäß Gl. (8.7) ist festgelegt und darf nicht vertauscht werden.

Die Spannungen \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} und \underline{U}_{31} zwischen jeweils zwei Außenleitern werden als *Außenleiterspannungen* oder *Dreiecksspannungen* bezeichnet. Nach dem Maschensatz gilt bei den in Bild 8.6a eingetragenen Zählpfeilrichtungen

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1. \quad (8.8)$$

Zur Bildung der Außenleiterspannung \underline{U}_{12} sind also die Spannungszeiger \underline{U}_1 und $-\underline{U}_2$ zu addieren, was auf den in Bild 8.6b eingetragenen Zeiger \underline{U}_{12} führt. Bei den beiden anderen Außenleiterspannungen ist entsprechend zu verfahren. Die Beträge der Außenleiterspannungen

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_{\Delta} = U \quad (8.9)$$

sind untereinander gleich. Der Effektivwert U_{Δ} der Außenleiterspannung wird zur Benennung des jeweiligen Dreiphasensystems verwendet und meist ohne weiteren Zusatz einfach als die Spannung U des Dreiphasensystems bezeichnet. Ein 400 V-Drehstromsystem ist demnach z. B. ein symmetrisches Dreiphasensystem mit der Außenleiterspannung $U_{\Delta} = U = 400$ V. Für die Phasenfolge der Außenleiterspannungen folgt aus Bild 8.6

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} e^{-j120^\circ}, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{23} e^{-j120^\circ} = \underline{U}_{12} e^{-j240^\circ}. \quad (8.10)$$

Das Spannungszeigerdiagramm Bild 8.6b lässt sich einfach zeichnen: Man bezeichnet die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks *im Uhrzeigersinn* mit den Außenleiterkennungen L1, L2 und L3 sowie den Schwerpunkt mit dem Buchstaben N für den Neutralleiter. Dann erhält man die komplexe Spannung zwischen zweien dieser Punkte, indem man diese durch einen geradlinigen Pfeil (Spannungszeiger) miteinander verbindet. Die Orientierung des Zeigers ist dabei dieselbe wie bei einem Zählpfeil: Da z. B. \underline{U}_2 die Spannung des Außenleiters L2 gegen den Neutralleiter N ist, weist dieser Zeiger von L2 nach N. Entsprechend muss z. B. der Zeiger \underline{U}_{23} von L2 nach L3 gerichtet sein.

Anhand von Bild 8.6b sind die Effektivwerte und Phasenlagen der sechs Spannungen einfach bestimmbar.

Für die Anwendung ist es aber oft übersichtlicher, die benötigten Spannungszeiger so parallel zu verschieben, dass sie von einem gemeinsamen Punkt im Diagramm ausgehen wie z. B. in den Bildern 8.8b und 8.9b.

Bild 8.7: Zusammenhang zwischen Außenleiterspannung U und Sternspannung U_{λ}

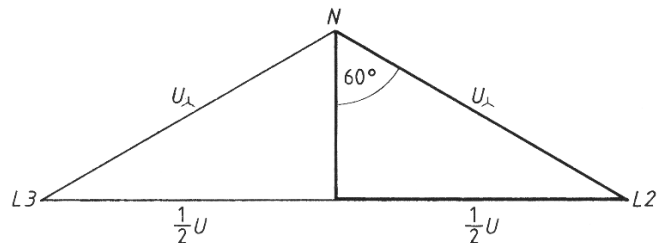


Bild 8.6b zeigt, dass die Außenleiterspannungen U größer sind als die Sternspannungen U_{λ} . Aus diesem Diagramm, dessen Geometrie für zwei Sternspannungen U_{λ} in Bild 8.7 noch einmal herausgehoben ist, folgt mit der Definition der Sinusfunktion

$$\frac{U}{U_{\lambda}} = 2 \frac{\frac{1}{2}U}{U_{\lambda}} = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}. \quad (8.11)$$

8.2.1.3 Symmetrische Sternschaltung

Bild 8.8a zeigt einen symmetrischen Drehstromverbraucher, dessen drei gleiche Stränge mit den Impedanzen \underline{Z} zu einem Stern zusammengeschaltet sind. Die Anschlussklemmen U, V und W sind (in dieser Reihenfolge) an die drei Außenleiter L1, L2 und L3 angeschlossen, der Sternpunkt S des Verbrauchers ist mit dem Neutraleiter N verbunden.

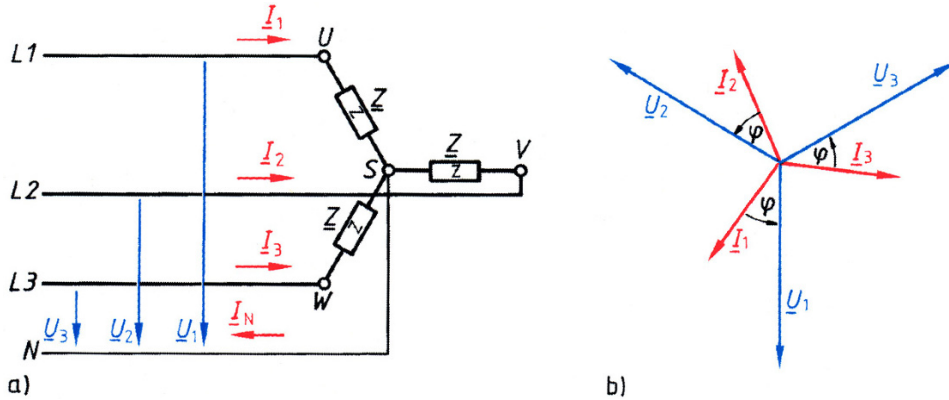


Bild 8.8: Drehstromverbraucher in symmetrischer Sternschaltung (a) und Zeigerdiagramm (b) für die Strangspannungen und Strangströme

Als *Strangspannungen des Verbrauchers* treten die Sternspannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 und \underline{U}_3 auf, deren Zeiger in Bild 8.8b nach Länge und Richtung aus Bild 8.6b übernommen wurden. Bei der Sternschaltung gilt demnach mit Gl. (8.11) für die Effektivwerte der Strangspannungen

$$U_{\text{Str}} = U_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} U. \quad (8.12)$$

Die *Strangströme* sind bei der Sternschaltung mit den Außenleiterströmen \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 identisch. Bei einem symmetrischen Verbraucher sind sie alle um den gleichen Winkel φ gegenüber der jeweiligen Strangspannung phasenverschoben (Bild 8.8b) und haben den gleichen Effektivwert

$$I_1 = I_2 = I_3 = I. \quad (8.13)$$

Dieser wird ohne weiteren Zusatz als der vom Verbraucher aufgenommene Strom I bezeichnet. Bei der symmetrischen Sternschaltung gilt somit für den *Strangstrom*

$$I_{\text{Str}} = I_{\lambda} = I. \quad (8.14)$$

Nach dem Knotensatz gilt bei den in Bild 8.8a eingetragenen Zählpfeilrichtungen für den *Neutraleiterstrom*

$$\underline{I}_{\text{N}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \quad (8.15)$$

Für die symmetrische Sternschaltung folgt hieraus mit Gl. (5.120) und Gl. (8.7)

$$\underline{I}_{\text{N}} = \frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} (1 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}) = 0, \quad (8.16)$$

wie auch unmittelbar aus Bild 8.8b ersichtlich ist. Der Neutralleiter ist also bei symmetrischer Last stromlos und braucht daher nicht an den Sternpunkt S angeschlossen zu werden; auch ohne leitende Verbindung zwischen S und N liegen diese beiden Punkte auf gleichem Potenzial.

Beispiel 8.3: Symmetrischer Drehstromverbraucher am symmetrischen Netz

Ein im Stern geschalteter symmetrischer Drehstromverbraucher mit den Strangimpedanzen $\underline{Z} = (80 + j125)\Omega$ liegt an einem Drehstromnetz mit der Spannung $U = 6\text{ kV}$.

Der aufgenommene Strom I ist zu bestimmen.

Aus der Strangspannung

$$U_{\text{Str}} = U_{\lambda} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{6\text{ kV}}{\sqrt{3}} = 3,46\text{ kV}$$

und dem Strangscheinwiderstand $Z = \sqrt{80^2 + 125^2}\Omega = 148\Omega$ folgt der Strangstrom

$$I = I_{\text{Str}} = \frac{U_{\text{Str}}}{Z} = \frac{3,46\text{ kV}}{148\Omega} = 23,3\text{ A},$$

der bei der Sternschaltung mit dem aufgenommenen Strom, also dem Außenleiterstrom I , identisch ist.

8.2.1.4 Symmetrische Dreieckschaltung

Bild 8.9a zeigt einen symmetrischen Drehstromverbraucher, dessen drei gleiche Stränge mit der Impedanz \underline{Z} zu einem geschlossenen Ring, also zu einem Dreieck, zusammenschaltet sind. Die Anschlussklemmen U, V und W sind (in dieser Reihenfolge) an die drei Außenleiter L1, L2 und L3 angeschlossen.

Als *Strangspannungen* treten die Außenleiterspannungen \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} und \underline{U}_{31} auf, deren Zeiger in Bild 8.9b nach Länge und Richtung aus Bild 8.6b übernommen werden. Bei der Dreieckschaltung gilt also für die Effektivwerte der Strangspannungen

$$U_{\text{Str}} = U_{\Delta} = U. \tag{8.17}$$

Aus den Strangspannungen und der Strangimpedanz \underline{Z} ergeben sich die *Strangströme*

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}}, \tag{8.18}$$

die nach Bild 8.9b alle um den gleichen Winkel gegenüber der jeweiligen Strangspannung phasenverschoben sind und daher gegeneinander wieder eine Phasenverschiebung von 120° aufweisen. Sie haben den gleichen Effektivwert

$$I_{\text{Str}} = I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{U}{Z} = I_{\Delta}, \tag{8.19}$$

der auch als *Dreieckstrom* bezeichnet wird. Nach dem Knotensatz folgen aus Bild 8.9a die Außenleiterströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}, \tag{8.20}$$

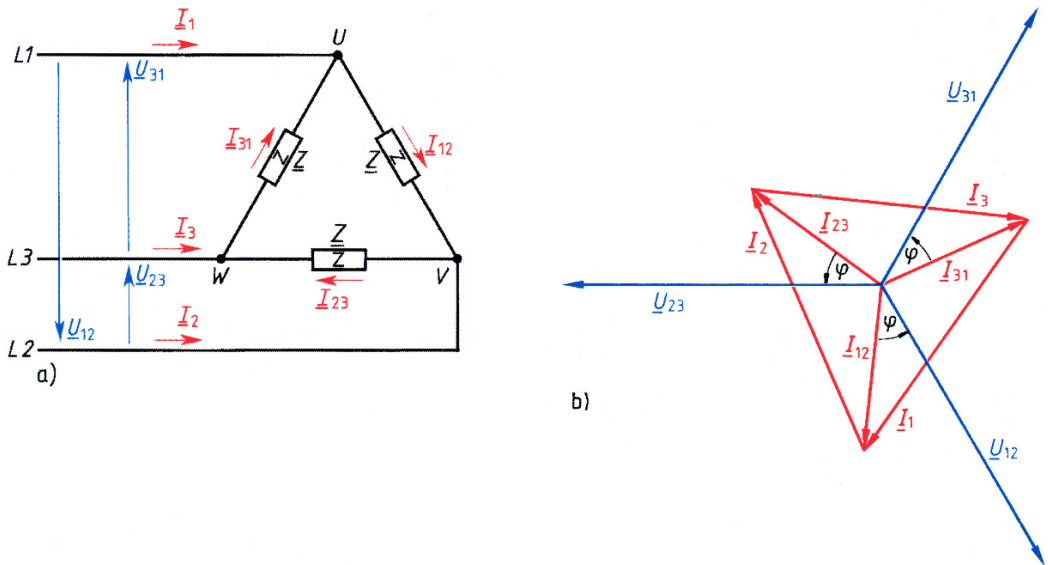


Bild 8.9: Drehstromverbraucher in symmetrischer Dreieckschaltung (a) und Zeigerdiagramm (b) für die Strangspannungen und Strangströme

deren Zeiger in Bild 8.9b ebenfalls dargestellt sind. Man erhält ein Zeigerdiagramm, das dem in Bild 8.6b geometrisch ähnlich ist. Analog zu Bild 8.7 und Gl. (8.11) erhält man daher für das Verhältnis von Außenleiterstrom I zu Dreieckstrom I_{Δ}

$$\frac{I}{I_{\Delta}} = 2 \frac{I}{I_{\Delta}} = 2 \sin 60^{\circ} = \sqrt{3}. \quad (8.21)$$

Beispiel 8.4: Leistungsgleiche Verbraucher in Stern- und Dreieckschaltung

Ein symmetrischer Ohmscher Drehstromverbraucher (z. B. ein Dreiphasenofen) soll einem Netz mit der Spannung $U = 400 \text{ V}$ den Strom $I = 20 \text{ A}$ entnehmen.

a) Wie groß müssen die drei Widerstände R der Sternschaltung sein?

Nach Gl. (8.12) wirkt die Sternspannung $U = U/\sqrt{3} = 400 \text{ V}/\sqrt{3} = 230,9 \text{ V}$ als Strangspannung. Nach Gl. (8.14) ist der Strangstrom $I_{\text{Str}} = I = 20 \text{ A}$. Der benötigte Wert der drei Widerstände ist also

$$R_{\lambda} = \frac{U_{\lambda}}{I} = \frac{230,9 \text{ V}}{20 \text{ A}} = 11,6 \Omega.$$

b) Welche Widerstände R_{Δ} muss demgegenüber die Dreieckschaltung aufweisen?

Aus Gl. (8.17) erhält man die Strangspannung $U_{\text{Str}} = U = 400 \text{ V}$ und aus Gl. (8.21) den Strangstrom $I_{\text{Str}} = I_{\Delta} = I/\sqrt{3} = 20 \text{ A}/\sqrt{3} = 11,55 \text{ A}$. Daher werden drei

Widerstände mit dem folgenden Wert benötigt:

$$R_{\Delta} = \frac{U}{I_{\Delta}} = \frac{400 \text{ V}}{11,55 \text{ A}} = 34,6 \Omega = \frac{U_{\lambda} \sqrt{3}}{I/\sqrt{3}} = 3 \frac{U_{\lambda}}{I} = 3 R_{\lambda}$$

In einer symmetrischen Dreieckschaltung müssen also bei gleichem aufzunehmenden Strom I die Strangwiderstände dreimal so groß sein wie in der Sternschaltung, siehe Gl. (2.148).

8.2.2 Leistung bei symmetrischer Last

8.2.2.1 Augenblicksleistung

In Abschnitt 8.1.2.2 wurde gezeigt, dass bei einem symmetrischen Verbraucher, der an einem Zweiphasensystem mit $\varphi_{21} = 90^\circ$ betrieben wird, die in beiden Strängen zusammen auftretende Augenblicksleistung p zeitinvariant ist. Gleiches trifft auch für den symmetrischen Verbraucher am symmetrischen Dreiphasennetz zu, unabhängig davon, ob er im Stern oder im Dreieck geschaltet ist: Legt man wie in Gl. (8.2) und (8.3) Strangstrom und Strangspannung für den ersten Strang willkürlich mit

$$i_{\text{Str}1} = \frac{\hat{u}_{\text{Str}}}{Z} \cos(\omega t), \quad u_{\text{Str}1} = \hat{u}_{\text{Str}} \cos(\omega t + \varphi)$$

zugrunde, erhält man für die Augenblicksleistung in diesem Strang nach Gl. (5.143) und mit $\cos x \cos y = 0,5 [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

$$p_{\text{Str}1} = u_{\text{Str}1} i_{\text{Str}1} = \frac{\hat{u}_{\text{Str}}^2}{Z} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) = \frac{\hat{u}_{\text{Str}}^2}{2Z} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]. \quad (8.22)$$

Entsprechende Resultate erhält man auch für die beiden anderen Stränge; allerdings ist der zeitabhängige Term in der eckigen Klammer hier um $+120^\circ$ bzw. -120° gegenüber dem Term $\cos(2\omega t + \varphi)$ in Gl. (8.22) phasenverschoben. Bei der Addition der Strang-Augenblicksleistungen ergänzen sich die zeitabhängigen Terme daher ständig zu null. Damit ergibt sich für die Gesamt-Augenblicksleistung der zeitlich konstante Wert

$$p = p_{\text{Str}1} + p_{\text{Str}2} + p_{\text{Str}3} = 3 \frac{\hat{u}_{\text{Str}}^2}{2Z} \cos \varphi = 3 \frac{U_{\text{Str}}^2}{Z} \cos \varphi. \quad (8.23)$$

8.2.2.2 Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Wenn ein symmetrischer Drehstromverbraucher mit der Strangimpedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ an einem Drehstromsystem betrieben wird, tritt an jedem seiner drei Stränge nach Gl. (5.153) die *komplexe Strangleistung*

$$\underline{S}_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} e^{j\varphi} \quad (8.24)$$

auf. Hieraus folgt mit Gl. (5.154) die *Strang-Scheinleistung*

$$S_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}}, \quad (8.25)$$

mit Gl. (5.155) die *Strang-Wirkleistung*

$$P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} \cos(\varphi) \quad (8.26)$$

und mit Gl. (5.156) die *Strang-Blindleistung*

$$Q_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} \sin(\varphi). \quad (8.27)$$

Für den gesamten symmetrischen Drehstromverbraucher erhält man, da er aus drei gleichen Strängen besteht, das Dreifache der in den Gln. (8.24) bis (8.27) angegebenen Werte. Für die Scheinleistung S gilt z. B.

$$S = 3 S_{\text{Str}} = 3 U_{\text{Str}} I_{\text{Str}}. \quad (8.28)$$

Für die Strangspannung U_{Str} und den Strangstrom I_{Str} sind bei der Sternschaltung die Sternspannung U_{λ} und der Sternstrom I_{λ} , bei der Dreieckschaltung die Dreieckspannung U_{Δ} und der Dreieckstrom I_{Δ} einzusetzen.

Wie Tabelle 8.1 zeigt, führt die Rechnung in beiden Fällen, unabhängig von der Schaltungsart, zu dem Ergebnis

$$S = \sqrt{3} U I. \quad (8.29)$$

Entsprechend folgt aus Gl. (8.26) die Wirkleistung

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad (8.30)$$

und aus Gl. (8.27) die Blindleistung

$$Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi. \quad (8.31)$$

Tabelle 8.1: Leistungsberechnung für symmetrische Stern- bzw. Dreieckschaltung

Schaltung	Strangspannung U_{Str}	Strangstrom I_{Str}	Scheinleistung $S = 3 U_{\text{Str}} I_{\text{Str}}$
λ	$U_{\lambda} = U/\sqrt{3}$	$I_{\lambda} = I$	$S = 3 U_{\lambda} I_{\lambda} = \sqrt{3} U I$
Δ	$U_{\Delta} = U$	$I_{\Delta} = I/\sqrt{3}$	$S = 3 U_{\Delta} I_{\Delta} = \sqrt{3} U I$

In Tabelle 8.1 bezeichnet nach Abschnitt 8.2.1.2 das Formelzeichen U die (Außenleiter-)Spannung des Drehstromsystems und nach Abschnitt 8.2.1.3 das Formelzeichen I den (Außenleiter-)Strom.

Der Phasenverschiebungswinkel φ tritt jedoch nicht zwischen diesen beiden Außenleitergrößen auf, sondern ist das Argument der Strangimpedanz $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$. Er gibt die Phasenverschiebung an, die an jedem Strang zwischen Strangstrom und Strangspannung bzw. zwischen jedem Außenleiterstrom \underline{I}_{ν} und der zugehörigen Sternspannung \underline{U}_{ν} besteht. Diese Aussage gilt auch bei Dreieckschaltung der Last.

Beispiel 8.5: Ohmscher Verbraucher am Einphasen- bzw. Dreiphasennetz

Es soll untersucht werden, ob ein Durchlauferhitzer für die Leistung $P_1 = 21 \text{ kW}$ mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi = 1$ bezüglich des Materialaufwandes für die Anschlussleitungen günstiger für Einphasenanschluss an 230 V oder für Dreiphasenanschluss an 400 V ausgelegt wird.

Bei Einphasenanschluss an die Spannung $U_\lambda = U/\sqrt{3} = 400\text{ V}/\sqrt{3} = 230,9\text{ V}$ fließt sowohl in der Hin- als auch in der Rückleitung der Strom

$$I_1 = \frac{P_1}{U_\lambda} = \frac{21\text{ kW}}{230,9\text{ V}} = 90,93\text{ A}.$$

Demgegenüber fließt nach Gl. (8.30) bei Dreiphasenanschluss an $U = 400\text{ V}$ in den drei Außenleitern der um den Faktor $1/3$ kleinere Strom

$$I = \frac{P_1}{\sqrt{3} U} = \frac{21\text{ kW}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{ V}} = 30,31\text{ A} = \frac{1}{3} I_1.$$

Wenn in beiden Fällen die gleiche Verlustleistung P_V auf den Zuleitungen zugelassen wird, erhält man bei gleicher Länge l des Anschlusskabels für Einphasenanschluss mit Gl. (2.11) und Gl. (2.59) den Leiterquerschnitt

$$A_1 = \frac{2l}{\kappa R_1} = \frac{2l I_1^2}{\kappa P_V}$$

und entsprechend für Dreiphasenanschluss

$$A_3 = \frac{3l}{\kappa R_3} = \frac{3l I^2}{\kappa P_V} = \frac{l I_1^2}{3 \kappa P_V} = \frac{1}{6} A_1.$$

Beim Einphasenanschluss beträgt daher das Leitervolumen $V_1 = A_1 \cdot 2l$ das Vierfache des Leitervolumens $V_3 = A_3 \cdot 3l$, das für den Dreiphasenanschluss benötigt wird. Dreiphasenstrom verlangt allerdings drei Einzelwiderstände im Durchlauferhitzer und dreipolige Schalter. Sobald der Strom in einer Verbraucherzuleitung etwa 30 A übersteigt, ist dieser Aufwand wirtschaftlich gerechtfertigt, sodass man für ähnliche Fälle Dreiphasenstrom bevorzugt.

8.2.2.3 Blindleistungskompensation

Wie in Abschnitt 5.11.2 für den einphasigen ohmsch-induktiven Verbraucher gezeigt, kann man auch beim dreiphasigen Verbraucher den aufgenommenen Strom dadurch auf seinen Wirkanteil reduzieren, dass man die induktive Blindleistung durch Kondensatoren geeigneter Kapazität C kompensiert.

Die Blindleistung eines im Stern geschalteten Verbrauchers kann z. B. nach Bild 8.10a durch drei ebenfalls im Stern geschaltete Kondensatoren kompensiert werden, deren Kapazität nach Gl. (5.311) unter Berücksichtigung von Gl. (8.11) jeweils

$$C_\lambda = \frac{Q_{\text{Str}}}{\omega U_\lambda^2} = \frac{\frac{1}{3} Q}{\omega \left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{Q}{\omega U^2} \quad (8.32)$$

beträgt. Hierbei kann jedem Strang des Verbrauchers eindeutig ein Kondensator zugeordnet werden, der die jeweilige Strang-Blindleistung kompensiert. Nach Abschnitt 8.2.1.3 bleibt der (gestrichelt dargestellte) Neutralleiteranschluss sowohl am symmetrischen Verbraucher als auch an der symmetrischen Kondensator-Sternschaltung stromlos und kann daher auch entfallen.

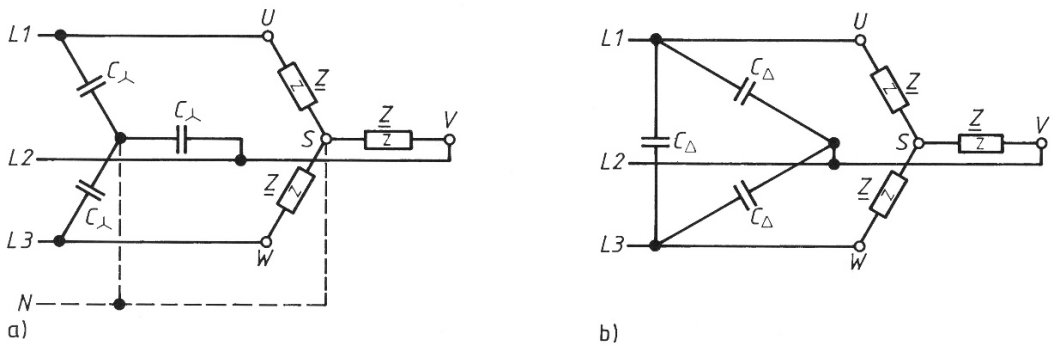


Bild 8.10: Blindleistungskompensation eines ohmsch-induktiven symmetrischen Drehstromverbrauchers durch drei Kondensatoren C_λ in Sternschaltung (a) bzw. durch drei Kondensatoren C_Δ in Dreieckschaltung (b)

Statt der Kondensator-Sternschaltung kann man aber auch die hierzu äquivalente Dreieckschaltung nach Bild 8.10b einsetzen. Für die Admittanzen folgt aus Gl. (2.148) unter Berücksichtigung von Tabelle 5.3

$$\underline{Y}_\lambda = 3\underline{Y}_\Delta, \quad \text{also} \quad j\omega C_\lambda = 3j\omega C_\Delta.$$

Hieraus folgt mit Gl. (8.32) die Kapazität

$$C_\Delta = \frac{1}{3} C_\lambda = \frac{Q}{3\omega U^2}. \quad (8.33)$$

Die Kapazität der Kondensatoren in Dreieckschaltung beträgt nur ein Drittel der Kapazität, die bei Sternschaltung der Kondensatoren erforderlich ist. Daher wird für die Blindleistungskompensation meist die Dreieckschaltung angewandt. Allerdings müssen die im Dreieck geschalteten Kondensatoren für eine $\sqrt{3}$ -fach höhere Spannung ausgelegt sein als bei der Sternschaltung.

8.3 Unsymmetrische Dreiphasenbelastung

Elektrische Energie wird überwiegend in großen Dreiphasen-Synchrongeneratoren erzeugt, die mit sehr hohem Wirkungsgrad mechanische in elektrische Energie umwandeln und zusätzlich Blindleistung aufnehmen oder abgeben können (Phasenschieberbetrieb). Sie werden für Leistungen bis zu 2000 MVA bei Spannungen bis zu 30 kV gebaut. Die elektrische Energie wird in Maschinentransformatoren anschließend hochgespannt und bei z.B. 110 kV, 220 kV oder 380 kV über Dreileiternetze (das sind Netze, die keinen Neutralleiter mitführen) zu den Verteilungstransformatoren geleitet. Diese sind niederspannungsseitig im Allgemeinen auf ein Vierleiternetz geschaltet, an das sowohl Einphasen- als auch Dreiphasenverbraucher angeschlossen werden können, sodass im Allgemeinen eine unsymmetrische Stromverteilung in den Außenleitern entsteht.

8.3.1 Vierleiternetz

8.3.1.1 Allgemeine Belastung

Bild 8.11a zeigt ein Niederspannungs-Vierleiternetz mit einphasigen Verbrauchern, die jeweils zwischen einem der Außenleiter L1, L2, L3 und dem Neutraleiter N angeschlossen sind, sowie einem nur mit den Außenleitern verbundenen Dreiphasenmotor M. Dieses Vierleitersystem liefert nach Bild 8.11b sechs Spannungen, nämlich die drei Außenleiterspannungen \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} und die drei Sternspannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 . Üblicherweise ist die Außenleiterspannung in diesem Netz $U = 400\text{ V}$; entsprechend beträgt die Sternspannung $U_\lambda = U/\sqrt{3} = 400\text{ V}/\sqrt{3} = 230,9\text{ V} \approx 230\text{ V}$. Einphasenverbraucher werden überwiegend an 230 V betrieben, bei größeren Leistungen aber auch an 400 V. Dreiphasenverbraucher liegen an 400 V mit einer Strangspannung von 230 V bei Stern- oder 400 V bei Dreieckschaltung.

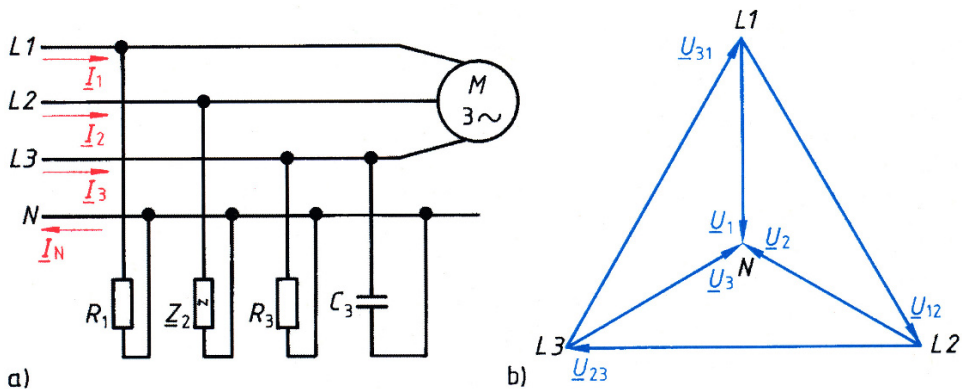


Bild 8.11: Vierleiternetz mit beliebigen Einphasenlasten und Dreiphasenmotor M (a) sowie zugehöriges Spannungszeigerdiagramm (b)

Mit dem in Bild 8.11a dargestellten Vierleitersystem wird den Verbrauchern das in Bild 8.11b angegebene *Spannungssystem* auch bei beliebiger Belastung zur Verfügung gestellt, wenn durch große Leiterquerschnitte und entsprechende Verteilungstransformatoren dafür gesorgt wird, dass die Spannungsabfälle auf den Zuleitungen vernachlässigbar klein bleiben („starrs Netz“).

Ströme und Leistungen der einzelnen Verbraucher können nach Kapitel 5 berechnet werden. Der Neutraleiterstrom \underline{I}_N ergibt sich aus der Addition der Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 . Hierbei ist neben dem Phasenverschiebungswinkel φ_ν , der zwischen der jeweiligen Sternspannung \underline{U}_ν und dem zugehörigen Außenleiterstrom \underline{I}_ν besteht, unbedingt auch die Phasenverschiebung von jeweils 120° zwischen den einzelnen Sternspannungen zu berücksichtigen.

Die insgesamt übertragene Wirkleistung P folgt hingegen mit Gl. (5.308) einfach aus der Summe der Wirkleistungen P_ν der einzelnen Verbraucher. Entsprechendes gilt nach Gl. (5.309) für die insgesamt aufgenommene Blindleistung Q und somit nach Gl. (5.310) auch für die komplexe Gesamtleistung \underline{S} .

Bei unsymmetrischer Belastung ist die gesamte Scheinleistung S nicht mehr die Summe der einzelnen Scheinleistungen, sondern muss nach Gl. (5.154) aus der komplexen Gesamtleistung berechnet werden.

Beispiel 8.6: Ströme und Leistungen bei unsymmetrischer Last am Vierleiternetz

Ein Dreiphasen-Vierleiternetz 230 V/400 V, 50 Hz speist wie in Bild 8.11 (jedoch ohne Motor) drei Einphasenverbraucher mit folgender Leistungsaufnahme:

an L1: $P_1 = 17,5 \text{ kW}$, $\cos \varphi_1 = 1$;

an L2: $S_2 = 23 \text{ kVA}$, $\cos \varphi_2 = 0,72$ induktiv;

an L3: $P_3 = 10 \text{ kW}$ parallel zu der Kapazität $C_3 = 275 \text{ }\mu\text{F}$.

Die Ströme und Leistungen sollen bestimmt werden.

Mit der Sternspannung $U_\lambda = 230 \text{ V}$ erhält man die Ströme und Phasenverschiebungswinkel

$$I_1 = \frac{P_1}{U_\lambda} = \frac{17,5 \text{ kW}}{230 \text{ V}} = 76,1 \text{ A} \quad \text{bei } \varphi_1 = 0^\circ,$$

$$I_2 = \frac{S_2}{U_\lambda} = \frac{23 \text{ kVA}}{230 \text{ V}} = 100 \text{ A} \quad \text{bei } \varphi_2 = 43,9^\circ$$

sowie die Wirk- und die Blindkomponente des Stroms \underline{I}_3

$$I_{3w} = \frac{P_3}{U_\lambda} = \frac{10 \text{ kVA}}{230 \text{ V}} = 43,48 \text{ A},$$

$$I_{3b} = \omega C_3 U_\lambda = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 275 \text{ }\mu\text{F} \cdot 230 \text{ V} = 19,87 \text{ A}.$$

Hieraus folgt der Effektivwert

$$I_3 = \sqrt{I_{3w}^2 + I_{3b}^2} = \sqrt{43,48^2 + 19,87^2} \text{ A} = 47,8 \text{ A}$$

und der – weil kapazitiv – negative Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_3 = -\arctan \frac{I_{3b}}{I_{3w}} = -\arctan \frac{19,87 \text{ A}}{43,48 \text{ A}} = -24,6^\circ.$$

Die von der Kapazität C_3 aufgenommene Blindleistung ist nach Tabelle 5.2

$$Q_3 = -\omega C_3 U_\lambda^2 = -2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 275 \text{ }\mu\text{F} \cdot (230 \text{ V})^2 = -4,57 \text{ kVA}.$$

In Bild 8.12a sind die Sternspannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 aus Bild 8.11b noch einmal dargestellt; die winkelmäßige Zuordnung zur reellen und imaginären Achse ist willkürlich gewählt. Die Stromzeiger \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 werden unter den berechneten Phasenverschiebungswinkeln φ_1 , φ_2 , φ_3 an den zugehörigen Sternspannungen angetragen und liefern durch geometrische Addition den Neutralleiterstrom

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ &= 76,09 \text{ A } e^{-j90^\circ} + 100 \text{ A } e^{j(150^\circ - 43,95^\circ)} + 47,8 \text{ A } e^{j(30^\circ + 24,56^\circ)} \\ &= 58,96 \text{ A } e^{j89,9^\circ}. \end{aligned}$$

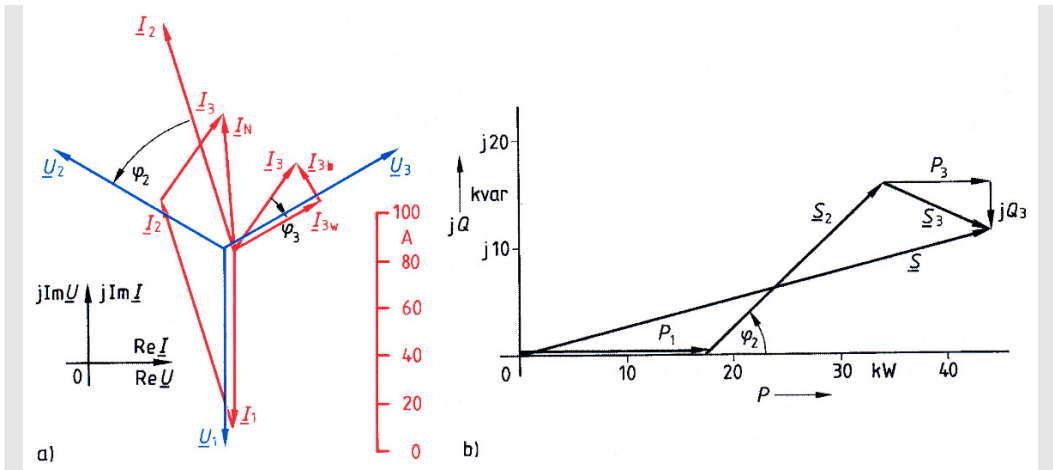


Bild 8.12: Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm (a) und Leistungszeigerdiagramm (b) zu Beispiel 8.6

Die komplexen Leistungen werden in Bild 8.12b dargestellt und zur Ermittlung der komplexen Gesamtleistung geometrisch addiert. Die winkelmäßige Zuordnung der Leistungszeiger zur reellen und imaginären Achse liegt nach Abschnitt 5.4.3 fest. Die Addition liefert

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = (17,5 + 23 e^{j43,95^\circ} + 10 - j4,57) \text{ kVA} = 44,1 \text{ kW} + j11,4 \text{ kvar}$$

und

$$S = |\underline{S}| = 45,5 \text{ kVA}.$$

Es ist nicht sinnvoll, für unsymmetrische Belastung einen mittleren Leistungsfaktor als Verhältnis der Summe der Wirkleistungen zur gesamten Scheinleistung zu berechnen, da ein solcher mittlerer Leistungsfaktor im Allgemeinen keine Auskunft über die allein wichtigen, in den einzelnen Strängen auftretenden Leistungsverhältnisse geben kann.

8.3.1.2 Leistungsmessung

Wirkleistung wird an einem Verbraucher am Vierleiternetz mit der Schaltung nach Bild 8.13 gemessen, indem man die Messschaltung für einphasige Verbraucher nach Abschnitt 5.11.4 für jede Phase einzeln einsetzt. Ist der Verbraucher im Stern geschaltet und der Sternpunkt S an den Neutralleiter angeschlossen, zeigen die Wattmeter die drei Strang-Wirkleistungen an.

Ist der Sternpunkt wie in Bild 8.13 nicht angeschlossen, so tritt bei unsymmetrischem Verbraucher eine Spannung \underline{U}_{SN} zwischen Sternpunkt S und Neutralleiter N auf (Abschnitt 8.3.2.2). Die komplexe Leistung ergibt sich aus der Summe der komplexen Strangleistungen mit Gl. (5.152) zu

$$\underline{S} = \underline{S}_{\text{Str1}} + \underline{S}_{\text{Str2}} + \underline{S}_{\text{Str3}} = (\underline{U}_1 - \underline{U}_{SN}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_{SN}) \underline{I}_2^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_{SN}) \underline{I}_3^*. \quad (8.34)$$

Wegen $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ und der Gln. (5.83) und (5.84)) gilt auch $\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^* = 0$.

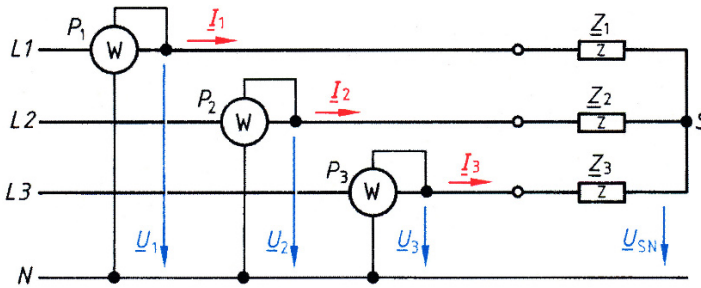


Bild 8.13: Wirkleistungsmessung

Hiermit erhält man

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* - \underline{U}_{SN}(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* \quad (8.35)$$

und mit Gl. (5.155))

$$P = \operatorname{Re} \underline{S} = \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_3 \underline{I}_3^*) = P_1 + P_2 + P_3. \quad (8.36)$$

Hierin stellen P_1 , P_2 , P_3 nach Gl. (5.321) die von den drei Wattmetern angezeigten Werte dar. Ihre Summe ergibt also die insgesamt aufgenommene Wirkleistung. Der Vergleich mit Gl. (8.34) zeigt aber, dass die einzelnen Werte P_1 , P_2 , P_3 im Allgemeinen nicht mit den Strang-Wirkleistungen $P_{\text{Str}1}$, $P_{\text{Str}2}$, $P_{\text{Str}3}$ übereinstimmen. Gleiches gilt für die Dreieckschaltung. Nur beim symmetrischen Verbraucher stimmen die angezeigten Leistungswerte $P_1 = P_2 = P_3 = P/3$ mit den Strangwirkleistungen überein.

Blindleistung wird an einem dreiphasigen Verbraucher mit der Schaltung nach Bild 8.14 gemessen. Mit Gl. (5.156) und Gl. (8.35) erhält man die Blindleistung einer Sternschaltung

$$Q = \operatorname{Im} \underline{S} = \operatorname{Im}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) + \operatorname{Im}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) + \operatorname{Im}(\underline{U}_3 \underline{I}_3^*) \quad (8.37)$$

und mit Gl. (5.94)

$$Q = \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{U}_1}{j} \underline{I}_1^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{U}_2}{j} \underline{I}_2^* \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{U}_3}{j} \underline{I}_3^* \right). \quad (8.38)$$

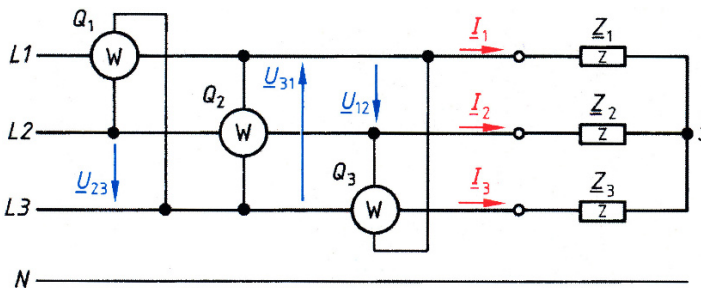


Bild 8.14: Blindleistungsmessung

Aus Bild 8.11b und Gl. (8.12) folgt

$$\frac{\underline{U}_1}{j} = \frac{\underline{U}_{23}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\underline{U}_2}{j} = \frac{\underline{U}_{31}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\underline{U}_3}{j} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}}. \quad (8.39)$$

Dies in Gl. (8.38) eingesetzt ergibt

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} [\operatorname{Re}(\underline{U}_{23} I_1^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{31} I_2^*) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{12} I_3^*)] = \frac{1}{\sqrt{3}} (Q_1 + Q_2 + Q_3). \quad (8.40)$$

Die drei Summanden in der letzten Klammer stellen die von den drei Wattmetern angezeigten Werte Q_1, Q_2, Q_3 dar. Ihre Summe ist das $\sqrt{3}$ -fache der gesamten Blindleistung. Die einzelnen Werte Q_1, Q_2, Q_3 sind aber nur im Fall der Sternschaltung mit angeschlossenem Sternpunkt oder im Fall eines symmetrischen Verbrauchers auch das $\sqrt{3}$ -fache der jeweiligen Strang-Blindleistungen. Für die Messung wird der Neutralleiter nicht benötigt. Die Schaltung ist daher sowohl für Vier- als auch für Dreileiternetze verwendbar.

8.3.2 Dreileiternetz

8.3.2.1 Dreieckschaltung

In den drei Strängen mit den Strangimpedanzen $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$ eines unsymmetrischen, im Dreieck geschalteten Verbrauchers nach Bild 8.15a fließen die *Strangströme*

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}, \quad (8.41)$$

die gemeinsam ein unsymmetrisches Stromsystem nach Bild 8.15b bilden.

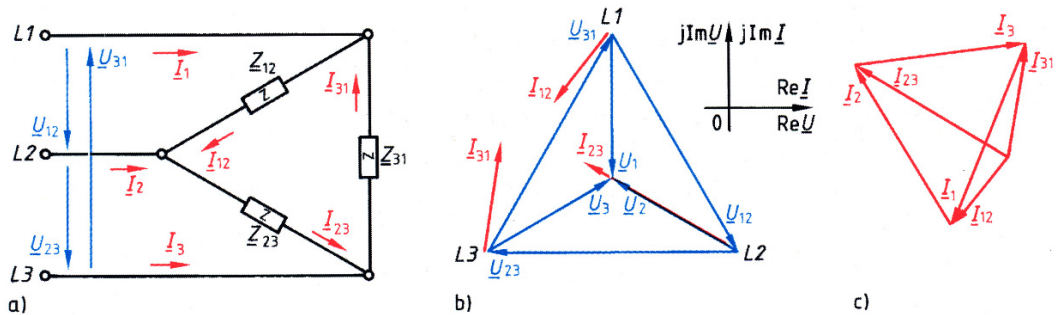


Bild 8.15: Unsymmetrische Dreieckschaltung (a) mit Zeigerdiagramm für die Strangspannungen und -ströme (b) sowie für die Außenleiterströme (c)

Mit dem Knotensatz folgen hieraus die Außenleiterströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$, wie in Bild 8.15c gezeigt. Diese Außenleiterströme bilden im Allgemeinen auch ein unsymmetrisches Stromsystem.

Beispiel 8.7: Ströme bei unsymmetrischer Last in Dreieckschaltung

Ein nach Bild 8.15a im Dreieck geschalteter Verbraucher besteht aus den Impedanzen $\underline{Z}_{12} = 50 \Omega e^{j70^\circ}$, $\underline{Z}_{23} = 25 \Omega e^{j30^\circ}$, $\underline{Z}_{31} = 40 \Omega e^{-j20^\circ}$. Er liegt an einem Dreileiternetz mit der Spannung $U = 400 \text{ V}$.

Alle Ströme und ihre Phasenverschiebungswinkel sind zu bestimmen.

Mit den Außenleiterspannungen $\underline{U}_{12} = 400 \text{ V } e^{-j60^\circ}$, $\underline{U}_{23} = 400 \text{ V } e^{j180^\circ}$ und $\underline{U}_{31} = 400 \text{ V } e^{j60^\circ}$ ergeben sich die Strangströme

$$\begin{aligned}\underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{400 \text{ V } e^{-j60^\circ}}{50 \Omega e^{j70^\circ}} = 8 \text{ A } e^{-j130^\circ}, \\ \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{400 \text{ V } e^{j180^\circ}}{25 \Omega e^{j30^\circ}} = 16 \text{ A } e^{j150^\circ}, \\ \underline{I}_{31} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{400 \text{ V } e^{j60^\circ}}{40 \Omega e^{-j20^\circ}} = 10 \text{ A } e^{j80^\circ}.\end{aligned}$$

Sie sind in Bild 8.15b mit den zugehörigen Spannungen dargestellt. Hieraus folgen mit Bild 8.15a und dem Knotensatz die Außenleiterströme

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 8 \text{ A } e^{-j130^\circ} - 10 \text{ A } e^{j80^\circ} = 17,4 \text{ A } e^{-j113^\circ}, \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 16 \text{ A } e^{j150^\circ} - 8 \text{ A } e^{-j130^\circ} = 16,6 \text{ A } e^{j122^\circ}, \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 10 \text{ A } e^{j80^\circ} - 16 \text{ A } e^{j150^\circ} = 15,7 \text{ A } e^{j6,8^\circ}.\end{aligned}$$

Wie aus Bild 8.15c ersichtlich, ist ihre Summe $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$.

8.3.2.2 Sternschaltung

Da bei einem Dreileiternetz kein Neutralleiter mitgeführt wird, kann der Sternpunkt S in Bild 8.16a nicht angeschlossen werden. Wegen des Knotensatzes gilt daher auch für unsymmetrische Verbraucher

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \quad (8.42)$$

Wegen der ungleichen Strangimpedanzen $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ stellt sich am Sternpunkt S ein anderes Potenzial ein, als ein mitgeführter Neutralleiter (im Allgemeinen auf Erdpotential) gegebenenfalls gehabt hätte. Wie Bild 8.16b zeigt, werden die Strangspannungen $\underline{U}_{\text{Str}1}, \underline{U}_{\text{Str}2}, \underline{U}_{\text{Str}3}$ dadurch unsymmetrisch und stimmen nicht mehr mit den (beim Dreileiternetz nicht verfügbaren) symmetrischen Sternspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ überein.

Die Spannung $\underline{U}_{\text{SN}}$ zwischen dem Sternpunkt S und dem (nicht zugänglichen) Neutralleiter N lässt sich nach dem *Verfahren der Ersatz-Spannungsquelle* (Abschnitt 2.4.5.2) bestimmen. Der dreiphasige Spannungserzeuger wird in Bild 8.16d durch drei ideale Spannungsquellen dargestellt, an die die drei Stränge $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ angeschlossen sind. Für diese Schaltung wird nun bezüglich der Klemmen S und N die Ersatz-Spannungsquelle nach Bild 8.16e bestimmt, indem der *Kurzschlussstrom* und der Kehrwert der *Innenimpedanz*

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}, \quad \frac{1}{\underline{Z}_i} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

berechnet werden. Daraus folgt die gesuchte Spannung

$$\underline{U}_{\text{SN}} = \underline{Z}_i \underline{I}_k = \frac{\underline{I}_k}{\frac{1}{\underline{Z}_i}} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}. \quad (8.43)$$

Beispiel 8.8: Ströme und Spannungen bei unsymmetrischer Last in Sternschaltung

Ein unsymmetrischer, im Stern geschalteter dreiphasiger Verbraucher nach Bild 8.16a mit den Strangimpedanzen $Z_1 = 47 \Omega e^{j40^\circ}$, $Z_2 = 26 \Omega e^{j35^\circ}$, $Z_3 = R_3 = 37 \Omega$ liegt an einem Dreileiternetz mit $U = 400 \text{ V}$ und $\underline{U}_1 = 230,9 \text{ V } e^{-j90^\circ}$.

Gesucht sind die Strangspannungen und Strangströme.

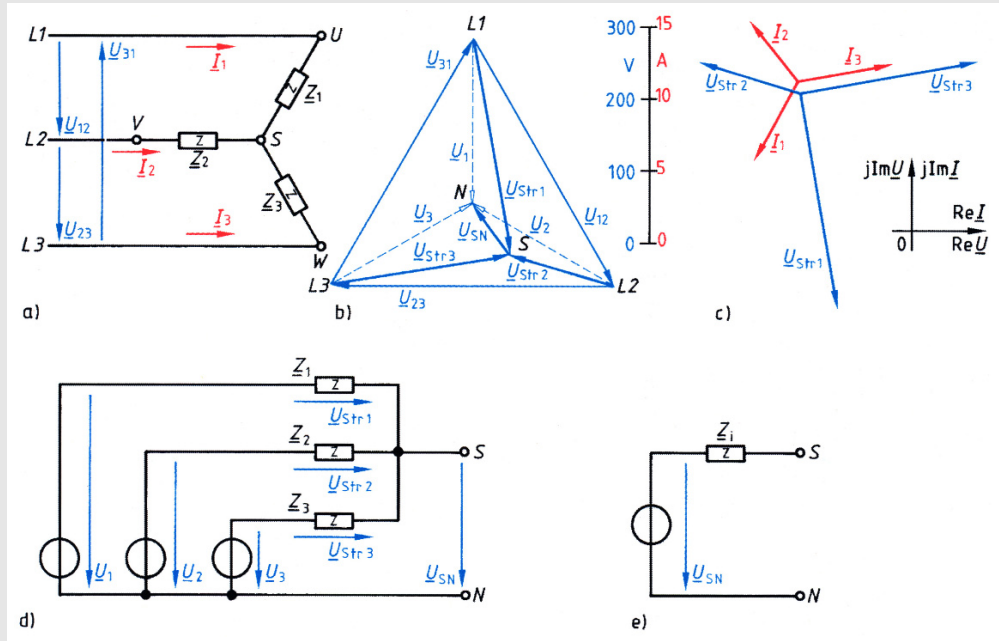


Bild 8.16: Unsymmetrische Sternschaltung am dreiphasigen Netz (a) mit Zeigerdiagramm der Strangspannungen (b) und Strangströme (c) mit den Werten von Beispiel 8.8, sowie Nachbildung des Drehstromerzeugers durch drei ideale Spannungsquellen (d) und Ersatz-Spannungsquelle (e) zur Bestimmung von \underline{U}_{SN}

Aus den Sternspannungen $\underline{U}_1 = 230,9 \text{ V } e^{-j90^\circ}$, $\underline{U}_2 = 230,9 \text{ V } e^{j150^\circ}$, $\underline{U}_3 = 230,9 \text{ V } e^{j30^\circ}$ folgt mit Gl. (8.43) die Spannung zwischen Sternpunkt S und Neutralleiter N:

$$\underline{U}_{SN} = \frac{\frac{\underline{U}_1}{Z_1} + \frac{\underline{U}_2}{Z_2} + \frac{\underline{U}_3}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\frac{230,9 \text{ V } e^{-j90^\circ}}{47 \Omega e^{j40^\circ}} + \frac{230,9 \text{ V } e^{j150^\circ}}{26 \Omega e^{j35^\circ}} + \frac{230,9 \text{ V } e^{j30^\circ}}{37 \Omega}}{\frac{1}{47 \Omega e^{j40^\circ}} + \frac{1}{26 \Omega e^{j35^\circ}} + \frac{1}{37 \Omega}} = 91,15 \text{ V } e^{j127^\circ}$$

Nach Bild 8.17d ergeben sich hiermit die Strangspannungen

$$\underline{U}_{Str1} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{SN} = 230,9 \text{ V } e^{-j90^\circ} - 91,15 \text{ V } e^{j127^\circ} = 309 \text{ V } e^{-j79,8^\circ},$$

$$\underline{U}_{Str2} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{SN} = 230,9 \text{ V } e^{j150^\circ} - 91,15 \text{ V } e^{j127^\circ} = 151 \text{ V } e^{j163,6^\circ},$$

$$\underline{U}_{Str3} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{SN} = 230,9 \text{ V } e^{j30^\circ} - 91,15 \text{ V } e^{j127^\circ} = 258 \text{ V } e^{j9,5^\circ}$$

und die mit den Außenleiterströmen identischen Strangströme

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{\text{Str}1}}{Z_1} = \frac{309 \text{ V } e^{-j79,8^\circ}}{47 \Omega e^{j40^\circ}} = 6,57 \text{ A } e^{-j119,8^\circ},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{\text{Str}2}}{Z_2} = \frac{151 \text{ V } e^{j163,6^\circ}}{26 \Omega e^{j35^\circ}} = 5,81 \text{ A } e^{j128,6^\circ},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U_{\text{Str}3}}{Z_3} = \frac{258 \text{ V } e^{j9,5^\circ}}{37 \Omega} = 6,97 \text{ A } e^{j9,5^\circ},$$

die in Bild 8.16c als Zeiger dargestellt sind.

Zur Kontrolle der Rechnung kann man überprüfen, ob $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ erfüllt ist.

8.3.2.3 Leistungsmessung

Zur Messung der Wirkleistung, die von einem Verbraucher am Dreileiternetz aufgenommen wird, kann die *Aron-Schaltung* nach Bild 8.17 verwendet werden.

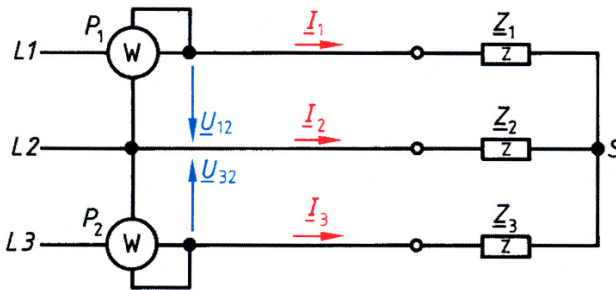


Bild 8.17: Wirkleistungsmessung am Dreileiternetz mit der Aron-Schaltung

Die komplexe Leistung des dreiphasigen Verbrauchers ergibt sich aus Gl. (8.35) unter Berücksichtigung der Gln. (8.42), (5.83) und (5.84) zu

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 (-\underline{I}_1^* - \underline{I}_3^*) + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \underline{I}_3^*.$$

Nach Gl. (8.8) liefert die Differenz zweier Sternspannungen stets eine Außenleiterspannung (Bild 8.16b). Damit erhält man für die komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^* \quad (8.44)$$

und nach Gl. (5.155) die Wirkleistung

$$P = \text{Re}(\underline{U}_{12} \underline{I}_1^*) + \text{Re}(\underline{U}_{32} \underline{I}_3^*) = P_1 + P_2, \quad (8.45)$$

also die Summe der von den beiden Wattmetern in Bild 8.17 angezeigten Werte. Aus den Werten P_1 und P_2 kann man aber nicht auf die Strang-Wirkleistungen schließen. Selbst bei symmetrischen Verbrauchern sind diese beiden Werte im Allgemeinen unterschiedlich und nur bei rein ohmscher, symmetrischer Last gleich.

Zur Messung der Blindleistung wird wie beim Vierleiternetz die Schaltung nach Bild 8.14 verwendet.



9 Nichtsinusförmige Ströme und Spannungen

In den Kapiteln 5 bis 8 wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Wechselgrößen zeitlich sinusförmig verlaufen. Die reine Sinusform tritt aber nur selten auf. Deshalb soll diese Einschränkung jetzt fallen gelassen werden. Im Folgenden werden zunächst allgemeine periodische Schwingungen und danach nichtperiodische, einmalige Vorgänge betrachtet.

In der Energietechnik sind Abweichungen von der Sinusform in der Regel ungewollt. Aber es werden z. B. schon in den Generatoren keine rein sinusförmigen Spannungen erzeugt. Transformatoren benötigen Magnetisierungsströme, die bei Sättigung der Eisenkerne verzerrt sind (Abschnitt 9.2.3). Trotz sinusförmig verlaufender Spannungen weichen die Ströme daher von der Sinusform ab und verursachen nichtsinusförmige Spannungsabfälle. Auch Stromrichter verursachen nichtsinusförmige Ströme und Spannungen (Abschnitt 9.2.2).

In der Elektrotechnik werden neben Sinus-Generatoren auch Rechteck-, Sägezahn-, Impuls- und allgemeine Funktionsgeneratoren eingesetzt, die Spannungen und Ströme mit frei definierbaren („arbiträren“) Kurvenformen erzeugen. Mikrofone und Sender liefern zeitabhängige, meist regellose Signale mit ständig wechselnden Frequenzanteilen. Daneben werden zur Modulation und Mischung nichtlineare Bauelemente eingesetzt, die zu Verzerrungen der Ausgangsgrößen führen.

Die Impulstechnik arbeitet mit zeitlich eng begrenzten Strömen und Spannungen, die nicht sinusförmig sind und sich vielfach auch nicht periodisch wiederholen. Derartige Impulse müssen dann als zeitliche Abfolge einmaliger Vorgänge mit Übergangszuständen betrachtet werden, die erst nach einiger Zeit in den jeweils stationären Zustand einmünden. Übergangszustände bzw. Ausgleichsvorgänge ergeben sich auch, wenn Netzwerke ein- oder ausgeschaltet, wenn Eingangsstrom oder -spannung verändert oder Netzwerkteile geändert werden, wenn also z. B. die Belastung verstellt wird oder wenn Störungen wie Lastschwankungen, Kurzschlüsse oder Ähnliches auftreten. In der Elektrotechnik hat man sich mit den Auswirkungen solcher Schaltvorgänge (z. B. auch plötzlich auftretenden Überspannungen) auseinanderzusetzen. In der Regelungstechnik muss man die Folgen von Störungen sowie die Wirksamkeit und Stabilität von Regelkreisen, also das dynamische Verhalten der Anlagen, untersuchen.

Im Folgenden wird zunächst in Abschnitt 9.1 die Darstellung periodischer Vorgänge durch die Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen beschrieben und das Strom-Spannungs-Verhalten der Grundzweipole an nichtsinusförmiger Wechselspannung untersucht. In Abschnitt 9.2 wird der Einfluss nichtlinearer Bauelemente auf das Verhalten von Netzwerken bei sinusförmiger Anregung aufgezeigt. Schließlich werden in Abschnitt 9.3 Verfahren zur Berechnung von Schaltvorgängen behandelt.

9.1 Fourier-Analyse periodischer Zeitfunktionen

Für jede periodische Zeitfunktion gilt $f(t) = f(t + nT)$. Hierbei ist T die (kleinste) Periodendauer des Vorgangs und n eine beliebige ganze Zahl. Eine solche Funktion kann stets als Überlagerung von Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz und Phasenlage sowie gegebenenfalls eines *Gleichanteils* aufgefasst werden.

Die Überlagerung enthält meist eine sinusförmige Schwingung mit der *Grundfrequenz* $1/T$ entsprechend der Periodendauer T der Funktion $f(t)$. Sie wird als *Grundschiwingung*, 1. Teilschiwingung oder 1. Harmonische bezeichnet. Die Frequenzen der übrigen sinusförmigen Schwingungen (*Oberschwingungen*, *höhere Harmonische*) sind immer ganzzahlige positive Vielfache der Grundfrequenz.

Das Aufsummieren des Gleichanteils, der Grundschiwingung und der Oberschwingungen geschieht nach Gl. (9.1) in Form einer *Fourier-Reihe*.

In Abschnitt 9.1.1 wird zunächst untersucht, nach welcher Methode sich die Koeffizienten a_0 , a_ν , b_ν der Fourier-Reihe ermitteln lassen. In Abschnitt 9.1.2 wird die Berechnung der Fourier-Koeffizienten vorgenommen und in Abschnitt 9.1.3 werden wichtige Kenngrößen Oberschwingungshaltiger periodischer Zeitfunktionen erläutert.

9.1.1 Aufgabenstellung

Ziel der nachfolgenden Überlegungen ist es zunächst, ein Rechenverfahren zu finden, mit dessen Hilfe man eine vorgegebene periodische Zeitfunktion $f(t)$ in optimaler Weise durch eine Näherungsfunktion $g(t)$ annähern kann. Hierzu benötigt man einen zur Näherung geeigneten Funktionstyp und ein Kriterium, aufgrund dessen sich entscheiden lässt, wann eine Näherung optimal ist.

9.1.1.1 Näherungsfunktion

Zur Annäherung der periodischen Zeitfunktion $f(t)$ soll die Summe $g(t)$ aus einem Gleichanteil und mehreren Sinus- und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz verwendet werden. Diese Wahl ist für stetig differenzierbare Funktionen in jedem Fall sinnvoll.

Da die *Originalfunktion* $f(t)$ in jeder Periode T in gleicher Weise durch die *Näherungsfunktion* $g(t)$ angenähert werden soll, müssen alle in der Näherungsfunktion $g(t)$ enthaltenen Sinus- und Kosinusfunktionen während der Periodendauer T eine ganzzahlige Anzahl von Schwingungen aufweisen. Deshalb darf die Näherungsfunktion $g(t)$ nur sinusförmige Funktionen enthalten, deren Frequenzen *ganzzahlige Vielfache* der Grundfrequenz sind. Damit hat die Näherungsfunktion die allgemeine Form

$$g(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \cos(\nu \omega t) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu \sin(\nu \omega t). \quad (9.1)$$

Weil für jede Kreisfrequenz $\nu \omega$ sowohl eine Kosinusfunktion $a_\nu \cos(\nu \omega t)$ als auch eine Sinusfunktion $b_\nu \sin(\nu \omega t)$ angesetzt wird und für a_ν und b_ν sowohl positive als auch negative Werte zugelassen werden, lassen sich nach Abschnitt 5.2.5 die gleichfrequenten Sinus- und Kosinusschwingungen in Gl. (9.1) jeweils durch eine Sinusfunktion

$$a_\nu \cos(\nu \omega t) + b_\nu \sin(\nu \omega t) = A_\nu \sin(\nu \omega t + \varphi_\nu) \quad (9.2)$$

mit der Amplitude $A_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$ und der Phase $\varphi_\nu = \text{Arctan}(a_\nu/b_\nu)$ darstellen.

Durch die Zahl n wird die Gliederanzahl in der Näherungsfunktion Gl. (9.1) festgelegt. Die Näherung gelingt umso besser, je größer n ist.

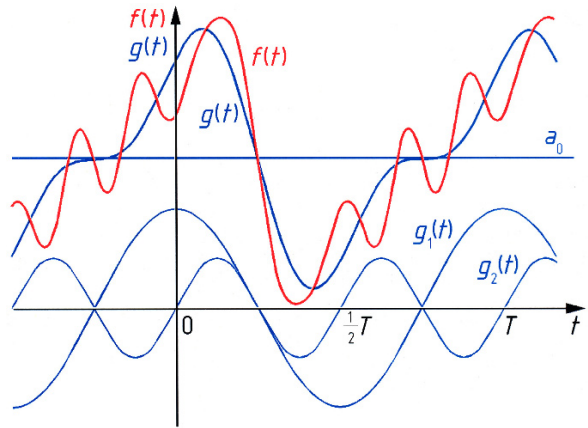


Bild 9.1: Periodische Zeitfunktion $f(t)$ und optimale Näherung $g(t)$ bei Beschränkung auf den Gleichanteil a_0 , die Grundschwingung $g_1(t)$ und die 2. Harmonische $g_2(t)$

In Bild 9.1 wird eine Näherungsfunktion $g(t)$ mit $n = 2$ gezeigt, die also nur aus dem Gleichanteil a_0 , der Grundschwingung $g_1(t)$ und der 1. Oberschwingung, also der 2. Harmonischen $g_2(t)$ besteht. Die Annäherung an die Originalfunktion $f(t)$ gelingt nur unvollkommen. Dennoch stellt sie bei der Beschränkung auf so wenige Glieder die bestmögliche Näherung der Originalfunktion im Sinne des kleinsten mittleren Fehlerquadrats dar (Abschnitt 9.1.1.2).

9.1.1.2 Approximation nach dem kleinsten mittleren Fehlerquadrat

Zur Beurteilung der Güte der Übereinstimmung zwischen Näherungsfunktion $g(t)$ und Originalfunktion $f(t)$ wird der Fehler, also die Differenz $\delta(t) = g(t) - f(t)$ in dem Bereich von t betrachtet, für den die Näherung gelten soll. Bei periodischen Zeitfunktionen ist dies eine Periodendauer T . Bei nichtperiodischen Funktionen muss der Gültigkeitsbereich der Näherung vor der Berechnung festgelegt werden.

Für eine optimale Näherung scheint die Forderung naheliegend, dass der arithmetische Mittelwert des Fehlers $\bar{\delta} = 0$ sein soll. Da diese Bedingung aber auch von Näherungsfunktionen erfüllt werden kann, deren Fehler $\delta(t)$ zeitweise beträchtliche positive und negative Werte aufweist, die sich bei der Mittelwertbildung gegenseitig aufheben, scheidet dies als Kriterium für eine optimale Näherung aus.

Unter den möglichen Kriterien, die das gegenseitige Verrechnen positiver und negativer Fehler vermeiden, hat sich das *Kriterium des kleinsten mittleren Fehlerquadrats* praktisch bewährt. Hierbei wird der Fehler $\delta(t)$ zunächst quadriert, wodurch größere Abweichungen δ zusätzlich stärker gewichtet werden als kleinere. Die optimale Näherung im Sinne dieses Kriteriums liegt dann vor, wenn das mittlere Fehlerquadrat $\bar{\delta}^2$ seinen kleinsten Wert annimmt.

Beispiel 9.1: Approximation einer Funktion durch eine lineare Funktion

Die in Bild 9.2 dargestellte Funktion $f(t)$ soll für $t_1 < t < t_2$ durch die Funktion $g(t) = a_0 + a_1 t$ angenähert werden. Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind so zu bestimmen, dass die Näherung optimal ist.

Für den geforderten Gültigkeitsbereich erhält man das mittlere Fehlerquadrat

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - f(t)]^2 dt. \quad (9.3)$$

Nach Einsetzen des vorgegebenen linearen Funktionstyps $g(t) = a_0 + a_1 t$ folgt für das in Gl. (9.3) enthaltene Zeitintegral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - f(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t - f(t)]^2 dt. \quad (9.4)$$

Es wird anschaulich durch die schraffierte Fläche in Bild 9.2 dargestellt und nimmt in Abhängigkeit von den Koeffizienten a_0 und a_1 unterschiedliche Werte an, ist also eine Funktion $J(a_0, a_1)$ dieser beiden Koeffizienten.

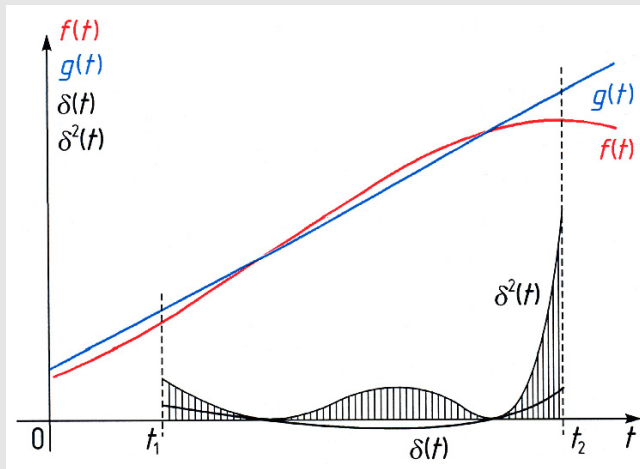


Bild 9.2: Lineare Näherung $g(t)$ der Originalfunktion $f(t)$ mit dem Verlauf des Fehlers $\delta(t) = g(t) - f(t)$ und des Fehlerquadrats $\delta^2(t)$

Die Werte von a_0 und a_1 , für die das Integral J (und damit nach Gl. (9.3) auch das mittlere Fehlerquadrat $\overline{\delta^2}$) minimal wird, erhält man, wenn man J nach a_0 bzw. a_1 differenziert und die 1. Ableitung jeweils null setzt. So ergibt sich

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t - f(t)]^2 dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t - f(t)] dt = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t - f(t)]^2 dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t - f(t)] t dt = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man die erhaltenen Integrale jeweils in zwei Teilintegrale zerlegt,

$$\int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t] dt = a_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_1(t_2^2 - t_1^2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (9.5)$$

bzw.

$$\int_{t_1}^{t_2} [a_0 t + a_1 t^2] dt = \frac{1}{2} a_0(t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} a_1(t_2^3 - t_1^3) = \int_{t_1}^{t_2} t f(t) dt. \quad (9.6)$$

Die auf der rechten Seite stehenden Integrale müssen, sofern sie nicht geschlossen lösbar sind, mit numerischen Methoden aus der vorgegebenen Funktion $f(t)$ ermittelt werden. Die auf der linken Seite stehenden Integrale sind allgemein gelöst worden und haben je eine Linearkombination der Koeffizienten a_0 und a_1 ergeben, sodass Gl. (9.5) und Gl. (9.6) ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_0 und a_1 darstellen.

Wenn als Näherung eine Parabel der Form $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ vorgegeben wird, verfährt man entsprechend. Man erhält dann drei lineare Gleichungen für die drei Koeffizienten a_0 , a_1 , a_2 . Nach diesem Verfahren lassen sich z. B. die Temperaturkoeffizienten α_{20} und β_{20} nach Abschnitt 2.1.2.4 aus der gemessenen $R(\vartheta)$ -Kennlinie ermitteln.

9.1.2 Fourier-Reihen

Nun sollen die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_ν und b_ν in Gl. (9.1) nach dem in Abschnitt 9.1.1.2 beschriebenen Kriterium des kleinsten mittleren Fehlerquadrats berechnet werden. Für bestimmte Sonderfälle vereinfacht sich die Rechnung, wie für einige Beispiele gezeigt wird. Schließlich wird die komplexe Fourier-Reihe eingeführt, die für $n \rightarrow \infty$ verwendet wird, d. h. wenn unendlich viele Glieder der Fourier-Reihe berücksichtigt werden.

9.1.2.1 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Nach Abschnitt 9.1.1.2 ist $g(t)$ dann eine *optimale Näherung* der Originalfunktion $f(t)$, wenn das Zeitintegral J des Fehlerquadrats $\delta^2(t)$ über eine Periodendauer T sein Minimum erreicht. Mit dem beliebigen Startzeitpunkt t_0 erhält man in Abwandlung von Gl. (9.4) das Zeitintegral

$$J = \int_{t_0}^{t_0+T} [g(t) - f(t)]^2 dt \quad (9.7)$$

mit

$$g(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \cos(\nu \omega t) + \sum_{\nu=1}^n b_\nu \sin(\nu \omega t). \quad (9.8)$$

Zur Bestimmung der Werte von a_0 , a_ν und b_ν , für die das Integral J minimal wird, muss J nach diesen Koeffizienten differenziert und die 1. Ableitung jeweils null gesetzt werden. Da die

Näherungsfunktion $g(t)$ nach Gl. (9.8) linear von den Koeffizienten a_0 , a_ν und b_ν abhängt, ist das Differenzieren von Gl. (9.7) nach der Kettenregel einfach möglich. Man erhält

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 2 \int_{t_0}^{t_0+T} [g(t) - f(t)] dt = 0 \quad (9.9)$$

bzw.

$$\frac{\partial J}{\partial a_\nu} = 2 \int_{t_0}^{t_0+T} [g(t) - f(t)] \cdot \cos(\nu \omega t) dt = 0 \quad (9.10)$$

bzw.

$$\frac{\partial J}{\partial b_\nu} = 2 \int_{t_0}^{t_0+T} [g(t) - f(t)] \cdot \sin(\nu \omega t) dt = 0. \quad (9.11)$$

Aus Gl. (9.9) folgt

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = a_0 T = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

Das auf der linken Seite stehende Integral hat den Wert $a_0 T$, da die Integrale sämtlicher nach Gl. (9.8) in $g(t)$ enthaltener Kosinus- und Sinusfunktionen über eine Periodendauer T null ergeben. Der Koeffizient a_0 stellt also den *Gleichanteil*

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (9.12)$$

der Funktion $f(t)$ dar.

Für die Berechnung der Koeffizienten a_ν folgt aus Gl. (9.10)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \cos(\nu \omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(\nu \omega t) dt. \quad (9.13)$$

Wenn man $g(t)$ aus Gl. (9.8) in das Integral auf der linken Seite einsetzt, lässt sich dieses in Form der Summe

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \cos(\nu \omega t) dt + \sum_{\mu=1}^n \int_{t_0}^{t_0+T} a_\mu \cos(\mu \omega t) \cos(\nu \omega t) dt + \sum_{\mu=1}^n \int_{t_0}^{t_0+T} b_\mu \sin(\mu \omega t) \cos(\nu \omega t) dt \quad (9.14)$$

darstellen. Hierin bezeichnet ν weiterhin die Ordnungszahl des Koeffizienten a_ν , nach dem in Gl. (9.10) differenziert wurde, während μ der Zählindex (von 1 bis n) der Summen in Gl. (9.8) ist.

Unter Verwendung der aus der Trigonometrie bekannten Identitäten

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \quad (9.15)$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)] \quad (9.16)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \quad (9.17)$$

lässt sich zeigen, dass fast alle in der Summe (9.14) enthaltenen Integrale über eine Periodendauer T null sind. Die Integration über eine oder mehrere Perioden einer Wechselgröße ergibt immer den Wert null. Nur das Integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_\mu \cos(\mu \omega t) \cos(\nu \omega t) dt \quad \text{mit} \quad \mu = \nu$$

ergibt mit Gl. (9.15) wegen $\cos 0 = 1$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_\nu \frac{1}{2} [1 + \cos(2\nu \omega t)] dt = \frac{1}{2} a_\nu T$$

und stellt damit das Ergebnis des Integrals links des Gleichheitszeichens von Gl. (9.13) dar. Somit folgt schließlich aus Gl. (9.13)

$$a_\nu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(\nu \omega t) dt. \quad (9.18)$$

Damit liegt eine Rechenvorschrift vor, mit deren Hilfe die Koeffizienten a_ν in Gl. (9.1) bzw. (9.8) zur Annäherung der Originalfunktion $f(t)$ gewonnen werden können.

Mit einer ganz ähnlichen Rechnung lassen sich auch die Koeffizienten b_ν bestimmen. Aus Gl. (9.11) folgt zunächst

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \sin(\nu \omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(\nu \omega t) dt. \quad (9.19)$$

Ähnlich wie in Gl. (9.14) kann auch hier unter Verwendung von Gl. (9.8) das Integral auf der linken Seite durch die Summe

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \sin(\nu \omega t) dt + \sum_{\mu=1}^n \int_{t_0}^{t_0+T} a_\mu \cos(\mu \omega t) \sin(\nu \omega t) dt + \sum_{\mu=1}^n \int_{t_0}^{t_0+T} b_\mu \sin(\mu \omega t) \sin(\nu \omega t) dt \quad (9.20)$$

dargestellt werden, deren Glieder alle null sind, bis auf den Term

$$\int_{t_0}^{t_0+T} b_\mu \sin(\mu \omega t) \sin(\nu \omega t) dt \quad \text{mit} \quad \mu = \nu,$$

denn dieser ergibt mit Gl. (9.17)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} b_\nu \frac{1}{2} [1 - \cos(2\nu\omega t)] dt = \frac{1}{2} b_\nu T$$

und stellt damit das Ergebnis des Integrals links des Gleichheitszeichens von Gl. (9.19) dar. Damit ergibt sich aus Gl. (9.19)

$$b_\nu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(\nu\omega t) dt. \quad (9.21)$$

Die Gln. (9.12), (9.18) und (9.21) ermöglichen jetzt die Bestimmung aller nach Gl. (9.8) in der Näherungsfunktion $g(t)$ enthaltenen Koeffizienten zur optimalen Annäherung einer vorgegebenen periodischen Zeitfunktion $f(t)$. Die Koeffizienten a_0 , a_ν , b_ν sind nicht von der Gliederzahl n abhängig!

9.1.2.2 Unendliche Fourier-Reihe

Wenn die Koeffizienten der Näherungsfunktion $g(t)$ nach Abschnitt 9.1.2.1 bestimmt werden, ist die Übereinstimmung mit der Originalfunktion $f(t)$ umso besser, je mehr Summenglieder in Gl. (9.8) berücksichtigt werden. Lässt man ihre Anzahl $n \rightarrow \infty$ gehen, so wird die Näherungsfunktion $g(t)$ mit der Originalfunktion $f(t)$ identisch, *sofern letztere stetig differenzierbar ist*. Aus Gl. (9.8) folgt dann

$$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\omega t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin(\nu\omega t) \quad (9.22)$$

Dieser Zusammenhang sowie die zugehörigen Koeffizienten sind in Tabelle 9.1 zusammengestellt.

Tabelle 9.1: Unendliche Fourier-Reihe und Bestimmungsgleichungen für ihre Koeffizienten

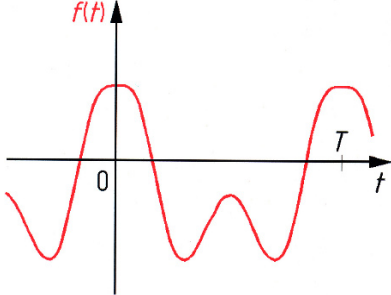
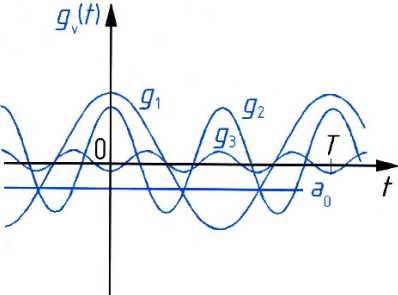
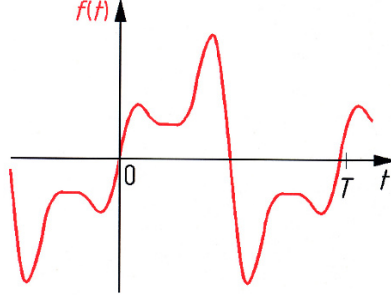
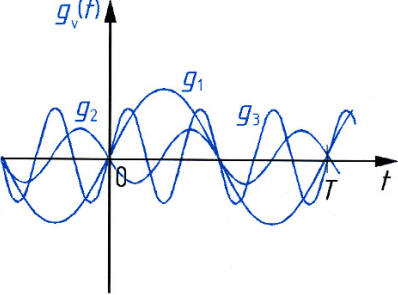
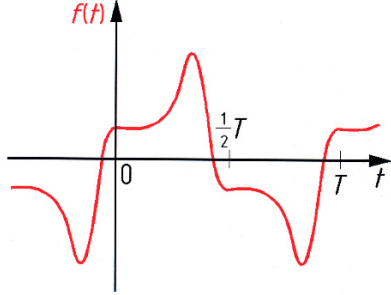
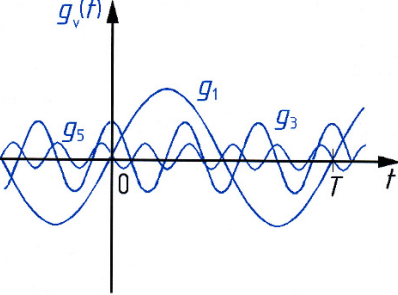
$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\omega t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin(\nu\omega t)$	(9.22)
$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$	(9.12)
$a_\nu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(\nu\omega t) dt$	(9.18)
$b_\nu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(\nu\omega t) dt$	(9.21)

9.1.2.3 Sonderfälle

Für Funktionen mit bestimmten Eigenschaften ist von vornherein erkennbar, dass einige der in Tabelle 9.1 aufgeführten Koeffizienten null werden. Tabelle 9.2 gibt eine Übersicht hierüber.

Tabelle 9.2: Funktionen mit besonderen Eigenschaften

Die linke Seite zeigt Beispiele $f(t)$ des jeweiligen Funktionstyps; die rechte Seite zeigt die hierin enthaltenen Sinus- und Kosinus-Schwingungen $g_\nu(t)$ dargestellt

<p>Gerade Funktionen $f(t) = f(-t)$</p> 	<p>nur Gleichanteil und \pm Kosinus-Anteile, $b_\nu = 0$</p> 
<p>Ungerade Funktionen $f(t) = -f(-t)$</p> 	<p>nur \pm Sinus-Anteile, $a_0 = 0$, $a_\nu = 0$</p> 
<p>Alternierende Funktionen $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$</p> 	<p>nur Anteil ungeradzahliger Ordnung, $a_0 = 0$, $a_{2\mu} = b_{2\mu} = 0$</p> 

Gerade Funktionen $f(t) = f(-t)$ sind klappsymmetrisch zur Ordinate und können nur durch solche Funktionen nachgebildet werden, die diese Eigenschaft auch selbst besitzen: daher treten hier nur Kosinus-Anteile (mit positiven oder auch negativen b_ν) und gegebenenfalls ein

Gleichanteil auf.

Entsprechendes gilt für *ungerade Funktionen* $f(t) = -f(-t)$: hier kommen nur Sinus-Anteile (mit positiven oder negativen b_ν) vor.

Alternierende Funktionen, bei denen die negative Halbschwingung bis auf das Vorzeichen mit der positiven Halbschwingung identisch ist, können nur durch Sinusschwingungen $g_\nu(t)$ geeigneter Phasenlage nachgebildet werden, für die ebenfalls $g_\nu(t) = -g_\nu(t + T/2)$ gilt. Dies ist nur für Frequenzen der Fall, die ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind.

Beispiel 9.2: Fourier-Koeffizienten einer symmetrischen Rechteckschwingung

Gesucht sind die Fourier-Koeffizienten der in Bild 9.3a dargestellten, nach einer *symmetrischen Rechteckschwingung* mit dem *Tastverhältnis* 1/2 verlaufenden Stromfunktion $i(t)$.

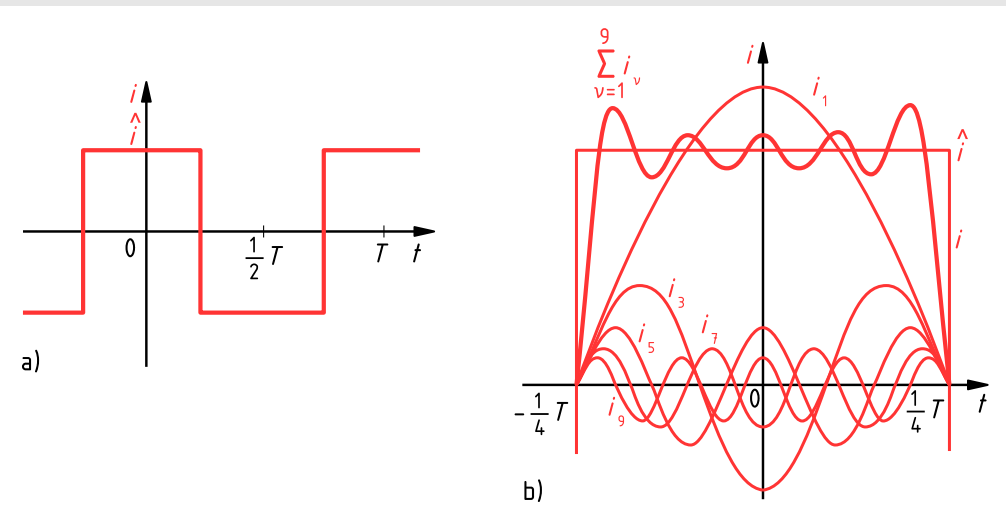


Bild 9.3: Rechteckförmige Stromfunktion (a) und enthaltene Harmonische bis $\nu = 9$ (b)

Die Funktion ist sowohl gerade als auch alternierend. Nach Tabelle 9.2 kommen daher nur a_ν ungeradzahligter Ordnung vor. Diese ergeben sich aus Gl. (9.18) zu

$$a_\nu = \frac{2}{T} \int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T} i(t) \cos(\nu \omega t) dt = \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{1}{4}T} \hat{i} \cos(\nu \omega t) dt + \int_{\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T} (-\hat{i}) \cos(\nu \omega t) dt \right\}.$$

Nach Auswertung der beiden Teilintegrale erhält man

$$a_\nu = \frac{2\hat{i}}{T} \left\{ \frac{1}{\nu\omega} \left[\sin \frac{\nu\omega T}{4} - \sin \frac{-\nu\omega T}{4} \right] - \frac{1}{\nu\omega} \left[\sin \frac{3\nu\omega T}{4} - \sin \frac{\nu\omega T}{4} \right] \right\}$$

und mit Gl. (5.30)

$$a_\nu = \frac{\hat{i}}{\nu\pi} \left\{ \sin \frac{\nu\pi}{2} - \sin \frac{-\nu\pi}{2} - \sin \frac{3\nu\pi}{2} + \sin \frac{\nu\pi}{2} \right\} = \frac{4\hat{i}}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi}{2},$$

was bestätigt, dass alle a_ν mit geradzahligem ν den Wert null haben. Für ungeradzahlige ν folgt

$$a_\nu = \frac{4\hat{i}}{\nu\pi} \approx \frac{1,273}{\nu} \hat{i} \quad \text{mit } \nu = 1, 5, 9, \dots$$

und

$$a_\nu = -\frac{4\hat{i}}{\nu\pi} \approx -\frac{1,273}{\nu} \hat{i} \quad \text{mit } \nu = 3, 7, 11, \dots$$

In Bild 9.3b ist die Überlagerung der Kosinusschwingungen $a_\nu \cos(\nu\omega t)$ bis $\nu = 9$ dargestellt.

9.1.2.4 Komplexe Fourier-Reihe

Mit der *Eulerschen Gleichung* $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ lässt sich einfach zeigen, dass

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

ist. Wenn man diese Ausdrücke in Gl. (9.22) einführt und die beiden Summen zusammenfasst, erhält man für die Fourier-Reihe die Darstellung

$$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{a_\nu}{2}(e^{j\nu\omega t} + e^{-j\nu\omega t}) + \frac{b_\nu}{2j}(e^{j\nu\omega t} - e^{-j\nu\omega t}) \right].$$

Die Terme der Summe werden jetzt nach den beiden Exponentialfunktionen sortiert und in zwei getrennten Summen dargestellt.

$$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_\nu - j b_\nu) e^{j\nu\omega t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_\nu + j b_\nu) e^{-j\nu\omega t} \quad (9.23)$$

Die komplexen Koeffizienten $\underline{c}_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu - j b_\nu)$ bzw. $\underline{c}_\nu^* = \frac{1}{2}(a_\nu + j b_\nu)$ sind zueinander konjugiert komplex und lassen sich mit den Gleichungen (9.18) und (9.21) aus Tabelle 9.1 darstellen als

$$\begin{aligned} \underline{c}_\nu &= \frac{1}{2}(a_\nu - j b_\nu) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) [\cos(\nu\omega t) - j \sin(\nu\omega t)] dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\nu\omega t} dt \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{c}_\nu^* &= \frac{1}{2}(a_\nu + j b_\nu) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) [\cos(\nu\omega t) + j \sin(\nu\omega t)] dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{j\nu\omega t} dt. \end{aligned}$$

Wie der Vergleich mit Gl. (9.12) zeigt, liefert die Gleichung für c_ν mit $\nu = 0$ auch das richtige Ergebnis für den Gleichanteil

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = a_0. \quad (9.24)$$

Außerdem ist zu erkennen, dass $c_\nu^* = \frac{1}{2}(a_\nu + j b_\nu)$ zu $c_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu - j b_\nu)$ wird, wenn man die Laufvariable mit (-1) multipliziert. Für den letzten Summenterm in Gl. (9.23) kann man daher schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_\nu + j b_\nu) e^{-j\nu\omega t} = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_\nu - j b_\nu) e^{j\nu\omega t}. \quad (9.25)$$

Nach dieser Umformung sind die Ausdrücke unter den beiden Summenzeichen in Gl. (9.23) identisch. Im einen Fall erfolgt die Summation von $\nu = 1$ bis $\nu \rightarrow \infty$, im anderen von $\nu = -1$ bis $\nu \rightarrow -\infty$. Nimmt man den noch fehlenden Wert $\nu = 0$ hinzu, so liefert derselbe Ausdruck $c_0 e^0$, was nach Gl. (9.24) den Gleichanteil a_0 beschreibt. Damit lassen sich alle drei Terme der Gl. (9.23) unter einem Summenzeichen zu der *komplexen Fourier-Reihe*

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu\omega t} \quad (9.26)$$

zusammenfassen. Für die *komplexen Fourier-Koeffizienten* gilt

$$c_\nu = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\nu\omega t} dt. \quad (9.27)$$

Obwohl die Gln. (9.26) und (9.27) für die komplexe Fourier-Reihe weniger anschaulich sind als die in Tabelle 9.1 zusammengestellten Gleichungen für die Fourier-Reihe mit reellen Koeffizienten, sollte man sich unbedingt mit diesen Zusammenhängen vertraut machen, da sie in der weiterführenden Literatur als Grundlage für die Einführung der Fourier- und Laplace-Transformation dienen [WU12].

9.1.3 Kennwerte periodischer Größen

9.1.3.1 Effektivwert

Die Fourier-Reihe nach Gl. (9.22) enthält im Allgemeinen neben dem Gleichanteil a_0 für jede Kreisfrequenz $\nu\omega$ sowohl eine Kosinusfunktion $a_\nu \cos(\nu\omega t)$ als auch eine Sinusfunktion $b_\nu \sin(\nu\omega t)$, die sich nach Gl. (9.2) zu einer Sinusfunktion

$$a_\nu \cos(\nu\omega t) + b_\nu \sin(\nu\omega t) = A_\nu \sin(\nu\omega t + \varphi_\nu)$$

mit der Amplitude $A_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$ zusammenfassen lassen. Wenn es sich bei der Zeitfunktion um einen Strom (bzw. eine Spannung) handelt, bezeichnet man die Amplitude A_ν der ν -ten

Teilschwingung mit \hat{i}_ν (bzw. \hat{u}_ν) und den Gleichanteil a_0 mit \bar{i} (bzw. \bar{u}). Der Effektivwert der ν -ten Teilschwingung ist nach Gl. (5.42)

$$I_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i}_\nu \quad \text{bzw.} \quad U_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}_\nu.$$

Der Effektivwert der Gesamtschwingung ist nach Gl. (5.18) zu berechnen und ergibt sich z. B. für einen Strom zu

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\bar{i} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{i}_\nu \sin(\nu \omega t + \varphi_\nu) \right]^2 dt}.$$

Beim Quadrieren des Klammersausdrucks treten außer \bar{i}^2 und den Termen $\hat{i}_\nu^2 \sin^2(\nu \omega t + \varphi_\nu)$ auch solche des Typs $2 \hat{i}_\mu \hat{i}_\nu \sin(\mu \omega t + \varphi_\mu) \sin(\nu \omega t + \varphi_\nu)$ mit $\mu \neq \nu$ auf. Wenn man letztere mit Hilfe von Gl. (9.17) umformt, lässt sich zeigen, dass ihr Integral über eine Periodendauer T immer null ist. Man erhält daher

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{i}^2 dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{i}_\nu^2 \sin^2(\nu \omega t + \varphi_\nu) dt}.$$

Unter dem Wurzelzeichen steht die Summe der Quadrate des Gleichanteils I_- sowie der Effektivwerte I_ν der einzelnen Teilschwingungen entsprechend Gl. (5.18). Diese Betrachtungen gelten für alle Größen, für die man Effektivwerte angibt. Das Ergebnis lässt sich daher auch auf die Spannung übertragen und man erhält als *Effektivwert der Gesamtschwingung*

$$I = \sqrt{I_-^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu^2} \quad \text{bzw.} \quad U = \sqrt{U_-^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu^2}. \quad (9.28)$$

In Übereinstimmung mit Gl. (5.21) bezeichnet der Summenausdruck den Effektivwert des Wechselstrom- (bzw. Wechselspannungs-) Anteils:

$$I_\sim = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu^2} \quad \text{bzw.} \quad U_\sim = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu^2} \quad (9.29)$$

9.1.3.2 Schwingungsgehalt, Welligkeit, Grundschwingungsgehalt, Klirrfaktor, Total Harmonic Distortion

Nur für Mischgrößen (Abschnitt 5.1.4) sind nach [dind] der *Schwingungsgehalt* s definiert als einheitenloses Verhältnis der Effektivwerte von Wechselanteil und Gesamtgröße

$$s_i = \frac{I_\sim}{I} \quad \text{bzw.} \quad s_u = \frac{U_\sim}{U} \quad (9.30)$$

und die *Welligkeit* w als einheitenloses Verhältnis des Effektivwertes des Wechselanteils und dem Betrag des Gleichanteils

$$w_i = \frac{I_\sim}{|I_-|} \quad \text{bzw.} \quad w_u = \frac{U_\sim}{|U_-|}. \quad (9.31)$$

Nur für Wechselgrößen (Abschnitt 5.1.4) wird der *Grundswingungsgehalt* g als einheitenloses Verhältnis der Effektivwerte von Grundschiwingung und gesamter Wechselgröße definiert:

$$g_i = \frac{I_1}{I} \quad \text{bzw.} \quad g_u = \frac{U_1}{U} \quad (9.32)$$

Allgemein gilt $0 \leq g \leq 1$.

Nur für Wechselgrößen ist der *Oberschwingungsgehalt* oder *Klirrfaktor* k nach [dind] definiert als das einheitenlose Verhältnis zwischen dem Effektivwert der Oberschwingungen (mit $\nu \geq 2$) und dem Gesamteffektivwert:

$$k_i = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} I_{\nu}^2}}{I} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} \quad \text{bzw.} \quad k_u = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} U_{\nu}^2}}{U} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} \quad (9.33)$$

Aus den Gln. (9.32) und (9.33) folgt die Umrechnungsvorschrift

$$k = \sqrt{1 - g^2}. \quad (9.34)$$

Allgemein gilt $0 \leq k \leq 1$. Der Klirrfaktor wird meist in Prozent angegeben. Für reine Sinusgrößen gilt $k = 0\%$. Wechselgrößen, in denen die Grundwelle nicht enthalten ist, haben einen Klirrfaktor von 100%.

Der Klirrfaktor spielt in der Messtechnik bei der Beurteilung der Qualität von Übertragungsgliedern eine große Rolle. Legt man z. B. an den Eingang eines Verstärkers eine reine Sinusgröße ($k = 0$), so erhält man durch Messung des Klirrfaktors der Ausgangsgröße eine Aussage über die nichtlinearen Verzerrungen des Verstärkers (siehe Abschnitt 9.2.1). Starke nichtlineare Verzerrungen in Audiosignalen werden von Menschen oft als „Klirren“ wahrgenommen. Daher rührt der Name dieser Kenngröße.

Der Klirrfaktor eines Signals ändert sich nicht, wenn das Signal mit einem konstanten Faktor multipliziert (verstärkt) wird oder wenn die Phasenlagen der enthaltenen Teilschwingungen geändert werden. Der Klirrfaktor erlaubt daher i. a. keinen Rückschluss auf die Kurvenform eines Signals. Als Kennwert eines gegebenen Signals (z. B. einer Rechteckschwingung) kann der Klirrfaktor beliebige Werte annehmen, ohne dass das Signal dadurch „gut“ oder „schlecht“ wäre.

Im englischen Sprachraum wird anstelle des Klirrfaktors eine Größe verwendet, die als „Total Harmonic Distortion“ bezeichnet und mit THD abgekürzt wird. Die „Harmonische Gesamtverzerrung“ ist das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschwingungen einer Wechselgröße zum Effektivwert ihrer Grundschiwingung:

$$THD_i = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} I_{\nu}^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} \quad \text{bzw.} \quad THD_u = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} U_{\nu}^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} \quad (9.35)$$

Aus Gl. (9.35) folgt durch Vergleich mit den Gln. (9.32) und (9.33)

$$THD = \frac{k}{g}. \quad (9.36)$$

Aus den Gln. (9.33) und (9.35) folgen die Umrechnungsvorschriften

$$k = \frac{THD}{\sqrt{1 + THD^2}} \quad (9.37)$$

und

$$THD = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (9.38)$$

Die THD kann beliebig große Werte annehmen ($0 \leq THD < \infty$), was ein Nachteil gegenüber dem Klirrfaktor ist, der nicht größer als 100 % werden kann. Der Klirrfaktor und die THD stimmen im Bereich kleiner Werte gut überein. Bei $THD = 10\%$ gilt $k = 9,95\%$. Im Bereich großer Werte wird der Unterschied zwischen den beiden Kenngrößen aber erheblich. So entspricht einer THD von 1000 % ein Klirrfaktor von 99,5 %.

Die THD wird in der Regel auch von Netzwerkanalyseprogrammen aus dem englischen Sprachraum berechnet und in deutschen Versionen dieser Programme teilweise fälschlich als Klirrfaktor bezeichnet.

Beispiel 9.3: Fourier-Koeffizienten und Klirrfaktor einer symmetrischen Sägezahnspannung

Für die in Bild 9.4 dargestellte symmetrische Sägezahnspannung $u(t)$ sind die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_ν , b_ν sowie der Grundschwingungsgehalt g_u und der Klirrfaktor k_u gesucht.

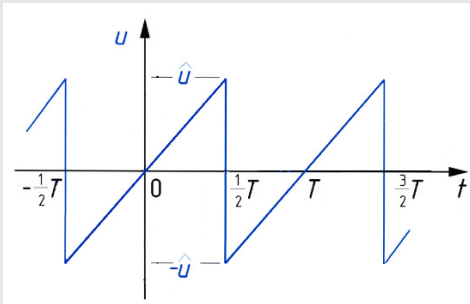


Bild 9.4: Sägezahnförmige Spannungsfunktion

Die Funktion ist ungerade. Nach Tabelle 9.2 gilt daher $a_0 = 0$, $a_\nu = 0$.

Die Koeffizienten b_ν werden mit Gl. (9.21) berechnet. Als Integrationsintervall wählt man zweckmäßig den Bereich von $-0,5T$ bis $0,5T$. In diesem Intervall folgt die Funktion der Geradengleichung

$$u(t) = \frac{2\hat{u}}{T} t.$$

Mit Gl. (9.21) erhält man

$$b_\nu = \frac{2}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} \frac{2\hat{u}}{T} t \sin(\nu \omega t) dt.$$

Durch partielle Integration (Produktregel) oder indem man in einer Integraltabelle das Integral der Funktion $x \sin(ax)$ nachschlägt, findet man die Lösung

$$b_\nu = \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[\frac{1}{(\nu\omega)^2} \sin(\nu\omega t) - \frac{t}{\nu\omega} \cos(\nu\omega t) \right] \Bigg|_{-0,5T}^{0,5T} .$$

Nach Einsetzen der oberen und der unteren Grenze folgt

$$b_\nu = 4\hat{u} \left\{ \frac{1}{(\nu\omega T)^2} \left[\sin \frac{\nu\omega T}{2} - \sin \frac{-\nu\omega T}{2} \right] - \frac{1}{\nu\omega T^2} \left[\frac{1}{2} T \cos \frac{\nu\omega T}{2} + \frac{1}{2} T \cos \frac{-\nu\omega T}{2} \right] \right\}$$

und mit Gl. (5.30)

$$b_\nu = 4\hat{u} \left\{ \frac{1}{(2\nu\pi)^2} [\sin(\nu\pi) - \sin(-\nu\pi)] - \frac{1}{4\nu\pi} [\cos(\nu\pi) + \cos(-\nu\pi)] \right\} .$$

Wegen $\sin(\nu\pi) = \sin(-\nu\pi) = 0$ und $\cos(\nu\pi) = \cos(-\nu\pi) = (-1)^\nu = -(-1)^{\nu+1}$ erhält man schließlich

$$b_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{2\hat{u}}{\nu\pi} .$$

Hieraus folgt für $\nu = 1$ die Amplitude der Grundschiwingung $b_1 = \hat{u}_1 = (2/\pi)\hat{u}$ und entsprechend Gl. (5.42) ihr Effektivwert

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{b_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\hat{u}}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \hat{u} .$$

Der Effektivwert der Gesamtschiwingung ergibt sich mit Gl. (5.18) zu

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} \left(\frac{2\hat{u}}{T} \right)^2 t^2 dt} = \sqrt{\frac{4\hat{u}^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} T \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} T \right)^3 \right]} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} .$$

Hieraus folgt mit Gl. (9.32) der Grundschiwingungsgehalt

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \approx 0,7797$$

und mit Gl. (9.33) der Klirrfaktor

$$k_u = \sqrt{1 - g_u^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \approx 0,6262 = 62,62\% .$$

Die berechneten Werte von Grundschiwingungsgehalt und Klirrfaktor sind Naturkonstanten und gelten für alle symmetrischen Sägezahn-schiwingungen – unabhängig von ihren Scheitelwerten und Periodendauern.

Beispiel 9.4: Fourier-Reihe und Klirrfaktor einer symmetrischen Rechteckschwingung

Für eine symmetrische Rechteckspannung $u(t)$ mit der Periodendauer T , die beschrieben wird durch $u(-T/2 < t < 0) = -\hat{u}$, $u(0 < t < T/2) = \hat{u}$ sind die Fourier-Reihe und der Klirrfaktor gesucht.

Die Funktion ist ungerade und alternierend. Nach Tabelle 9.2 gilt daher $a_0 = 0$, $a_\nu = 0$, $b_{2\nu} = 0$.

Die Koeffizienten $b_{2\nu-1}$ werden mit Gl. (9.21) berechnet. Der Ansatz

$$b_\nu = \frac{2}{T} \left[\int_{-0,5T}^0 -\hat{u} \sin(\nu \omega t) dt + \int_0^{0,5T} \hat{u} \sin(\nu \omega t) dt \right]$$

führt zu

$$b_\nu = \frac{2\hat{u}}{T} \left[\int_{-0,5T}^0 \sin(\nu \omega t) dt - \int_0^{0,5T} \sin(\nu \omega t) dt \right].$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wie erwartet, für alle geradzahigen ν . Nur für ungeradzahige ν ist der Term in den eckigen Klammern gleich dem Integral über den Betrag einer Sinusschwingung:

$$b_{2\nu-1} = \frac{2\hat{u}}{T} \left[\int_0^{T/(2\nu-1)} |\sin((2\nu-1)\omega t)| dt \right]$$

Daraus folgt

$$b_{2\nu-1} = \frac{2\hat{u}}{T} \frac{4}{(2\nu-1)\omega} = \frac{2\hat{u}}{T} \frac{2T}{(2\nu-1)\pi} = \frac{4\hat{u}}{(2\nu-1)\pi}$$

und somit die gesuchte Fourier-Reihe

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu-1} \sin((2\nu-1)\omega t).$$

Die Amplitude der Grundschwingung ist $\hat{u}_1 = 4\hat{u}/\pi$ und ihr Effektivwert

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}\pi} \hat{u}.$$

Der Effektivwert der Gesamtschwingung ist $U = \hat{u}$.

Hieraus folgt der Klirrfaktor

$$k_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} = \sqrt{1 - \left(\frac{U_1}{U}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{2}\pi}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \approx 0,4352 = 43,52\%.$$

Dieser Klirrfaktor ist eine Naturkonstante und gilt für alle symmetrischen Rechteckschwingungen – unabhängig von ihren Scheitelwerten und Periodendauern.

9.1.4 Nichtsinusförmige Wechselgrößen in linearen Netzwerken

Die in den Kapiteln 2 bis 4 hergeleiteten Beziehungen zwischen den Klemmengrößen für die linearen, zeitinvarianten Grundzweipole R , C und L gelten für beliebige Zeitfunktionen. In Tabelle 9.3 sind diese Gleichungen zusammengestellt. Man erkennt, dass die in Tabelle 5.4 aufgeführten dualen Entsprechungen zwischen Spannung und Strom, Induktivität und Kapazität sowie zwischen Widerstand und Leitwert auch für beliebige zeitliche Verläufe von Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ gültig sind.

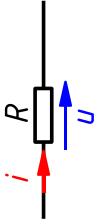
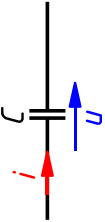
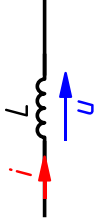
Die Anwendung der in Kapitel 5 eingeführten komplexen Rechnung ist jedoch für nichtsinusförmige Wechselgrößen nur noch mit der Einschränkung zulässig, dass diese zuvor nach Abschnitt 9.1.2 in ihre harmonischen Anteile unterschiedlicher Frequenz zerlegt und diese Anteile *einzelnen* behandelt werden. Für die jeweilige Ausgangsgröße (Spannung oder Strom) erhält man dann im Allgemeinen einen Kurvenverlauf, dessen Form von dem der Eingangsgröße (Strom oder Spannung) abweicht, weil die einzelnen Frequenzanteile in der Ausgangsgröße mit anderer Gewichtung und Phasenlage enthalten sind als in der Eingangsgröße.

9.1.4.1 Lineare Verzerrungen

Die in Tabelle 9.3 zusammengestellten Zweipole bezeichnet man als lineare, zeitinvariante Zweipole, sofern sie jeweils durch einen Wert R bzw. C bzw. L beschrieben werden können, der sich weder in Abhängigkeit von den Klemmengrößen u und i (Linearität) noch der Zeit t (Zeitinvarianz) ändert, vgl. Abschnitt 2.1.2.6.

Wenn in *linearen* Netzwerken Ein- und Ausgangsgrößen unterschiedliche Kurvenformen haben, bezeichnet man dies als *lineare Verzerrung*. Die Ausgangsgröße enthält dann ausschließlich Frequenzanteile (spektrale Komponenten), die schon in der Eingangsgröße enthalten sind. Weiterhin ändert sich die Kurvenform der Ausgangsgröße nicht, wenn man die Eingangsgröße bei gleichbleibender Kurvenform vergrößert oder verkleinert; vielmehr führt wegen der Linearität eine Multiplikation der Eingangsgröße mit einem konstanten positiven oder negativen Faktor zu einer Multiplikation der Ausgangsgröße mit demselben Faktor (vgl. Abschnitt 2.4.1.1).

Tabelle 9.3: Beziehungen zwischen Strom und Spannung an den passiven Grundzweipolen linearer Wechselstromnetzwerke

Widerstand	Kapazität	Induktivität
		
$u(t) = R i(t) \quad (9.39)$ $i(t) = \frac{1}{R} u(t) \quad (9.42)$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\vartheta) d\vartheta + u(t_0) \quad (9.40)$ $i(t) = C \frac{du}{dt} \quad (9.43)$	$u(t) = L \frac{di}{dt} \quad (9.41)$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\vartheta) d\vartheta + i(t_0) \quad (9.44)$

Betrachtet man als Eingangsgröße den Strom $i(t)$ durch eine Induktivität L oder die Spannung $u(t)$ an einer Kapazität C , erhält man nach Tabelle 9.3 die jeweilige Ausgangsgröße $u(t)$ bzw. $i(t)$ durch zeitliche Differenziation. Wenn die Eingangsgröße in Form einer Fourier-Reihe nach Gl. (9.1) dargestellt wird, ergibt sich für die ν -te Teilschwingung nach Gl. (9.2)

$$\frac{d}{dt} A_\nu \sin(\nu \omega t + \varphi_\nu) = \nu \omega A_\nu \cos(\nu \omega t + \varphi_\nu), \quad (9.45)$$

also eine Multiplikation der Teilschwingungsamplitude A_ν mit dem Faktor $\nu \omega$. Die höherfrequenten Anteile sind in der Ausgangsgröße also relativ stärker enthalten als in der Eingangsgröße.

Betrachtet man hingegen die Spannung $u(t)$ an einer Induktivität L oder den Strom $i(t)$ durch eine Kapazität C als Eingangsgröße, erhält man nach Tabelle 9.3 die jeweilige Ausgangsgröße $i(t)$ bzw. $u(t)$ durch zeitliche Integration. In der Fourier-Reihe ergibt sich für die ν -te Teilschwingung

$$\int A_\nu \sin(\nu \omega t + \varphi_\nu) dt = \frac{A_\nu}{\nu \omega} [-\cos(\nu \omega t + \varphi_\nu)], \quad (9.46)$$

also eine Division der Teilschwingungsamplitude A_ν durch $\nu \omega$. Die höherfrequenten Anteile sind in der Ausgangsgröße also relativ schwächer enthalten als in der Eingangsgröße.

Als Beispiel wird eine symmetrische dreieckförmige Wechselspannung $u(t)$ betrachtet, die nach Bild 9.5b an der Kapazität C den rechteckförmigen Strom $i(t) = C du/dt$ mit beträchtlichen Oberschwingungsanteilen verursacht (Bild 9.3). Hingegen führt dieselbe Spannung u an der Induktivität L in Bild 9.5c zu dem Strom $i(t) = (1/L) \int u dt$, dessen Halbschwingungen Parabelbögen sind und den hohen Anteil erkennen lassen, den die Grundschwingung $-\cos(\omega t)$ am Gesamtverlauf hat.

9.1.4.2 Differenziation und Integration nichtsinusförmiger Wechselgrößen

Die in Tabelle 9.3 zusammengestellten Gleichungen gelten für beliebige Zeitfunktionen und können auf nichtsinusförmige Wechselgrößen auch ohne vorherige Fourier-Zerlegung angewandt werden, wie am folgenden Beispiel 9.5 gezeigt wird.

Beispiel 9.5: Nichtsinusförmige Wechselgrößen an elementaren Zweipolen

Gesucht sind der Strom $i(t)$ und die Augenblicksleistung $p(t)$, die auftreten, wenn eine symmetrische dreieckförmige Wechselspannung $u(t)$ nach Bild 9.5

- an einen Widerstand R ,
- an eine Kapazität C ,
- an eine Induktivität L angelegt wird.

Da sich die Vorgänge nach Ablauf einer Periodendauer T wiederholen, genügt es, den Zeitraum $-0,25T < t < 0,75T$ zu betrachten. Im Zeitintervall $-0,25T < t < 0,25T$ folgt die Spannung der Funktion

$$u(t) = 4 \hat{u} \frac{t}{T}.$$

Für das Zeitintervall $0,25T < t < 0,75T$ gilt entsprechend

$$u(t) = -4\hat{u} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right).$$

- a) An einem Ohmschen Widerstand R ist nach Gl. (9.42) der Strom $i(t)$ der Spannung $u(t)$ proportional.

$$\begin{aligned} \text{Man erhält für } -0,25T < t < 0,25T : \quad i(t) &= \frac{u(t)}{R} = \frac{4\hat{u}}{R} \frac{t}{T} \\ \text{und für } 0,25T < t < 0,75T : \quad i(t) &= \frac{u(t)}{R} = -\frac{4\hat{u}}{R} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

also den in Bild 9.5a gezeigten Verlauf. Für die Augenblicksleistung $p(t)$ folgt mit Gl. (5.143) für $-0,25T < t < 0,25T$

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{16\hat{u}^2}{R} \frac{t^2}{T^2}$$

und für $0,25T < t < 0,75T$

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{16\hat{u}^2}{R} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Beide Funktionen beschreiben Parabelbögen, wie in Bild 9.5a dargestellt. Für $t = 0,25T$ liefern sie denselben Wert $p = \hat{u}^2/R$. Die Augenblicksleistung p wird zu keinem Zeitpunkt negativ, weil elektrische Energie einem Wirkwiderstand nur zugeführt, nicht aber wieder zurückgewonnen werden kann.

- b) Der Strom an einer Kapazität C ergibt sich nach Gl. (9.43) für $-0,25T < t < 0,25T$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{4C\hat{u}}{T}$$

und für $0,25T < t < 0,75T$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -\frac{4C\hat{u}}{T}.$$

Man erhält also den in Bild 9.5b gezeigten rechteckförmigen Stromverlauf. Für die Augenblicksleistung $p(t)$ folgt mit Gl. (5.143) für $-0,25T < t < 0,25T$

$$p = u(t) i(t) = \frac{16C\hat{u}^2}{T} \frac{t}{T}$$

und für $0,25T < t < 0,75T$

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{16C\hat{u}^2}{T} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right).$$

Für $t = 0,25 T$ liefert die eine Funktion den Wert $+4 C \hat{u}^2 / T$ und die andere $-4 C \hat{u}^2 / T$. Dieser abrupte Vorzeichenwechsel rührt daher, dass auch der Strom $i(t)$ zu diesem Zeitpunkt sein Vorzeichen ändert. Zwischen den Vorzeichenwechseln verläuft die Augenblicksleistung linear, hat also den in Bild 9.5b dargestellten sägezahnförmigen Verlauf. Viertelperioden positiver Augenblicksleistung wechseln mit solchen negativer Augenblicksleistung in der Weise ab, dass die der Kapazität während einer Viertelperiode zugeführte Energie während der nächsten Viertelperiode wieder vollständig abgegeben wird.

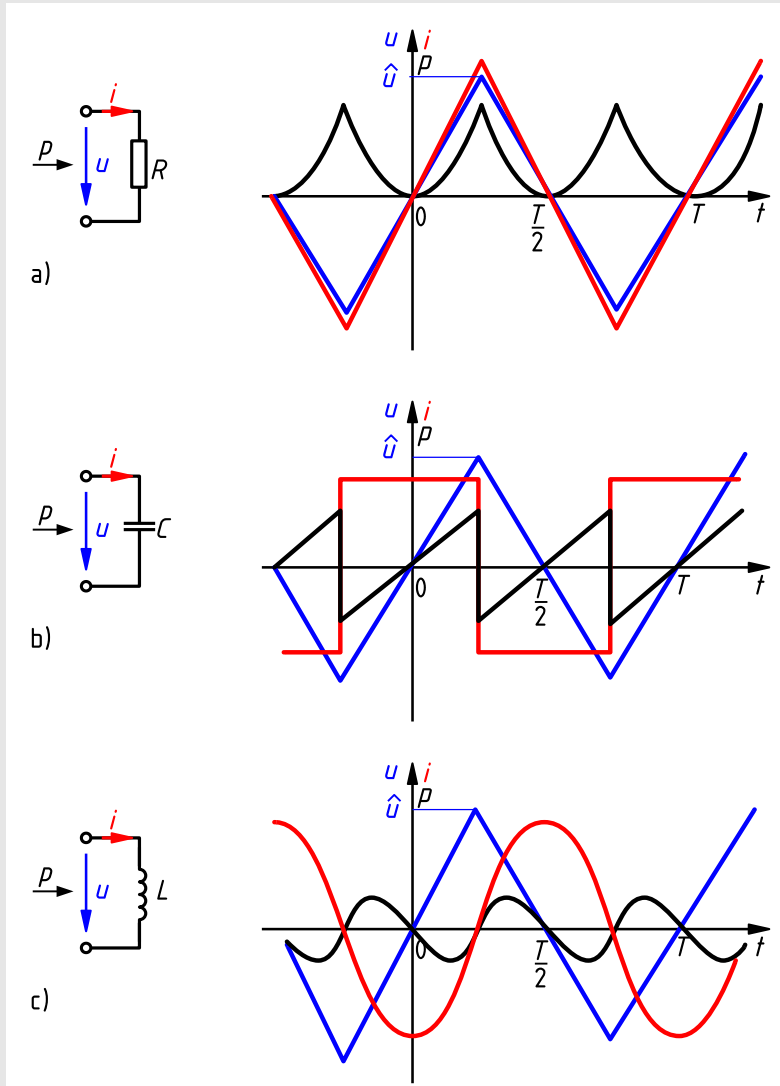


Bild 9.5: Strom $i(t)$ und Augenblicksleistung $p(t)$ an den passiven Grundzweipolen bei angelegter symmetrischer dreieckförmiger Wechselspannung

- c) An einer Induktivität L ergibt sich der Strom $i(t)$ nach Gl. (9.44) für $-0,25 T < t < 0,25 T$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int 4 \hat{u} \frac{t}{T} dt = \frac{2 \hat{u} T}{L} \left(\frac{t^2}{T^2} + k_1 \right)$$

und für $0,25 T < t < 0,75 T$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int (-4 \hat{u}) \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{2 \hat{u} T}{L} \left(\frac{t^2}{T^2} - \frac{t}{T} + k_2 \right).$$

Für $t = 0,25 T$ müssen beide Funktionen denselben Wert liefern, da ein abrupter Stromsprung nach Gl. (9.41) eine unendlich hohe Spannung erfordern würde. Wegen der Symmetrie der Funktion muss dieser Wert $i(t = 0,25 T) = 0$ sein. Hieraus folgen die beiden Integrationskonstanten $k_1 = -1/16$ und $k_2 = 3/16$. Damit erhält man den Strom für $-0,25 T < t < 0,25 T$

$$i(t) = \frac{2 \hat{u} T}{L} \left(\frac{t^2}{T^2} - \frac{1}{16} \right)$$

und für $0,25 T < t < 0,75 T$

$$i(t) = -\frac{2 \hat{u} T}{L} \left[\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \right].$$

Der Stromverlauf lässt sich also, wie in Bild 9.5c gezeigt, durch aneinandergesetzte Parabelbögen darstellen. Für die Augenblicksleistung $p(t)$ folgt mit Gl. (5.143) für $-0,25 T < t < 0,25 T$

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{8 \hat{u}^2 T}{L} \left(\frac{t^3}{T^3} - \frac{1}{16} \frac{t}{T} \right)$$

und für $0,25 T < t < 0,75 T$

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{8 \hat{u}^2 T}{L} \left[\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1}{16} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Ihr Verlauf ist in Bild 9.5c dargestellt. Auch hier wechseln Viertelperioden positiver Augenblicksleistung mit solchen negativer Augenblicksleistung in der Weise ab, dass die der Induktivität während einer Viertelperiode zugeführte Energie während der nächsten Viertelperiode wieder vollständig abgegeben wird.

Beispiel 9.6: Fourier-Koeffizienten einer symmetrischen Dreieckschwingung

Mit Hilfe der Ergebnisse der Beispiele 9.2 und 9.5b sollen die Fourier-Koeffizienten der symmetrischen dreieckförmigen Wechselspannung nach Bild 9.5 ermittelt werden.

Beispiel 9.5b und Bild 9.6b zeigen, dass die symmetrische Dreiecksspannung mit dem Scheitelwert \hat{u} an der Kapazität C einen rechteckförmigen Strom mit dem Scheitelwert $\hat{i} = 4 C \hat{u}/T$ hervorruft. Die Fourier-Koeffizienten dieses Stroms sind nach Beispiel 9.2

$$a_\nu = \frac{4 \hat{i}}{\nu \pi} \sin \frac{\nu \pi}{2} = \frac{16 C \hat{u}}{\nu \pi T} \sin \frac{\nu \pi}{2}.$$

Wegen $a_0 = 0$ und $b_\nu = 0$ lässt sich der Strom mit Gl. (9.22) als

$$i(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{16 C \hat{u}}{\nu \pi T} \sin \frac{\nu \pi}{2} \cos(\nu \omega t)$$

darstellen. Mit Gl. (9.40) erhält man hieraus die dreieckförmige Spannung

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt = \frac{1}{C} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{16 C \hat{u}}{\nu \pi T} \sin \frac{\nu \pi}{2} \int \cos(\nu \omega t) \, dt$$

und nach Lösen des Integrals sowie unter Berücksichtigung von $\omega = 2\pi/T$

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{16 \hat{u}}{\nu \pi T} \frac{1}{\nu \omega} \sin \frac{\nu \pi}{2} \sin(\nu \omega t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8 \hat{u}}{\nu^2 \pi^2} \sin \frac{\nu \pi}{2} \sin(\nu \omega t).$$

Der Vergleich mit Gl. (9.22) ergibt für die Fourier-Koeffizienten der Dreiecksspannung

$$a_0 = 0, \quad a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{8 \hat{u}}{\nu^2 \pi^2} \sin \frac{\nu \pi}{2}.$$

9.2 Nichtlineare Wechselstromnetzwerke

Ein nichtlineares Wechselstromnetzwerk enthält mindestens ein Schaltungselement, dessen Parameter (z. B. R , L , C) von seiner Klemmenspannung bzw. seinem Klemmenstrom abhängig ist. Nichtlineare Bauelemente sind u. a. alle Halbleiterbauelemente (z. B. Dioden, Gleichrichter, Transistoren), spannungsabhängige Widerstände und stromabhängige Induktivitäten.

9.2.1 Nichtlineare Verzerrungen

Eine nichtlineare Schaltung, die mit einem sinusförmigen Eingangssignal angeregt wird, erzeugt ein Ausgangssignal mit Frequenzanteilen, die im Eingangssignal nicht enthalten sind. Diese neuen spektralen Komponenten bezeichnet man als *nichtlineare Verzerrungen*.

Die Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes, wie sie z. B. in Bild 9.6a dargestellt ist, kann nach dem in Abschnitt 9.1.1.2 vorgestellten Verfahren durch ein Polynom

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu U^\nu \tag{9.47}$$

approximiert werden. Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs kann eine Änderung der Spannung U nicht zu einer proportionalen Änderung des Stroms I führen. Die sich ergebenden Verzerrungen sind daher nichtlinear. Wenn der Widerstand an die Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ angeschlossen wird, verursachen die einzelnen Augenblickswerte der Spannung $u(t)$ entsprechend Gl. (9.47) Augenblickswerte des Stroms $i(t)$, die in Bild 9.6c punktwise ermittelt sind und zu einem verzerrten Stromverlauf führen.

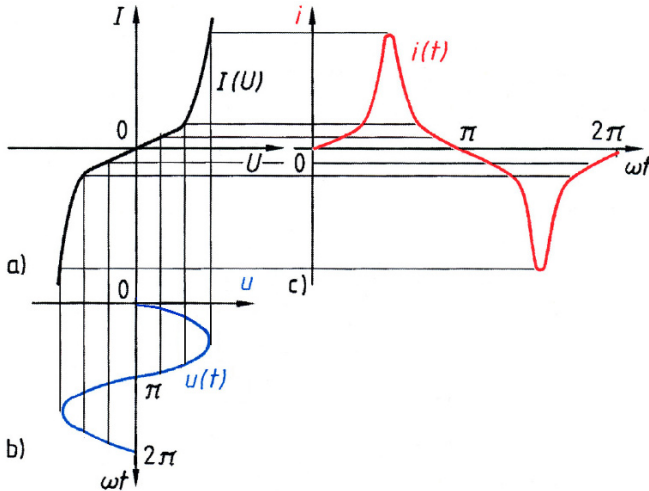


Bild 9.6: Nichtlinearer Widerstand an Sinusspannung mit Kennlinie (a), Spannungsverlauf (b) und Stromverlauf (c)

Wenn man das Polynom in Gl. (9.47) auf die drei Glieder

$$i(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + a_3 u^3(t) \quad (9.48)$$

beschränkt, erhält man bei sinusförmiger Aussteuerung den Strom

$$i(t) = a_1 \hat{u} \sin(\omega t) + a_2 \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) + a_3 \hat{u}^3 \sin^3(\omega t)$$

bzw. wegen $\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$ und $\sin^3 x = \frac{1}{4}[3 \sin x - \sin(3x)]$

$$i = \frac{a_2}{2} \hat{u}^2 + \left(a_1 + \frac{3}{4} a_3 \hat{u}^2\right) \hat{u} \sin(\omega t) - \frac{a_2}{2} \hat{u}^2 \cos(2\omega t) - \frac{a_3}{4} \hat{u}^3 \sin(3\omega t).$$

Außer der Grundschwingung mit der Kreisfrequenz ω treten in diesem Fall noch ein Gleichanteil sowie eine zweite und dritte Harmonische auf.

Solche Erscheinungen zeigen z. B. Halbleiterbauelemente (Abschnitt 10.4), da ihre Kennlinien ausnahmslos nichtlinear sind. Zur rechnerischen Behandlung empfiehlt sich eine Annäherung dieser Funktionen durch Polynome wie in Gl. (9.47).

Beispiel 9.7: Nichtlineare Verzerrungen an einem Varistor

Ein spannungsabhängiger Widerstand (Varistor) hat eine Kennlinie der Form $I = cU^3$.

Für den Betrieb an einer Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ sind der Stromverlauf und der durch den Varistor verursachte Klirrfaktor k_i des Stroms zu berechnen.

Wegen $\sin^3 x = \frac{1}{4}[3 \sin x - \sin(3x)]$ ergibt sich der verzerrte Strom

$$i(t) = c u^3(t) = c \hat{u}^3 \sin^3(\omega t) = \frac{1}{4} c \hat{u}^3 [3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)].$$

Zusätzlich zur Grundschwingung ist also die dritte Harmonische entstanden. Nach den Gln. (9.33) und (9.28) ist der Klirrfaktor des Stroms

$$k_i = \frac{I_3}{I} = \frac{I_3}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2}} = \frac{\hat{i}_3}{\sqrt{\hat{i}_1^2 + \hat{i}_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 0,316 = 31,6\%.$$

9.2.2 Gleichrichterschaltungen

Ein elektrisches Ventil, das im einfachsten Fall eine Diode ist, lässt den elektrischen Strom im Wesentlichen nur in einer Richtung passieren (Abschnitt 10.5.2.2). Es wird insbesondere zur Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom verwendet.

Für die Gleichrichtung werden verschiedene Schaltungen eingesetzt, die mit steigendem Aufwand an Bauelementen (z. B. Anzahl der Ventile, Transformator, Glättungsmittel) auch steigenden Ansprüchen genügen. In Tabelle 9.4 sind die vier wichtigsten Schaltungen dargestellt. Sie werden nach der *Pulszahl* p unterschieden, die die Anzahl der aufeinander folgenden Kommutierungen (Übergehen des Stroms von einem zum anderen Ventil) während einer Periode T bezeichnet.

Es wird vorausgesetzt, dass *ideale Übertrager* und *ideale Gleichrichter* benutzt werden, die für die Durchlassrichtung den Innenwiderstand $R_i = 0$ und für die Sperrrichtung entsprechend $R_i \rightarrow \infty$ aufweisen. Die Schaltungen liegen jeweils an einer Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ mit dem Scheitelwert \hat{u} und der Kreisfrequenz ω bzw. der Periodendauer $T = 1/f = 2\pi/\omega$.

Die gleichgerichtete Spannung $u_d(t)$ verläuft dann periodisch und lässt sich nach Tabelle 9.1 durch eine Fourier-Reihe beschreiben, die in Tabelle 9.4 angegeben ist. Dabei treten als Teil-schwingungszahlen ν nur ganzzahlige Vielfache von p auf.

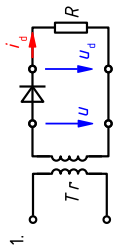
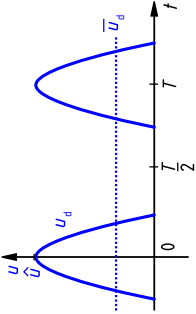
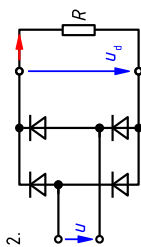
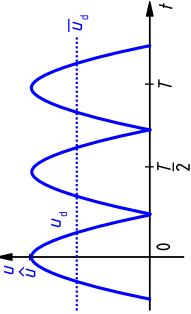
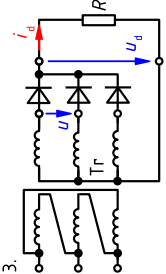
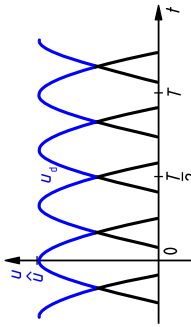
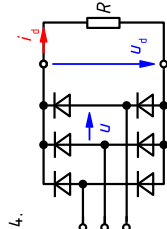
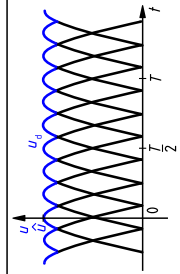
Arithmetischer Mittelwert $\overline{u_d}$ der gleichgerichteten Spannung und Gleichrichtwert $\overline{|u_d|}$ sind wegen $u_d(t) \geq 0$ für alle t identisch (Abschnitt 5.1.6). Scheitelfaktor ξ und Formfaktor F (Abschnitt 5.1.8) können aus Tabelle 9.4 entnommen werden.

Zur Kennzeichnung der Qualität einer Gleichrichtung wird das Verhältnis von Wechselspannungsanteil U_{\sim} zu linearem Mittelwert $\overline{u_d}$ benutzt, das man als *Welligkeit*

$$w = \frac{U_{\sim}}{\overline{u_d}} = \frac{1}{\overline{u_d}} \sqrt{U_d^2 - \overline{u_d}^2} = \sqrt{F^2 - 1} \quad (9.49)$$

bezeichnet (siehe Abschnitt 9.1.3.2). Die in Tabelle 9.4 angegebenen Gleichungen gelten auch für den Strom $i_d(t)$, wenn Ohmsche Widerstände R als Belastung angenommen werden.

Tabelle 9.4: Gleichrichterschaltungen mit Spannungsverlauf und Kennwerten

Schaltung	Spannung	Fourier-Reihe, Kennwerte
<p>1.</p> 		$\frac{u_d}{\hat{u}} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)^2 - 1} \cos(2\mu \omega t)$ <p>(Teilschwingungszahlen $\nu = 1$ und $\nu = 2\mu$) $p = 1, w = 1,211, \xi = 2, F = 1,5708$</p>
<p>2.</p> 		$\frac{u_d}{\hat{u}} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)^2 - 1} \cos(2\mu \omega t) \right]$ <p>(Teilschwingungszahlen $\nu = 2\mu$) $p = 2, w = 0,483, \xi = 1,4142, F = 1,1107$</p>
<p>3.</p> 		$\frac{u_d}{\hat{u}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(3\mu)^2 - 1} \cos(3\mu \omega t) \right]$ <p>(Teilschwingungszahlen $\nu = 3\mu$) $p = 3, w = 0,183, \xi = 1,1895, F = 1,0166$</p>
<p>4.</p> 		$\frac{u_d}{\hat{u}} = \frac{6}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(6\mu)^2 - 1} \cos(6\mu \omega t) \right]$ <p>(Teilschwingungszahlen $\nu = 6\mu$) $p = 6, w = 0,042, \xi = 1,0463, F = 1,0009$</p>

Die 1. Schaltung in Tabelle 9.4 wird als *Einweggleichrichterschaltung* bezeichnet. Wenn der Gleichstrom vom Wechselstromnetz ferngehalten werden soll, muss als Eingang ein Transformator Tr vorgesehen werden. (Dieser muss auch für den sekundären Gleichrichterstrom thermisch bemessen sein.)

Die 2. Schaltung gibt eine Einphasen-Brückenschaltung wieder, die eine *Zweiweggleichrichtung* ermöglicht.

Die 3. Schaltung ist eine *Dreiphasen-Mittelpunktschaltung*. Der Sternpunkt des sekundär im Stern geschalteten Eingangstransformators Tr ist mit dem Verbraucher R verbunden. Primär muss der Dreiphasentransformator im Dreieck geschaltet sein, um den unsymmetrischen Belastungen durch die Gleichrichter gewachsen zu sein. Von den parallel liegenden Gleichrichterventilen führt nur jeweils dasjenige mit der größten Spannung auch den Strom. Das Übergehen des Stroms von einem zum anderen Ventil nennt man *Kommutierung*. Auf diese Weise entsteht hier eine dreipulsige Gleichrichtung.

Die 4. Schaltung ist eine *sechspulsige Dreiphasen-Brückenschaltung*.

Aus den Werten von Tabelle 9.4 ist zu ersehen, dass mit steigender Pulszahl p die *Welligkeit* w geringer wird und sowohl der Formfaktor F als auch der Scheitelfaktor ξ sich dem Wert 1 nähern. Bevorzugt werden daher Brückenschaltungen. Nur in Ausnahmefällen wird die Einweggleichrichtung eingesetzt.

Beispiel 9.8: Dimensionierung einer Glättungsdrossel

Eine Einphasen-Brückenschaltung mit den Kennwerten von Tabelle 9.4 liegt bei der Frequenz $f = 50$ Hz an einer Sinusspannung mit dem Effektivwert $U = 220$ V. Durch eine vor den Verbraucherwiderstand $R = 100 \Omega$ geschaltete Induktivität L soll die 2. Harmonische des Stroms auf $I_2 = 0,1 \bar{i}_d$ begrenzt werden.

Für welche Kennwerte muss diese Glättungsdrossel bemessen sein?

Bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle in den Gleichrichterventilen ist nach Tabelle 9.4 der lineare Mittelwert der Spannung

$$\bar{u}_d = \frac{2 \hat{u}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2} U}{\pi} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 220 \text{ V}}{\pi} = 198 \text{ V}$$

wirksam und es tritt der lineare Mittelwert des Stroms

$$\bar{i}_d = \frac{\bar{u}_d}{R} = \frac{198 \text{ V}}{100 \Omega} = 1,98 \text{ A}$$

auf. Die 2. Harmonische der gleichgerichteten Spannung hat nach Tabelle 9.4 mit $\nu = 2$, also $\mu = 1$ den Scheitelwert

$$\hat{u}_2 = \frac{4 \hat{u}}{\pi(4\mu^2 - 1)} = \frac{4 \hat{u}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2} U}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 220 \text{ V}}{3\pi} = 132 \text{ V.}$$

Ohne Glättungsdrossel würde diese Spannung den Strom

$$I'_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}R} = \frac{132 \text{ V}}{\sqrt{2} \cdot 100 \Omega} = 0,934 \text{ A}$$

bewirken. Es soll aber nur der Strom

$$I_2 = \frac{U_2}{\sqrt{R^2 + (2\omega L)^2}} = \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R^2 + (2\omega L)^2}} = 0,1 \bar{i}_d = 0,1 \cdot 1,98 \text{ A} = 0,198 \text{ A}$$

fließen. Umstellen dieser Gleichung liefert die erforderliche Induktivität

$$L = \frac{1}{4\pi f} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2}{I_2} \right)^2 - R^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{132 \text{ V}}{0,198 \text{ A}} \right)^2 - 100^2 \Omega^2} = 0,733 \text{ H}.$$

Die Glättungsdrossel muss für den Strom

$$I \approx \sqrt{\bar{i}_d^2 + I_2^2} = \sqrt{1,981^2 + 0,1981^2} \text{ A} \approx 2,0 \text{ A}$$

ausgelegt werden.

9.2.3 Spule mit ferromagnetischem Kern (Eisendrossel)

Eine Spule mit ferromagnetischem Kern (*Eisendrossel*) nimmt an einer Sinusspannung wegen der nichtlinearen und nicht eindeutigen Hystereseschleife $B(H)$ einen verzerrten *Magnetisierungsstrom* auf.

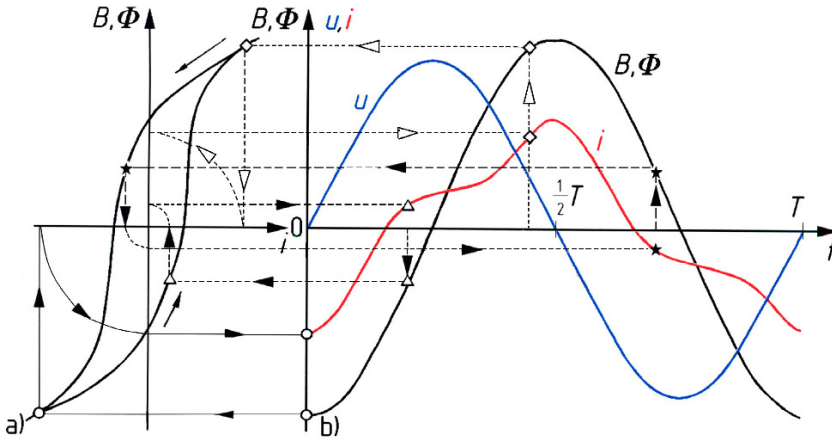


Bild 9.7: Hystereseschleife (a) einer Drossel mit Eisenkern und großen Eisenverlusten sowie Zeitdiagramm (b) von Spannung $u(t)$, magnetischer Flussdichte $B(t)$ und Strom $i(t)$

In Bild 9.7a ist die (mit Sinusstromerregung aufgenommene) Hystereseschleife einer Eisendrossel dargestellt. Die Kupferverluste in der Spule werden vernachlässigt. Trägt man an einer Spule die u - und i -Zählpfeile im Verbraucher-Zählpfeilsystem an, ergibt sich nach Bild 4.51 eine links-wendige Zuordnung der Zählpfeile für die Spannung u und den magnetischen Fluss Φ und es

gilt im Gegensatz zu Gl. (4.99) das Induktionsgesetz mit positivem Vorzeichen. Damit ergeben sich für eine angelegte Sinusspannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) = +N \frac{d\Phi}{dt}$$

der Fluss $\Phi(t)$ und die Flussdichte

$$B(t) \sim \Phi(t) = \frac{1}{N} \int \hat{u} \sin(\omega t) dt = \frac{\hat{u}}{\omega N} [-\cos(\omega t)],$$

die den in Bild 9.7b gezeigten, gegenüber der Spannung $u(t)$ um $T/4$ nacheilenden sinusförmigen Verlauf haben.

Für eine eingeprägte sinusförmige Klemmenspannung $u(t)$ und die daraus folgende Flussdichte $\Phi(t)$ gemäß Bild 9.7b kann man folgendermaßen punktweise den zeitlichen Verlauf des Klemmenstroms $i(t)$ bestimmen: Von der zu einem betrachteten Zeitpunkt t gehörenden magnetischen Flussdichte $B(t)$ in Bild 9.7b findet man über den zugehörigen Punkt auf der Hystereseschleife in Bild 9.7a den Strom $i(t)$. Die zum Strom gehörende Strecke wird um 90° in mathematisch positiver Richtung gedreht und in das Zeitdiagramm in Bild 9.7b übertragen. In Bild 9.7 ist dies exemplarisch für drei Zeitpunkte dargestellt.

Die Fläche der Hystereseschleife stellt nach Abschnitt 4.3.2.1 ein Maß für die *Ummagnetisierungsverluste* P_{Fe} dar. Diese führen in Bild 9.7b zu einer verzerrten, unsymmetrischen Stromkurve $i(t)$, die hinsichtlich ihrer Nulldurchgänge gegenüber $u(t)$ um weniger als $T/4$ nacheilt. Sie ist im Sinne der Tabelle 9.2 alternierend und enthält daher nur ungeradzahlige Harmonische.

9.2.4 Leistung bei nicht sinusförmigen Klemmengrößen

9.2.4.1 Nichtsinusförmige Spannungen und Ströme

Haben Wechselspannung $u(t)$ und Wechselstrom $i(t)$ an den Klemmen eines Zweipols mit Verbraucher-Zählpeilsystem nichtsinusförmige Verläufe, lassen sich diese mit Gl. (9.22) und Gl. (9.2) als

$$u(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \hat{u}_{\mu} \sin(\mu \omega t + \varphi_{u\mu}), \quad (9.50)$$

$$i(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{i}_{\nu} \sin(\nu \omega t + \varphi_{i\nu}) \quad (9.51)$$

darstellen. Mit Gl. (5.144) erhält man für die vom Zweipol aufgenommene Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) i(t) dt \quad (9.52)$$

eine Summe von Integralausdrücken des Typs

$$\frac{\hat{u}_{\mu} \hat{i}_{\nu}}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(\mu \omega t + \varphi_{u\mu}) \sin(\nu \omega t + \varphi_{i\nu}) dt.$$

Unter Verwendung von Gl. (9.17) lässt sich zeigen, dass nur die Terme mit $\mu = \nu$ von null verschiedene Werte haben. Sie bezeichnen jeweils die mit der ν -ten Teilschwingung verbundene Wirkleistung

$$P_\nu = \frac{1}{2} \hat{u}_\nu \hat{i}_\nu \cos(\varphi_{u\nu} - \varphi_{i\nu}) = U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu. \quad (9.53)$$

Damit ergibt sich die gesamte Wirkleistung

$$P = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu. \quad (9.54)$$

Wenn Spannung und Strom Mischgrößen sind, ist zusätzlich die aus den Gleichanteilen U_- und I_- gebildete Gleichleistung $P_- = U_- I_-$ zu berücksichtigen.

9.2.4.2 Nichtlineare Zweipole an Sinusspannung

Wie Bild 9.6 exemplarisch zeigt, fließt durch einen nichtlinearen Zweipol, der an eine Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ gelegt wird, ein verzerrter, Oberschwingungshaltiger Strom $i(t)$. Da die Spannung $u(t)$ keine Oberschwingungen aufweist, folgt nach Gl. (9.54) für die *Wirkleistung*

$$P = P_1 = U I_1 \cos \varphi_1. \quad (9.55)$$

Hierin sind I_1 der Effektivwert der Stromgrundschwingung und φ_1 der Phasenverschiebungswinkel der Spannung gegen die Stromgrundschwingung. *Die im Strom enthaltenen Oberschwingungen liefern also keinen Beitrag zur Wirkleistung.*

Nach der Definition Gl. (5.145) ergibt sich mit Gl. (9.28) allgemein für die *Scheinleistung*

$$S = U I = U \sqrt{I_-^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu^2} \quad (9.56)$$

und für den Fall $I_- = 0$, d. h. wenn der Strom $i(t)$ ein Wechselstrom ist,

$$S = U I = U \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu^2}. \quad (9.57)$$

In Analogie zu den linearen Sinusstromnetzwerken definiert man nach [dind] die *Blindleistung* als

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2}. \quad (9.58)$$

Hieraus folgt mit den Gln. (9.55) und (9.57), wenn man den Summanden mit $\nu = 1$ separat schreibt,

$$|Q| = \sqrt{U^2 I_1^2 + U^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} I_\nu^2 - U^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1} = \sqrt{(U I_1 \sin \varphi_1)^2 + U^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} I_\nu^2} = \sqrt{Q_1^2 + Q_{\text{dist}}^2}. \quad (9.59)$$

Die beiden hierin enthaltenen Bestandteile sind die *Grundswingungs-Blindleistung*

$$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1 \tag{9.60}$$

und die *Verzerrungs-Blindleistung*¹

$$Q_{\text{dist}} = U \sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} I_{\nu}^2}. \tag{9.61}$$

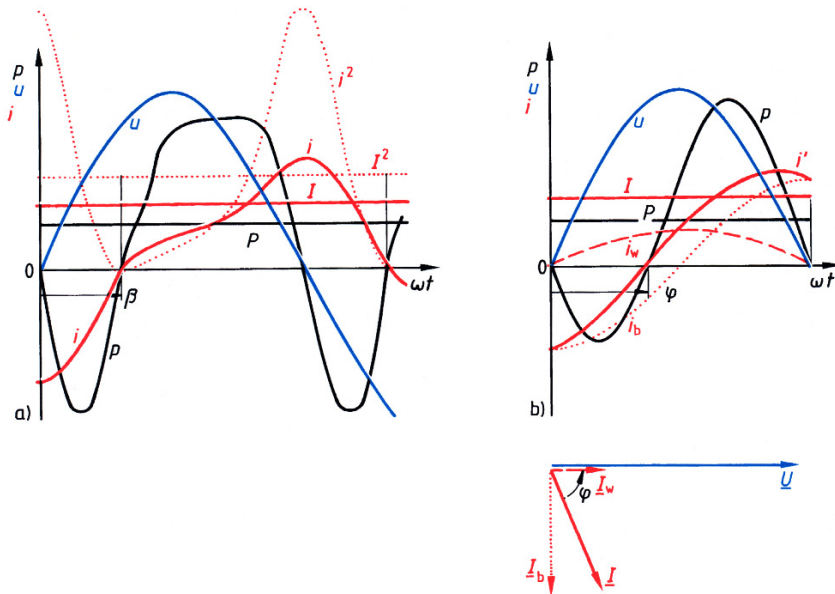


Bild 9.8: Spannungs-, Strom- und Leistungsverlauf einer Eisendrossel
 a) u Sinusspannung, i verzerrter Strom mit Effektivwert I , i^2 Stromquadrat mit Mittelwert I^2
 b) i' Ersatzstrom mit gleichem Effektivwert I , i_w Wirkstrom, i_b Blindstrom, φ fiktiver Phasenverschiebungswinkel, $p = u i'$ Augenblicksleistung, P Wirkleistung zur Deckung der Eisenverluste
 c) Effektivwertzeigerdiagramm

In Bild 9.8a sind Spannung $u(t)$ und Strom $i(t)$ aus Bild 9.7b übernommen und der zugehörige Leistungsverlauf $p(t) = u(t) i(t)$ dargestellt. Die verzerrte Leistungskurve hat nach Gl. (9.55) den Mittelwert $P = U I_1 \cos \varphi_1$. Ein *elektrodynamischer Leistungsmesser* [Müh08] misst diesen Mittelwert P , der sich bei Spulen mit ferromagnetischem Kern aus den Eisenverlusten P_{Fe} und den Kupferverlusten P_{Cu} der Wicklung zusammensetzt. Letztere sind in Bild 9.7 allerdings vernachlässigt. Zusätzlich ist in Bild 9.8a die Stromquadratkurve $i^2(t)$ mit ihrem Mittelwert I^2 eingetragen, aus dem der Effektivwert I des Stroms folgt. Der angegebene Winkel β darf nicht als Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom angesehen werden. Man kann

¹Der Index „dist“ steht nach [dinb] für lat. distortio = Verzerrung. Oft wird auch der Index „d“ verwendet.

das Zeitdiagramm von Bild 9.8a nicht ohne Weiteres in ein Zeigerdiagramm überführen, da dies nach Abschnitt 5.2.2 nur für Sinusgrößen zulässig ist.

Um auch für verzerrte Ströme mit einem Zeigerdiagramm arbeiten zu können, ersetzt man den Strom $i(t)$ durch einen sinusförmigen *Ersatzstrom* $i'(t)$ (Bild 9.8b), der den gleichen Effektivwert I hat und dessen Phasenlage so gewählt wird, dass sich dieselbe Wirkleistung P und damit derselbe Leistungsfaktor

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{UI}$$

einstellt. Der so bestimmte *fiktive Phasenverschiebungswinkel* φ stimmt nicht mit dem Phasenverschiebungswinkel φ_1 der Grundschwingung überein. Zeigerdiagramme für Spulen, Transformatoren, elektrische Maschinen etc. mit ferromagnetischen Kernen, die verzerrte Ströme verursachen, gelten für solche Ersatzgrößen.

Die Wirkkomponente I_w wird dann als *Eisenverluststrom* I_{Fe} und die Blindkomponente I_b als *Magnetisierungsstrom* I_μ bezeichnet.

Der hier behandelte Fall einer sinusförmigen Spannung an einer Spule mit ferromagnetischem Kern kann in der Praxis häufig als brauchbare Näherung verwendet werden. Es ist aber auch möglich, dass einer solchen Spule mit ferromagnetischem Kern ein näherungsweise sinusförmiger Strom eingepreßt wird (z. B. bei einem Stromwandler), der dann eine entsprechend verzerrte, nichtsinusförmige Spannung zur Folge hat.

Beispiel 9.9: Durch Gleichrichtung verursachte Verzerrungsblindleistung

Die Schaltung in Bild 9.9 enthält einen idealen Gleichrichter und den Ohmschen Widerstand $R = 20 \Omega$. Sie wird über einen Transformator, der beim Öffnen des Schalters S ein Übertragen des Gleichstroms auf das speisende Sinusspannungsnetz verhindern soll, an eine Sinusspannung mit $U = 100 \text{ V}$ angeschlossen.

Zu berechnen sind alle Ströme und Leistungen für a) geschlossenen und b) geöffneten Schalter S.

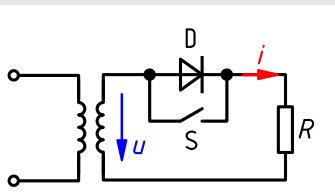


Bild 9.9: Gleichrichterschaltung zu Beispiel 9.9

- a) Bei geschlossenem Schalter S ist der Gleichrichter kurzgeschlossen. Dann fließt der Strom

$$I = \frac{U}{R} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5 \text{ A}$$

mit dem Scheitelwert

$$\hat{i} = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \cdot 5 \text{ A} = 7,07 \text{ A}.$$

Am Wirkwiderstand R sind Wirk- und Scheinleistung zahlenmäßig gleich, nämlich

$$P = U I = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} = 500 \text{ W}$$

und

$$S = 500 \text{ VA}.$$

Blind- und Verzerrungsblindleistung sind

$$Q = Q_{\text{dist}} = 0.$$

- b) Nach Öffnen des Schalters S kann der Strom nur noch während der positiven Halbschwingung durch den als verlustlos angesehenen Gleichrichter fließen. Hierdurch wird die Wirkleistung auf

$$P' = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \cdot 500 \text{ W} = 250 \text{ W}$$

halbiert. Der Transformator liefert weiterhin die Spannung $U = 100 \text{ V}$. Für den Strom gilt nach Gl. (5.18)

$$I' = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{i}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5 \text{ A}}{2} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ A},$$

sodass in diesem Fall mit der Scheinleistung

$$S' = U I' = 100 \text{ V} \cdot 3,54 \text{ A} = 354 \text{ VA}$$

die Blindleistung

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P'^2} = \sqrt{354^2 - 250^2} \text{ var} = 250 \text{ var}$$

auftritt. Da der Verbraucher ein Wirkwiderstand ist, kann diese Blindleistung nur als Verzerrungsblindleistung

$$Q_{\text{dist}} = Q' = 250 \text{ var}$$

durch den Gleichrichter verursacht werden.

9.3 Schaltvorgänge in linearen elektrischen Netzwerken

Schaltvorgänge in elektrischen Netzwerken werden entscheidend durch die in den Netzwerken - erwünscht oder unerwünscht - wirksamen Speicher C für elektrische und L für magnetische Energie beeinflusst. Das Übergangsverhalten von Netzwerken wird durch Differenzialgleichungen beschrieben.

Zunächst wird untersucht, wie diese Differenzialgleichungen aufgestellt werden können und welche Mittel zu ihrer Lösung zur Verfügung stehen. Danach werden die vorgestellten Methoden zur Berechnung von Schaltvorgängen in Gleich- und Wechselstromkreisen angewandt. Die Betrachtung beschränkt sich auf lineare Netzwerke.

9.3.1 Berechnungsverfahren

Da die Aussagen von Abschnitt 9.1.4 über das Verhalten der linearen, zeitinvarianten Grundzweipole R , C und L für beliebige Zeitfunktionen von Strom und Spannung gelten, sind insbesondere die in Tabelle 9.3 aufgeführten Zusammenhänge zwischen Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ auch für die Betrachtung von Schaltvorgängen gültig.

Im Folgenden wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Zusammenhänge Differenzialgleichungen aufstellen kann, die das nichtstationäre Verhalten linearer Netzwerke beschreiben. Dann wird erläutert, wie man die Lösung einer linearen Differenzialgleichung durch einen Exponentialansatz und Hinzufügen einer partikulären Lösung finden kann.

Für die mathematisch anspruchsvollere, in der Anwendung aber meist einfachere Laplace-Transformation sei auf [BDHG06] verwiesen.

9.3.1.1 Aufstellen der Differenzialgleichung

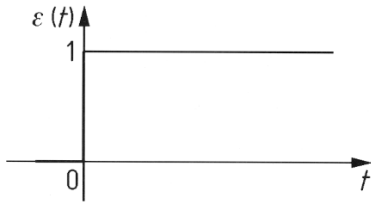
Bei einem Schaltvorgang ist davon auszugehen, dass sich an einer bestimmten Stelle eines Netzwerks eine Spannung $u(t)$ oder ein Strom $i(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt, den man in der Regel als $t = 0$ definiert, sprunghaft ändert. Diese sich ändernde Größe wird als *EingangsgroÙe* bezeichnet. Mit Hilfe einer Differenzialgleichung soll beschrieben werden, welchen zeitlichen Verlauf eine *AusgangsgroÙe* $x(t)$ nimmt, die je nach Aufgabenstellung eine andere Spannung oder ein anderer Strom innerhalb des Netzwerks sein kann.

Beim Aufstellen der Differenzialgleichung bedient man sich der Kirchhoffschen Gesetze sowie der in Tabelle 9.3 zusammengestellten Gleichungen für das Strom-Spannungs-Verhalten der linearen, zeitinvarianten Grundzweipole R , C und L . Durch geeignete Umformung muss erreicht werden, dass die Gleichung keine anderen Ströme und Spannungen mehr enthält als die EingangsgroÙe und die AusgangsgroÙe.

Eventuell auftretende Integrale $\int x(t) dt$ der AusgangsgroÙe $x(t)$ werden ggf. beseitigt, indem man die Gleichung nach der Zeit t differenziert. Auf diese Weise gewinnt man eine *lineare Differenzialgleichung*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (9.62)$$

n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Hierin stellt n die Anzahl der im Netzwerk vorhandenen voneinander unabhängigen Speicher dar. $f(t)$ ergibt sich aus der EingangsgroÙe und wird als *Störfunktion* bezeichnet.

Bild 9.10: Einheitssprungfunktion $\varepsilon(t)$

Die für ein Netzwerk aufgestellte Differenzialgleichung vom Typ der Gl. (9.62) gilt für jeden zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße, z. B. auch für die in Kapitel 5 und 6 behandelten Sinusgrößen. Durch die Aufgabenstellung ist die Zeitfunktion der Eingangsgröße und damit in Gl. (9.62) die Art der Störfunktion $f(t)$ bestimmt. Bei Schaltvorgängen ist in der Eingangsgröße stets die in Bild 9.10 dargestellte *Einheitssprungfunktion*

$$\varepsilon(t) \quad \text{mit} \quad \varepsilon(t < 0) = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon(t > 0) = 1 \quad (9.63)$$

als Faktor enthalten. Beispielsweise beschreibt man die in Bild 9.11 gezeigte Eingangsfunktion $u(t)$, die beim Einschalten einer Sinusspannung entsteht, durch

$$u(t) = \varepsilon(t) \cdot \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (9.64)$$

Im Folgenden soll zunächst an zwei Beispielen gezeigt werden, wie man die Differenzialgleichung (9.62) aufstellt. Über den zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ bzw. $u_1(t)$ wird dabei noch keine Aussage gemacht.

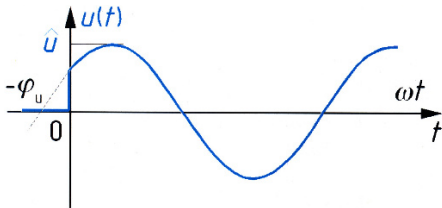


Bild 9.11: Einschalten einer Sinusspannung

Beispiel 9.10: Klemmenverhalten eines elementaren Reihenschwingkreises im Zeitbereich

Dem elementaren Reihenschwingkreis nach Bild 9.12 mit konstanten Parametern R , L , C wird die Eingangsgröße $u(t)$ eingepreßt.

Gesucht ist die Differenzialgleichung für den als Ausgangsgröße betrachteten Strom $i(t)$.

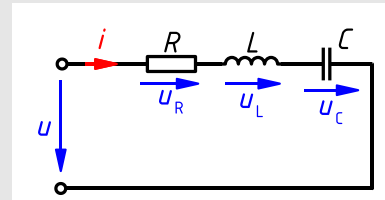


Bild 9.12: Elementarer Reihenschwingkreis

Die Schaltung enthält zwei voneinander unabhängige Speicher L und C . Ihr Klemmenverhalten wird daher im Zeitbereich durch eine Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Nach dem Maschensatz erhält man mit den Gln. (9.39), (9.40) und (9.41) aus Tabelle 9.3

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\vartheta) d\vartheta + u_C(t_0)$$

und nach Differenziation nach der Zeit t sowie Division durch L die gesuchte Differenzialgleichung

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}.$$

Beispiel 9.11: Übertragungsverhalten eines Übertragungsvierpols im Zeitbereich

Für die Schaltung nach Bild 9.13 mit konstanten Schaltungsparametern und der Eingangsgröße u_1 ist die Differenzialgleichung für die Ausgangsgröße u_2 gesucht.

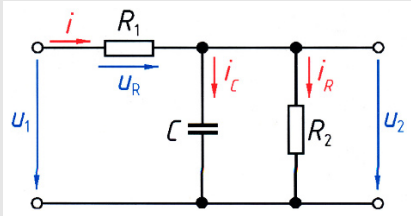


Bild 9.13: Übertragungsvierpol mit einem Speicher

Anwendung des Maschensatzes ergibt

$$u_1 = u_R + u_2 = R_1 i + u_2.$$

Der Knotensatz liefert mit Gl. (9.42) und Gl. (9.43)

$$i = i_R + i_C = \frac{1}{R_2} u_2 + C \frac{du_2}{dt},$$

die man in die Spannungsgleichung einsetzt. Man erhält

$$u_1 = R_1 \left(\frac{1}{R_2} u_2 + C \frac{du_2}{dt} \right) + u_2$$

und nach Division durch $R_1 C$ die gesuchte Differenzialgleichung

$$\frac{du_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C} u_2 = \frac{1}{R_1 C} u_1.$$

9.3.1.2 Lösungsverfahren

Für die inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten (9.62) gibt es unendlich viele Lösungen. Ihre Gesamtheit, in der alle speziellen Lösungen enthalten sind, nennt man die *allgemeine Lösung*. Diese muss zunächst gefunden werden, um hieraus diejenige spezielle Lösung zu gewinnen, die den *Anfangsbedingungen* der jeweiligen Aufgabenstellung genügt.

Die Ermittlung der allgemeinen Lösung von Gl. (9.62) erfolgt in zwei Schritten:

Zunächst wird die *homogene Differenzialgleichung*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (9.65)$$

betrachtet, die sich von der ursprünglichen inhomogenen nur dadurch unterscheidet, dass die Störfunktion $f(t) = 0$ gesetzt ist. Nach [BDHG06] und [FF12] erhält man mit Hilfe des *Exponentialansatzes* $x = \underline{c} e^{\lambda t}$ die *allgemeine Lösung* $x_h(t)$ von Gl. (9.65), in der nach geeigneter Umformung n beliebig wählbare reelle Konstanten K_1, K_2, \dots, K_n enthalten sind. In Abschnitt 9.3.1.3 wird für $n = 2$ die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der homogenen linearen Differenzialgleichung vorgestellt.

Dann muss *eine beliebige* Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (9.62) gefunden werden. Sie wird als die *partikuläre Lösung* $x_p(t)$ bezeichnet. In Abschnitt 9.3.1.4 werden für einige häufig vorkommende Störfunktionen $f(t)$ partikuläre Lösungen angegeben. Bei Einschaltvorgängen findet man eine partikuläre Lösung meist am einfachsten, indem man die Lösung $x_p(t)$ für den *eingeschwungenen Zustand* ermittelt.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (9.62) ergibt sich aus der Summe

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (9.66)$$

der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung und der partikulären Lösung.

Die Festlegung der Konstanten K_1, K_2, \dots, K_n erfolgt mit Hilfe der *Anfangsbedingungen*. Für den Einschaltzeitpunkt $t = 0$ werden die Funktionswerte der allgemeinen Lösung $x(t = 0)$ und deren Ableitungen $dx/dt(t = 0)$ usw. den Werten gleichgesetzt, die aufgrund der elektrischen Gegebenheiten im Einschalt Augenblick vorliegen müssen. Es ergeben sich n Gleichungen, mit deren Hilfe die n Konstanten bestimmt werden können.

9.3.1.3 Exponentialansatz

Im Folgenden wird am Beispiel der homogenen, linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

gezeigt, wie man die allgemeine Lösung $x_h(t)$ einer homogenen Differenzialgleichung mit Hilfe eines Exponentialansatzes ermitteln kann. In den Abschnitten 9.3.2.3 und 9.3.3.3 wird diese Lösung weiterverwendet. Deshalb werden die Koeffizienten a_0 und a_1 in der dort benötigten Weise umbenannt. Die Differenzialgleichung erhält dann die Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \vartheta \omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9.67)$$

Wenn man den Ansatz $x = \underline{c} e^{\lambda t}$ in Gl. (9.67) einsetzt und danach die Gleichung durch $\underline{c} e^{\lambda t}$ dividiert, erhält man die *charakteristische Gleichung*

$$\underline{\lambda}^2 + 2 \vartheta \omega_0 \underline{\lambda} + \omega_0^2 = 0 \quad (9.68)$$

mit den beiden Lösungen

$$\underline{\lambda}_{1,2} = \omega_0 \left(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right). \quad (9.69)$$

Für die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

- a) $\vartheta > 1$; d. h. $\underline{\lambda}_1 \neq \underline{\lambda}_2$; $\underline{\lambda}_1$ und $\underline{\lambda}_2$ sind reell. Die Lösung lautet

$$x_h = K_1 e^{\underline{\lambda}_1 t} + K_2 e^{\underline{\lambda}_2 t}. \quad (9.70)$$

- b) $\vartheta = 1$; d. h. $\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2 = -\omega_0$ (reell). Die Lösung lautet

$$x_h = (K_1 + K_2 t) e^{-\omega_0 t}. \quad (9.71)$$

- c) $\vartheta < 1$; d. h. $\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2^*$; $\underline{\lambda}_1$ und $\underline{\lambda}_2$ sind zueinander konjugiert komplex. Für die Lösung erhält man nach einiger Umformung

$$x_h = \left[K_1 \cos\left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t\right) + K_2 \sin\left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t\right) \right] e^{-\vartheta \omega_0 t}. \quad (9.72)$$

Die Konstanten K_1 und K_2 in den Gln. (9.70) bis (9.72) sind beliebige reelle Größen. Näheres über das Zustandekommen dieser Lösungen findet sich z. B. in [FF12].

9.3.1.4 Partikuläre Lösung

Für einige häufig vorkommende Störfunktionen erhält man nach [FF12] folgende partikuläre Lösungen der linearen inhomogenen Differenzialgleichung (9.62):

- a) Ist die Störfunktion $f(t) = p_n(t)$ ein *Polynom n -ten Grades*, so ist auch die partikuläre Lösung $x_p(t) = q_n(t)$ ein Polynom n -ten Grades, sofern in Gl. (9.62) $a_0 \neq 0$ ist. Für $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ ist die partikuläre Lösung $x_p(t) = t \cdot q_n(t)$. Für $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ gilt $x_p(t) = t^2 \cdot q_n(t)$ usw.
- b) Ist die Störfunktion eine *Sinusgröße* der Form $f(t) = b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$, so ist auch die partikuläre Lösung $x_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ eine Sinusgröße gleicher Kreisfrequenz ω wie die Störfunktion. Die Ausnahme bildet der *Resonanzfall*. Dieser liegt für Gl. (9.67) dann vor, wenn $\omega = \omega_0$ und $\vartheta = 0$ ist. In diesem Fall ergibt sich die partikuläre Lösung $x_p(t) = t \cdot (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$.

Zur Bestimmung der in der jeweiligen partikulären Lösung $x_p(t)$ enthaltenen Konstanten wird der Ausdruck $x_p(t)$ in die Differenzialgleichung (9.62) eingesetzt. Die Konstanten folgen dann aus dem Koeffizientenvergleich.

9.3.2 Schalten von Gleichströmen und -spannungen

Die verwendeten Schalter werden im Folgenden als ideal angenommen, sodass für die Eingangsfunktionen ideale Sprungfunktionen $U\varepsilon(t)$ bzw. $I\varepsilon(t)$ nach Bild 9.10 vorausgesetzt werden dürfen. In der Praxis prellen Schalter dagegen gelegentlich, öffnen also nach dem Schalten kurzzeitig wieder oder weisen veränderliche Kontaktwiderstände auf [FH05]. Auch sind reale elektrische Quellen nicht in der Lage, Stromsprünge zu liefern. Diese Tatsachen sollen hier aber vernachlässigt werden.

9.3.2.1 Idealisertes Einschalten von RC- und RL-Schaltungen

An einem idealen Wirkwiderstand R sind nach Gl. (9.39) Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ stets proportional zueinander. Eine sprunghaft verlaufende Spannung $U\varepsilon(t)$ hat daher an einem idealen Widerstand einen ebenso sprunghaft verlaufenden Strom $I\varepsilon(t)$ zur Folge. Hingegen würde eine sprunghaft verlaufende Spannung $U\varepsilon(t)$ an einer Kapazität C nach Gl. (9.43) einen unendlich großen Strom erfordern und kann daher nicht auftreten. Entsprechendes gilt wegen Gl. (9.41) für einen Stromsprung $I\varepsilon(t)$ bei einer Induktivität L . Die Annahme einer sprunghaften Spannungsänderung an einer Kapazität oder einer abrupten Stromänderung an einer Induktivität ist also physikalisch unsinnig und daher unzulässig.

Einschalten einer Gleichspannung an einer RL-Reihenschaltung

Wenn der Schalter S in Bild 9.14a zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen wird, tritt an der Reihenschaltung aus R und L der Spannungssprung $U\varepsilon(t)$ auf.

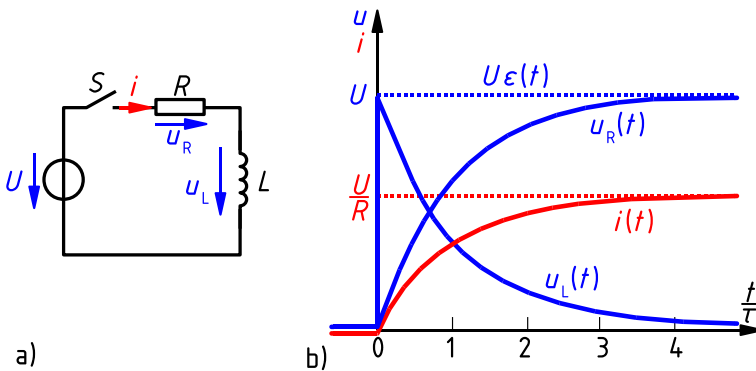


Bild 9.14: Einschalten einer Gleichspannung an einer RL-Reihenschaltung
a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Aus der Maschengleichung

$$u_R + u_L = R i + L \frac{di}{dt} = U\varepsilon(t)$$

erhält man für $t > 0$ die Differenzialgleichung

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U}{L}. \tag{9.73}$$

Zur Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung verwendet man den Exponentialansatz $i = \underline{c}e^{\lambda t}$. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda + \frac{R}{L} = 0$$

hat die Lösung $\lambda = -R/L$. Der negative Kehrwert hiervon ist die *Zeitkonstante*

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{L}{R}. \quad (9.74)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit

$$i_h = \underline{c}e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{c}e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.75)$$

Eine einfach zu bestimmende partikuläre Lösung i_p von Gl. (9.73) ist der für $t \rightarrow \infty$, also im stationären Zustand, fließende Gleichstrom, für den über der Induktivität L keine Spannung mehr auftritt. Er ergibt sich zu

$$i_p = \frac{U}{R}. \quad (9.76)$$

Aus der Addition der Gln. (9.76) und (9.75) folgt die allgemeine Lösung von Gl. (9.73)

$$i = i_p + i_h = \frac{U}{R} + \underline{c}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Die hierin enthaltene Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Da der Strom durch die Induktivität L sich nicht sprunghaft ändern kann, gilt für den Schalt Augenblick

$$i(t=0) = \frac{U}{R} + \underline{c} = 0,$$

woraus für die Integrationskonstante $\underline{c} = -U/R$ folgt. Der Strom in Bild 9.14a verläuft also für $t > 0$ nach der Funktion

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (9.77)$$

Hieraus folgt für die Spannungen

$$u_R = Ri = U \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (9.78)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.79)$$

Die zeitlichen Verläufe des Stroms i und der Spannungen u_R und u_L sind in Bild 9.14b dargestellt.

Einschalten einer Gleichspannung an einer RC-Reihenschaltung

Wenn der Schalter S in Bild 9.15a zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen wird, tritt an der Reihenschaltung aus R und C der Spannungssprung $U \varepsilon(t)$ auf.

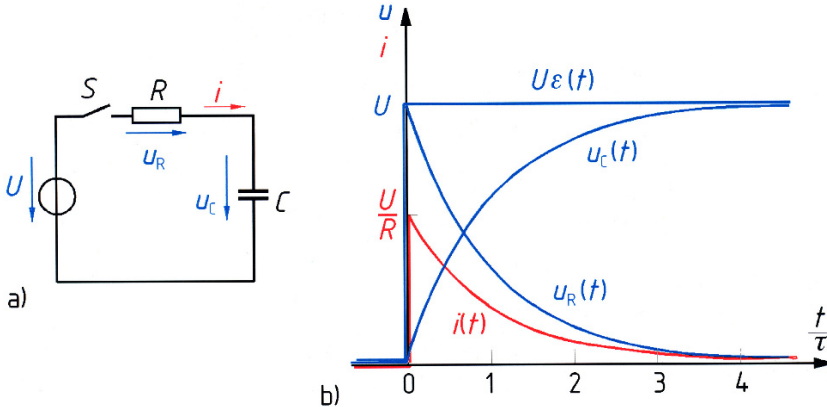


Bild 9.15: Einschalten einer Gleichspannung an einer RC-Reihenschaltung a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Aus der Maschengleichung

$$u_R + u_C = R i + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\vartheta) d\vartheta + u_C(t_0) = U \varepsilon(t)$$

erhält man für $t > 0$ nach einmaliger Differenziation die Differenzialgleichung

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0. \quad (9.80)$$

Zu ihrer Lösung verwendet man den Exponentialansatz $i = \underline{c} e^{\lambda t}$. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0$$

liefert $\lambda = -1/(RC)$ und mit Gl. (9.74) die *Zeitkonstante* $\tau = RC$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$i = \underline{c} e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{c} e^{-\frac{1}{RC} t}. \quad (9.81)$$

Da die Differenzialgleichung (9.80) selbst homogen ist, entfällt das Suchen einer partikulären Lösung. Die Spannung an der Kapazität kann sich nicht sprunghaft ändern und behält im Schalt Augenblick ihren Wert $u_C(t=0) = 0$ bei. Am Widerstand R liegt dann die Spannung $u_R(t=0) = U$. Die Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus dieser Anfangsbedingung zu

$$i(t=0) = \underline{c} = \frac{u_R(t=0)}{R} = \frac{U}{R}.$$

Der Strom in Bild 9.15a verläuft also für $t > 0$ nach der Funktion

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (9.82)$$

Hieraus folgt für die Spannungen:

$$u_R = Ri = U e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (9.83)$$

$$u_C = U - u_R = U \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \quad (9.84)$$

Die zeitlichen Verläufe des Stroms i und der beiden Spannungen u_R und u_C sind in Bild 9.15b dargestellt.

Beispiel 9.12: Einschaltvorgang in einem RC-Netzwerk

Das Netzwerk in Bild 9.16a enthält die Widerstände $R_1 = 200 \Omega$ und $R_2 = 300 \Omega$ sowie die Kapazität $C = 50 \mu\text{F}$ und wird durch Schließen des Schalters S an die Gleichspannung $U = 10 \text{ V}$ gelegt.

Die Verläufe des Stroms $i(t)$ und der Spannung $u_2(t)$ sollen ermittelt werden.

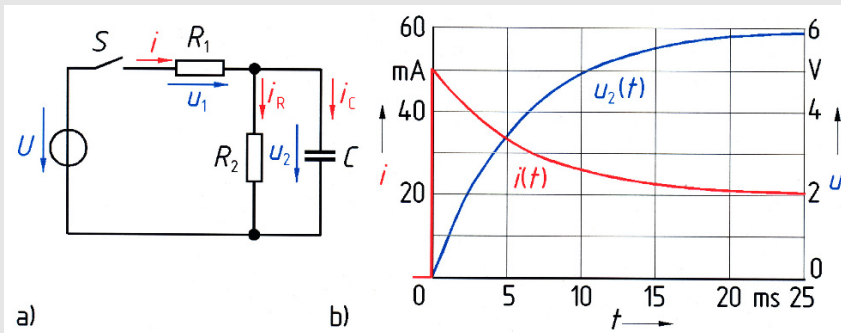


Bild 9.16: Einschalten einer Gleichspannung an einem RC-Netzwerk
a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Aus der Knotengleichung folgt mit Gl. (9.42) und Gl. (9.43)

$$i = i_R + i_C = \frac{1}{R_2} u_2 + C \frac{du_2}{dt}.$$

Wenn man für $t > 0$ die Maschengleichung

$$u_2 = U - u_1 = U - R_1 i$$

in die vorige Gleichung eingesetzt, erhält man

$$i = \frac{1}{R_2} U - \frac{R_1}{R_2} i - R_1 C \frac{di}{dt}$$

und daraus

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C} i = \frac{U}{R_1 R_2 C}.$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C} = 0$$

folgt

$$\lambda = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C} = - \left(\frac{1}{200 \Omega} + \frac{1}{300 \Omega} \right) \frac{1}{50 \mu\text{F}} = - \frac{1}{6 \text{ ms}}$$

und wie in Gl. (9.74) die Zeitkonstante $\tau = 6 \text{ ms}$. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist also

$$i_h = \underline{c} e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{c} e^{-\frac{t}{6 \text{ ms}}}.$$

Als partikuläre Lösung i_p wird der für $t \rightarrow \infty$, also im eingeschwungenen Zustand, fließende Gleichstrom verwendet, für den die Kapazität C eine Unterbrechung darstellt. Man erhält

$$i_p = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{10 \text{ V}}{200 \Omega + 300 \Omega} = 20 \text{ mA}$$

und die allgemeine Lösung

$$i = i_p + i_h = 20 \text{ mA} + \underline{c} e^{-\frac{t}{6 \text{ ms}}}.$$

Die Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$i(t=0) = 20 \text{ mA} + \underline{c} = \frac{U}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{200 \Omega} = 50 \text{ mA}$$

zu $\underline{c} = 30 \text{ mA}$. Für den Strom erhält man also den in Bild 9.16b dargestellten Verlauf

$$i = 20 \text{ mA} + 30 \text{ mA} e^{-\frac{t}{6 \text{ ms}}}.$$

Aus der Maschengleichung folgt der ebenfalls in Bild 9.16b dargestellte Verlauf der Spannung

$$u_2 = U - R_1 i = 10 \text{ V} - 200 \Omega \left(20 \text{ mA} + 30 \text{ mA} e^{-\frac{t}{6 \text{ ms}}} \right) = 6 \text{ V} \left(1 - e^{-\frac{t}{6 \text{ ms}}} \right).$$

Beispiel 9.13: Einschaltvorgang in einem RL-Netzwerk

Das Netzwerk in Bild 9.17a enthält die Widerstände $R_1 = 75 \Omega$ und $R_2 = 200 \Omega$ sowie die Induktivität $L = 1,8 \text{ H}$ und wird durch Schließen des Schalters S bei $t = 0$ an die Gleichspannung $U = 66 \text{ V}$ gelegt.

Die Verläufe des Stroms $i(t)$ und der Spannung $u_2(t)$ sollen ermittelt werden.

Aus der Knotengleichung folgt mit Gl. (9.42) und Gl. (9.44)

$$i = i_R + i_L = \frac{1}{R_2} u_2 + \frac{1}{L} \int_0^t u_2(\vartheta) d\vartheta + i_L(0).$$

Wenn man diese Gleichung einmal differenziert und die für $t > 0$ gültige Maschengleichung

$$u_2 = U - u_1 = U - R_1 i$$

einsetzt, erhält man

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_1}{R_2} \frac{di}{dt} + \frac{U}{L} - \frac{R_1}{L} i$$

und nach Umformung

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{U}{L}.$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\underline{\lambda} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} = 0$$

folgt

$$\underline{\lambda} = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} = -\frac{75 \Omega \cdot 200 \Omega}{(75 \Omega + 200 \Omega) \cdot 1,8 \text{ H}} = -\frac{1}{33 \text{ ms}}$$

und die Zeitkonstante $\tau = 33 \text{ ms}$. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist also

$$i_h = \underline{c} e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{c} e^{-\frac{t}{33 \text{ ms}}}.$$

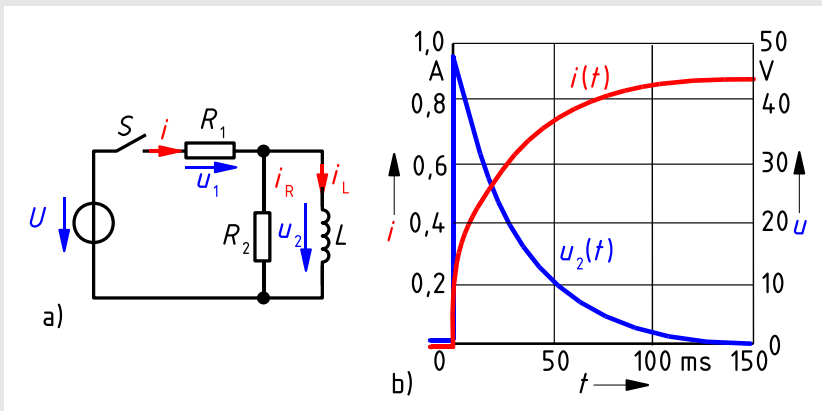


Bild 9.17: Einschalten einer Gleichspannung an einem RL-Netzwerk

a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Als partikuläre Lösung wird der für $t \rightarrow \infty$, also im stationären Zustand, fließende Gleichstrom

$$i_p = \frac{U}{R_1} = \frac{66 \text{ V}}{75 \Omega} = 0,88 \text{ A}$$

verwendet. Damit erhält man die allgemeine Lösung

$$i = i_p + i_h = 0,88 \text{ A} + \underline{c} e^{-\frac{t}{33 \text{ ms}}}.$$

Die Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$i(t=0) = 0,88 \text{ A} + \underline{c} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{66 \text{ V}}{75 \Omega + 200 \Omega} = 0,24 \text{ A}$$

zu $\underline{c} = -0,64 \text{ A}$. Für den Strom erhält man also den in Bild 9.17b dargestellten Verlauf

$$i = 0,88 \text{ A} - 0,64 \text{ A} e^{-\frac{t}{33 \text{ ms}}}.$$

Aus der Maschengleichung folgt der ebenfalls in Bild 9.17b dargestellte Verlauf der Spannung

$$u_2 = U - R_1 i = 66 \text{ V} - 75 \Omega \left(0,88 \text{ A} - 0,64 \text{ A} e^{-\frac{t}{33 \text{ ms}}} \right) = 48 \text{ V} e^{-\frac{t}{33 \text{ ms}}}.$$

9.3.2.2 Idealisertes Ausschalten von RC- und RL-Schaltungen

Beim idealen Abschalten eines Gleichstroms wird der Strom I in unendlich kurzer Zeit t auf den Wert null gebracht. Dieser zeitliche Verlauf wird mit Hilfe der *Sprungfunktion* $\varepsilon(t)$ aus Bild 9.10 durch die Funktion $i(t) = I(1 - \varepsilon(t))$ beschrieben und kann *näherungsweise* vorausgesetzt werden, solange diese sprungförmige Stromänderung nur in solchen Netzwerkzweigen stattfindet, die eine vernachlässigbar kleine Induktivität haben, wie es z. B. in den Ersatzschaltbildern nach Bild 9.16a und Bild 9.17a angenommen wurde.

In realen, insbesondere in stark induktiven Stromkreisen, ist das Abschalten des Stroms in beliebig kurzer Zeit weder möglich noch erwünscht, denn die evtl. hohe Selbstinduktionsspannung $u = L di/dt$ nach Gl. (9.41) würde am Schalter oder an anderen Stellen des Stromkreises – z. B. in Wicklungen – einen für die Isolationsfestigkeit der Schaltung meist unerwünschten Überschlag und u. U. auch eine unerwünschte Überbrückung der Schalteröffnung bewirken.

In den technisch realisierten Schaltern steigt beim Öffnen der Kontakte der Schalterwiderstand zunächst stark an, sodass der Strom i rasch kleiner wird. Bei merklicher Induktivität im Stromkreis entsteht auch hierbei eine große Selbstinduktionsspannung, die zu einem Überschlag an den Schaltkontakten mit einem stromleitenden Lichtbogen führt und so eine zu schnelle Stromabsenkung verhindert. Beim Abschalten von Stromkreisen mit mechanischen Schaltern entstehen daher Funken und Lichtbögen zwischen den Schalterkontakten, die den Abschaltvorgang selbst verzögern. Bei Leistungsschaltern muss ggf. der Lichtbogen zum Verlöschen gebracht werden, was in der Energietechnik z. B. durch besondere Blaskammern [FH05], aber auch durch schnelles Auseinanderziehen der Schaltmesser, also ein Verlängern der Lichtbogenstrecke, erreicht werden kann. Hierdurch wächst der Lichtbogenwiderstand und der Strom nimmt ab, bis die über den Lichtbogen abgeführte Wärme größer wird als die Energie, die mit dem Strom zugeführt wird.

Die Ionisation hört dann auf und der Lichtbogen erlischt. In die genaue Berechnung solcher Abschaltvorgänge muss also die Lichtbogenkennlinie und die Mechanik des Schalters eingehen. In den folgenden Beispielen wird aber auf eine derartige detaillierte Modellierung und Untersuchung der Abschaltvorgänge verzichtet.

Beispiel 9.14: Ausschaltvorgang in einem RC-Netzwerk

Im Netzwerk nach Bild 9.16a, das in Bild 9.18a noch einmal dargestellt ist, wird ausgehend vom stationären Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Öffnen des Schalters S der Strom i abgeschaltet. Gegeben sind $U = 10 \text{ V}$, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$.

Die Verläufe der Ströme $i_R(t)$ und $i_C(t)$ sowie der Spannung $u_2(t)$ sollen ermittelt werden.

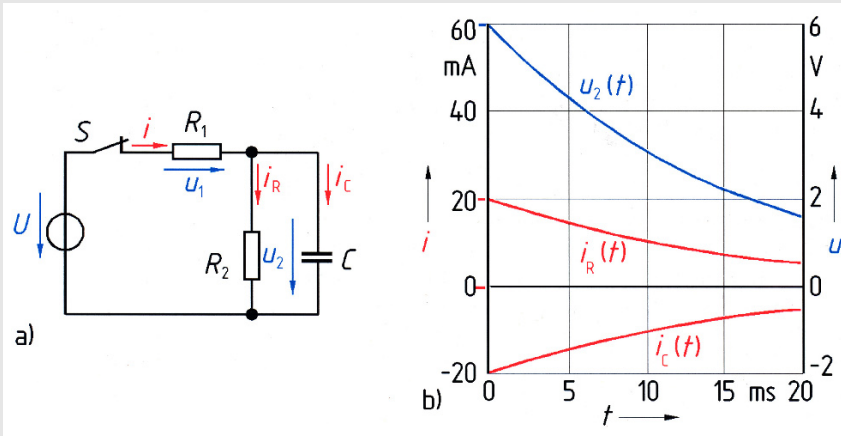


Bild 9.18: Abschalten eines Gleichstroms an einem RC-Netzwerk

a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Mit Gl. (9.42) und Gl. (9.43) liefert die Knotengleichung bei geöffnetem Schalter S

$$i_R + i_C = \frac{1}{R_2} u_2 + C \frac{du_2}{dt} = 0$$

bzw.

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_2 C} u_2 = 0.$$

Die Differenzialgleichung ist von gleicher Art wie Gl. (9.80). Entsprechend Gl. (9.81) erhält man die allgemeine Lösung

$$u_2 = c e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit der Zeitkonstanten

$$\tau = R_2 C = 300 \Omega \cdot 50 \mu\text{F} = 15 \text{ ms}.$$

Die Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$u_2(t=0) = \underline{c} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{300 \Omega}{200 \Omega + 300 \Omega} 10 \text{ V} = 6 \text{ V}.$$

Für die Spannung erhält man also den in Bild 9.18b dargestellten Verlauf

$$u_2(t) = 6 \text{ V} e^{-\frac{t}{15 \text{ ms}}}.$$

Für den Strom i_R folgt

$$i_R(t) = \frac{u_2}{R_2} = \frac{6 \text{ V}}{300 \Omega} e^{-\frac{t}{15 \text{ ms}}} = 20 \text{ mA} e^{-\frac{t}{15 \text{ ms}}}$$

und für den Strom i_C

$$i_C(t) = -i_R = -20 \text{ mA} e^{-\frac{t}{15 \text{ ms}}}.$$

Beispiel 9.15: Ausschaltvorgang in einem RL-Netzwerk

Der Strom durch die RL-Reihenschaltung nach Bild 9.14a kann wegen der Induktivität L nicht in beliebig kurzer Zeit wieder abgeschaltet werden. Hingegen ist ein Umschalten von der Spannungsquelle auf einen Kurzschluss, wie in Bild 9.19a dargestellt, möglich. Wenn das Umschalten in beliebig kurzer Zeit erfolgt, braucht sich der Strom $i(t)$ nicht sprunghaft zu ändern.

Für die Werte $U = 100 \text{ V}$, $R = 50 \Omega$ und $L = 4 \text{ H}$ sollen die Verläufe des Stroms $i(t)$ und der Spannungen $u_R(t)$ und $u_L(t)$ angegeben werden.

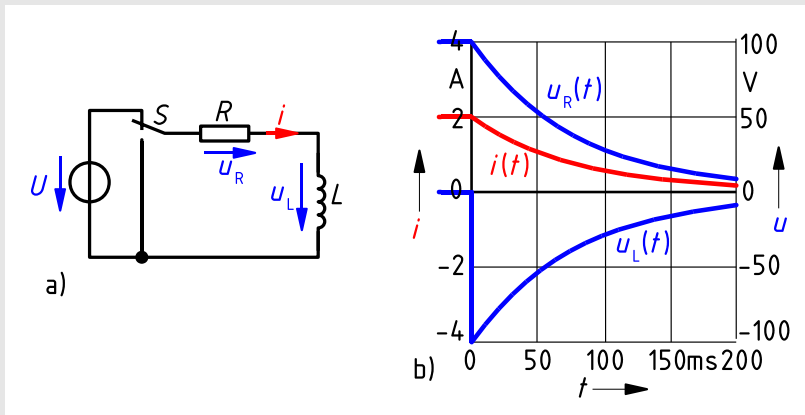


Bild 9.19: Umschalten einer RL-Reihenschaltung von einer Gleichspannungsquelle auf einen Kurzschluss

a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Nach Umschalten des Schalters S gilt mit Gl. (9.39) und Gl. (9.41) die Maschengleichung

$$u_R + u_L = R i + L \frac{di}{dt} = 0.$$

Die Differenzialgleichung

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

ist homogen; ansonsten stimmt sie mit Gl. (9.73) überein. Nach den Gln. (9.74) und (9.75) hat sie die allgemeine Lösung

$$i = \underline{c} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit der Zeitkonstanten

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4 \text{ H}}{50 \Omega} = 80 \text{ ms}.$$

Die Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$i(t=0) = \underline{c} = \frac{U}{R} = \frac{100 \text{ V}}{50 \Omega} = 2 \text{ A}.$$

Für den Strom erhält man also den in Bild 9.19b dargestellten Verlauf

$$i(t) = 2 \text{ A} e^{-\frac{t}{80 \text{ ms}}}.$$

Für die Spannung u_R folgt

$$u_R(t) = R i = 50 \Omega \cdot 2 \text{ A} e^{-\frac{t}{80 \text{ ms}}} = 100 \text{ V} e^{-\frac{t}{80 \text{ ms}}}$$

und für die Spannung u_L

$$u_L(t) = -u_R = -100 \text{ V} e^{-\frac{t}{80 \text{ ms}}}.$$

9.3.2.3 Schalten von Schwingkreisen

In Netzwerken, die sowohl Induktivitäten als auch Kapazitäten enthalten, können beim Schalten *Ausgleichsvorgänge* entstehen, bei denen der Übergang vom Anfangs- auf den Endwert mit Schwingungen verbunden ist. Dies soll am Beispiel eines für $t < 0$ energielosen elementaren Reihenschwingkreises nach Bild 9.20 gezeigt werden, der zum Zeitpunkt $t = 0$ an die Gleichspannung U geschaltet wird. Da alle realen elektrischen Netzwerke unerwünschte (parasitäre) Induktivitäten und Kapazitäten enthalten, erzeugt in der Praxis *jeder* Schaltvorgang in Netzwerken Ausgleichsvorgänge in Form gedämpfter Schwingungen.

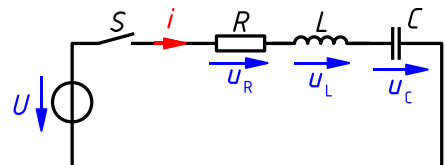


Bild 9.20: Einschalten einer Gleichspannung an einem elementaren Reihenschwingkreis

Aus der Maschengleichung, die hier zu der *Integro-Differenzialgleichung* (also einer Gleichung,

die sowohl eine Ableitung als auch ein Integral der betrachteten Variablen enthält)

$$u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\vartheta) d\vartheta + u_C(0) = U \varepsilon(t) \quad (9.85)$$

führt, erhält man für $t > 0$ nach einmaliger Differenziation die homogene Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (9.86)$$

Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn man nach Gl. (7.31) die *Kennkreisfrequenz*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.87)$$

des Schwingkreises und den *Dämpfungsgrad*

$$\vartheta = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (9.88)$$

in die Rechnung einführt. Gl. (9.86) erhält dann die Form

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\vartheta\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (9.89)$$

und stimmt mit der in Abschnitt 9.3.1.3 betrachteten homogenen Differenzialgleichung (9.67) überein. Die zugehörige charakteristische Gleichung (9.68) hat nach Gl. (9.69) die Lösung

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \left(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right). \quad (9.90)$$

Nach Abschnitt 9.3.1.3 sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Aperiodischer Fall ($\vartheta > 1$)

Gl. (9.90) liefert zwei unterschiedliche negativ reelle Lösungen:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1} = \omega_0 \left(-\vartheta - \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right) \quad (9.91a)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2} = \omega_0 \left(-\vartheta + \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right) \quad (9.91b)$$

Mit Gl. (9.70) erhält man die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (9.89)

$$i = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (9.92)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten K_1 und K_2 erfolgt mit Hilfe der Anfangsbedingungen. Wegen der Induktivität L kann sich der Strom i im Schalt Augenblick nicht sprunghaft ändern. Hieraus folgt

$$i(t=0) = K_1 + K_2 = 0$$

und

$$i = K_1 \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (9.93)$$

Da im Schalt Augenblick sowohl die Spannung u_C an der Kapazität C als auch die Spannung u_R am Widerstand R wegen $i(t=0) = 0$ null sind, liegt zunächst die volle Spannung U an der Induktivität L . Aus dieser Anfangsbedingung folgt

$$u_L(t=0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = L K_1 \left(-\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) = U.$$

Hieraus lässt sich K_1 bestimmen und in Gl. (9.93) einsetzen. Man erhält damit für den Strom

$$i(t) = \frac{U}{L} \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (9.94)$$

einen Verlauf, wie er in Bild 9.21 für $\vartheta = 2$ dargestellt ist.

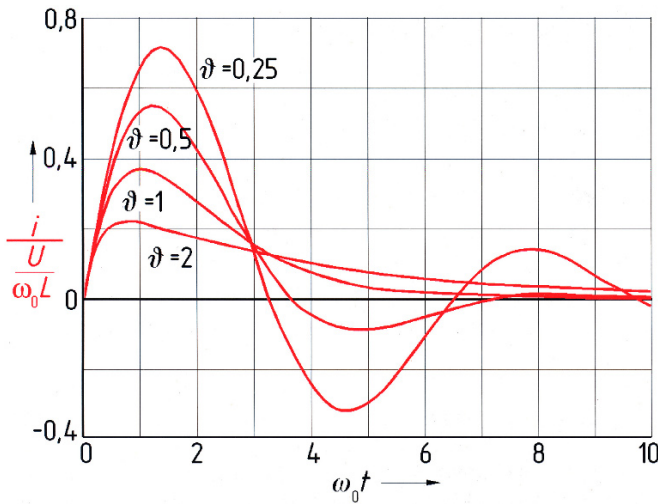


Bild 9.21: Stromverlauf beim Einschalten einer Gleichspannung an einem Reihenschwingkreis nach Bild 9.24 bei verschiedenen Dämpfungsgraden $\vartheta = 2$ (aperiodischer Fall), $\vartheta = 1$ (aperiodischer Grenzfall), $\vartheta = 0,5$ und $\vartheta = 0,25$ (periodischer Fall)

b) Aperiodischer Grenzfall ($\vartheta = 1$)

Gl. (9.90) liefert nur eine Lösung

$$\underline{\lambda} = -\omega_0. \quad (9.95)$$

Mit Gl. (9.71) erhält man die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (9.89)

$$i = (K_1 + K_2 t) e^{-\omega_0 t}. \quad (9.96)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten K_1 und K_2 erfolgt wie im Fall a) mit Hilfe der Anfangsbedingungen für den Strom

$$i(t=0) = K_1 = 0$$

und für die Spannung an der Induktivität

$$u_L(t=0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = L K_2 (1 - \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \Big|_{t=0} = L K_2 = U.$$

Damit erhält man aus Gl. (9.96) für den Strom

$$i(t) = \frac{U}{L} t e^{-\omega_0 t} \quad (9.97)$$

einen Verlauf, wie er in Bild 9.21 für $\vartheta = 1$ dargestellt ist.

c) Periodischer Fall ($\vartheta < 1$)

Gl. (9.90) liefert zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen:

$$\underline{\lambda}_1 = \omega_0 \left(-\vartheta - j\sqrt{1 - \vartheta^2} \right) \quad (9.98a)$$

$$\underline{\lambda}_2 = \omega_0 \left(-\vartheta + j\sqrt{1 - \vartheta^2} \right) \quad (9.98b)$$

Mit Gl. (9.72) erhält man die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (9.89)

$$i = \left[K_1 \cos \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) + K_2 \sin \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) \right] e^{-\vartheta \omega_0 t}. \quad (9.99)$$

Hierin ist

$$\omega_d = \sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 \quad (9.100)$$

die *Eigenkreisfrequenz* des Schwingkreises. Sie ist stets kleiner als die Kennkreisfrequenz ω_0 und weicht von dieser umso stärker ab, je größer der Dämpfungsgrad ϑ ist.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten K_1 und K_2 erfolgt wie im Fall a) mit Hilfe der Anfangsbedingungen. Aus $i(t=0) = 0$ folgt nach Gl. (9.99)

$$i(t=0) = K_1 = 0$$

und

$$i = K_2 \sin \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) e^{-\vartheta \omega_0 t}. \quad (9.101)$$

Die Bedingung

$$u_L(t=0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = U$$

liefert nach Gl. (9.101)

$$L K_2 \left[\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 \cos \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) - \vartheta \omega_0 \sin \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) \right] e^{-\vartheta \omega_0 t} \Big|_{t=0}$$

$$= LK_2 \sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 = U.$$

Mit dem hieraus resultierenden Wert für K_2 erhält man aus Gl. (9.101) für den Strom

$$i(t) = \frac{U}{\omega_0 L \sqrt{1 - \vartheta^2}} \sin(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t) e^{-\vartheta \omega_0 t} \quad (9.102)$$

Verläufe, wie sie in Bild 9.21 für $\vartheta = 0,5$ und $\vartheta = 0,25$ dargestellt sind.

Im stationären Zustand, d. h. für $t \rightarrow \infty$, wird für alle drei Fälle der Strom $i(t \rightarrow \infty) = 0$. Die Kapazität C ist dann auf die Spannung

$$u_C(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i dt = U$$

aufgeladen. Alle vier in Bild 9.21 dargestellten Stromverläufe $i(t)$ ergeben daher denselben Wert für das Integral

$$\int_0^{\infty} i dt = CU,$$

jedoch konvergieren die gezeigten Kurven unterschiedlich schnell gegen ihren Endwert. Die beste Konvergenz zeigt hier die Kurve für den aperiodischen Grenzfall mit $\vartheta = 1$.

Beispiel 9.16: Einschalten einer Gleichspannung an einem RLC-Netzwerk

Das zunächst energielose Netzwerk in Bild 9.22 aus der Kapazität $C = 2 \mu\text{F}$, der Induktivität $L = 20 \text{ mH}$ sowie den Widerständen $R_1 = 25 \Omega$ und $R_2 = 56 \Omega$ wird bei $t = 0$ durch Schließen des Schalters S an die Gleichspannung $U = 16,2 \text{ V}$ gelegt.

Gesucht sind die Verläufe der Spannung u_2 und der Ströme $i_L(t)$, $i_C(t)$ und $i(t)$ für $t > 0$.

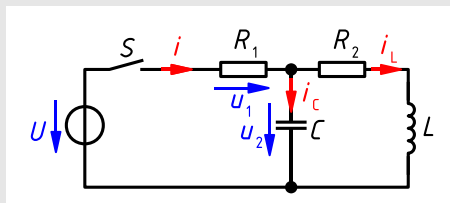


Bild 9.22: Einschalten einer Gleichspannung an einem RLC-Netzwerk

Mit Gl. (9.39) und Gl. (9.41) erhält man für die Spannung

$$u_2 = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt}.$$

Gl. (9.43) liefert den Strom durch die Kapazität C

$$i_C = C \frac{du_2}{dt} = R_2 C \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}.$$

Wenn man diese Gleichung in die Maschengleichung

$$u_1 + u_2 = R_1(i_C + i_L) + R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} = U\varepsilon(t)$$

einsetzt, erhält man

$$R_1 R_2 C \frac{di_L}{dt} + R_1 L C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (R_1 + R_2)i_L + L \frac{di_L}{dt} = U\varepsilon(t)$$

und nach Division durch $R_1 L C$ für $t > 0$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) \frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 L C} i_L = \frac{U}{R_1 L C}.$$

Abkürzend lässt sich diese Differenzialgleichung in der Form

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\vartheta \omega_0 \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \frac{U}{R_1 L C}$$

darstellen. Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte folgt

$$\omega_0 = 9 \text{ ms}^{-1}, \quad \vartheta = 1,267 \quad \text{und} \quad U/(R_1 L C) = 16,2 \text{ A ms}^{-2}.$$

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung stimmt mit Gl. (9.89) überein. Wegen $\vartheta > 1$ liegt der aperiodische Fall vor. Die charakteristische Gleichung hat nach Gl. (9.91) die beiden reellen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau_{1,2}} = \omega_0 \left(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right) = 9 \text{ ms}^{-1} (-1,267 \pm 0,7775),$$

also

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -18,4 \text{ ms}^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -4,4 \text{ ms}^{-1}.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (9.92) als Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$i_{Lh} = K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} = K_1 e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} + K_2 e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Als partikuläre Lösung i_{Lp} wird der für $t \rightarrow \infty$, also im eingeschwungenen Zustand, fließende Gleichstrom verwendet, für den die Kapazität C eine Unterbrechung und die Induktivität L einen Kurzschluss darstellt. Man erhält

$$i_{Lp} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{16,2 \text{ V}}{25 \Omega + 56 \Omega} = 200 \text{ mA}$$

und die allgemeine Lösung

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh} = 200 \text{ mA} + K_1 e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} + K_2 e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Da der durch die Induktivität L fließende Strom i_L sich im Schalt Augenblick nicht sprunghaft ändern kann, gilt die Anfangsbedingung

$$i_L(t=0) = 200 \text{ mA} + K_1 + K_2 = 0.$$

Damit lässt sich die Integrationskonstante K_2 eliminieren und man erhält

$$i_L = 200 \text{ mA} + K_1 e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - (K_1 + 200 \text{ mA}) e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Hieraus folgt für die Spannung an der Kapazität und der RL-Reihenschaltung

$$u_2 = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} = 56 \Omega \cdot 200 \text{ mA} + (56 \Omega - 20 \text{ mH} \cdot 18,4 \text{ ms}^{-1}) K_1 e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - (56 \Omega - 20 \text{ mH} \cdot 4,4 \text{ ms}^{-1})(K_1 + 200 \text{ mA}) e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Da die Spannung an der Kapazität C sich im Schalt Augenblick nicht sprunghaft ändern kann, gilt die Anfangsbedingung

$$u_2(t=0) = 11,2 \text{ V} - 311,9 \Omega K_1 + 32,1 \Omega (K_1 + 200 \text{ mA}) = 0.$$

Hieraus folgt für die Integrationskonstante $K_1 = 62,9 \text{ mA}$ und für die Spannung

$$u_2(t) = 11,2 \text{ V} - 19,6 \text{ V} e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} + 8,43 \text{ V} e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Mit der nunmehr bekannten Integrationskonstanten K_1 erhält man auch das Endergebnis für den Strom durch die Induktivität L

$$i_L(t) = 200 \text{ mA} + 62,9 \text{ mA} e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - 263 \text{ mA} e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Der Strom durch die Kapazität C ergibt sich mit Gl. (9.43) zu

$$i_C = C \frac{du_2}{dt} = 2 \mu\text{F} \left(19,6 \text{ V} \cdot 18,4 \text{ ms}^{-1} e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - 8,43 \text{ V} \cdot 4,4 \text{ ms}^{-1} e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}} \right),$$

$$i_C(t) = 722 \text{ mA} e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - 74,2 \text{ mA} e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Die Zeitverläufe der Spannung u_2 und der beiden Ströme i_L und i_C sind in Bild 9.23a grafisch dargestellt. Der Gesamtstrom folgt aus der Summe

$$i(t) = i_L + i_C = 200 \text{ mA} + 785 \text{ mA} e^{-18,4 \frac{t}{\text{ms}}} - 337 \text{ mA} e^{-4,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Beispiel 9.17: Ausschaltvorgang in einem RLC-Netzwerk

Das Netzwerk in Bild 9.22 wird durch Öffnen des Schalters S von der Gleichspannung U abgetrennt.

Die Zeitfunktionen der Spannung $u_2(t)$ und der Ströme $i_L(t)$ und $i_C(t)$ sollen für $t > 0$ ermittelt werden.

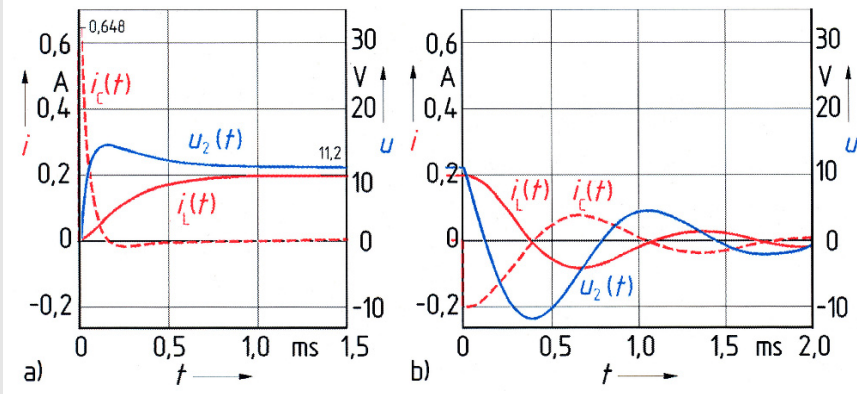


Bild 9.23: Zeitverläufe von Spannungen und Strömen in der Schaltung nach Bild 9.22

a) nach Anschalten der Schaltung an eine Gleichspannung U

b) nach Abschalten der Gleichspannung U

Nach Öffnen des Schalters S ist der Widerstand R_1 unwirksam, sodass die Elemente R_2 , L und C einen elementaren Reihenschwingkreis bilden. Die Maschengleichung liefert mit den Gln. (9.39) und (9.41)

$$u_2 = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt}.$$

Andererseits gilt nach Gl. (9.43)

$$i_L = -i_C = -C \frac{du_2}{dt}.$$

Dies wird in die Maschengleichung eingesetzt. Nach Division durch LC erhält man

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R_2}{L} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC} u_2 = 0$$

bzw.

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2 \vartheta \omega_0 \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = 0.$$

Dabei gilt nach Einsetzen der vorgegebenen Werte $\omega_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$ und $\vartheta = 0,28$. Wegen $\vartheta < 1$ liegt der periodische Fall vor. Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet nach Gl. (9.99)

$$\begin{aligned} u_2 &= \left[K_1 \cos \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) + K_2 \sin \left(\sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 t \right) \right] e^{-\vartheta \omega_0 t} \\ &= \left[K_1 \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) + K_2 \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right] e^{-1,4 \frac{t}{\text{ms}}}. \end{aligned}$$

Das Aufsuchen einer partikulären Lösung entfällt, da die Differenzialgleichung homogen ist.

Da sich die Spannung an einer Kapazität nicht sprunghaft ändern kann, behält die Spannung u_2 im Schalt Augenblick den Wert bei, den sie vor Öffnen des Schalters hatte. Daher gilt die Anfangsbedingung

$$u_2(t=0) = K_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{56 \Omega}{25 \Omega + 56 \Omega} 16,2 \text{ V} = 11,2 \text{ V}.$$

Damit ist die Integrationskonstante K_1 bekannt und kann in die Gleichung für u_2 eingesetzt werden. Nach Gl. (9.43) erhält man den Strom

$$\begin{aligned} i_L = -i_C &= -C \frac{du_2}{dt} \\ &= -2 \mu\text{F} \left[-11,2 \text{ V} \cdot 4,8 \text{ ms}^{-1} \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) + K_2 \cdot 4,8 \text{ ms}^{-1} \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right. \\ &\quad \left. - 11,2 \text{ V} \cdot 1,4 \text{ ms}^{-1} \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) - K_2 \cdot 1,4 \text{ ms}^{-1} \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right] e^{-1,4 \frac{t}{\text{ms}}}. \\ &= \left[(31,36 \text{ mA} - 9,6 \text{ mS} \cdot K_2) \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (107,5 \text{ mA} + 2,8 \text{ mS} \cdot K_2) \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right] e^{-1,4 \frac{t}{\text{ms}}}. \end{aligned}$$

Da sich der Strom an einer Induktivität nicht sprunghaft ändern kann, behält der Strom i_L im Schalt Augenblick den Wert bei, den er vor Öffnen des Schalters hatte. Daher gilt die Anfangsbedingung

$$i_L(t=0) = 31,36 \text{ mA} - 9,6 \text{ mS} \cdot K_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{16,2 \text{ V}}{25 \Omega + 56 \Omega} = 200 \text{ mA}.$$

Hieraus folgt für die Integrationskonstante $K_2 = -17,57 \text{ V}$ und für den Strom

$$i_L = -i_C = \left[200 \text{ mA} \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) + 58,3 \text{ mA} \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right] e^{-1,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Mit der nunmehr bekannten Integrationskonstanten K_2 erhält man auch das Endergebnis für die Spannung an der Kapazität C

$$u_2 = \left[11,2 \text{ V} \cos \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) - 17,6 \text{ V} \sin \left(4,8 \frac{t}{\text{ms}} \right) \right] e^{-1,4 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

Die ermittelten Zeitverläufe der Ströme i_L und i_C sowie der Spannung u_2 sind in Bild 9.23b grafisch dargestellt.

9.3.3 Schalten von Sinusströmen und -spannungen

Die in Abschnitt 9.3.2 für das Schalten von Gleichströmen aufgestellten Differenzialgleichungen sind im Wesentlichen auch für Wechselströme anwendbar; lediglich die Störfunktion $f(t)$ in Gl. (9.62) ist von einem anderen Typ. Die jeweils zugehörige homogene Differenzialgleichung, die man nach Abschnitt 9.3.1.2 dadurch erhält, dass man die Störfunktion durch den Wert null

ersetzt, ist in beiden Fällen dieselbe. Die Aufgabe reduziert sich damit auf das Aufsuchen einer partikulären Lösung und das Bestimmen der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen. Dies wird im Folgenden anhand einiger Beispiele für Sinusspannungen gezeigt.

9.3.3.1 Schalten einer RL-Reihenschaltung an eine Sinusspannung

Im Unterschied zu dem in Bild 9.14 betrachteten Gleichstrom-Einschaltvorgang soll nach Bild 9.24a zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Sinusspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ an die RL-Reihenschaltung geschaltet werden.

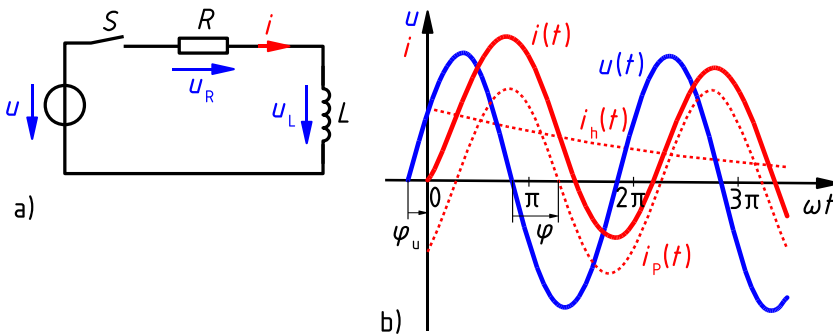


Bild 9.24: Einschalten einer Sinusspannung an einer RL-Reihenschaltung
a) Ersatzschaltbild, b) Stromverlauf

Mit Gl. (9.64) erhält man die Maschengleichung

$$u_R + u_L = R i + L \frac{di}{dt} = \varepsilon(t) \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

und für $t > 0$ die Differenzialgleichung

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\hat{u}}{L} \sin(\omega t + \varphi_u). \tag{9.103}$$

Aus Gl. (9.75) kann die Lösung

$$i_h = c e^{-\frac{t}{\tau}} = c e^{-\frac{R}{L}t} \tag{9.104}$$

der homogenen Differenzialgleichung übernommen werden. Als partikuläre Lösung i_p wird der für $t \rightarrow \infty$, also im stationären Zustand fließende Sinusstrom verwendet, der sich am einfachsten mit Hilfe der komplexen Rechnung ermitteln lässt. Die Impedanz \underline{Z} der RL-Reihenschaltung ergibt sich mit den Gln. (6.19) bis (6.21) zu

$$\underline{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \operatorname{Arctan} \frac{\omega L}{R}} = Z e^{j\varphi}. \tag{9.105}$$

Der im stationären Zustand fließende Sinusstrom i_p wird durch den Stromzeiger

$$\underline{I}_p = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\varphi_u - \varphi)}$$

beschrieben. Bei der Spannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ entspricht dies nach Abschnitt 5.2 und 5.3 der Zeitfunktion

$$i_p = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi). \quad (9.106)$$

Aus der Addition der Gln. (9.106) und (9.104) folgt die allgemeine Lösung

$$i = i_p + i_h = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + \underline{c} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.107)$$

Die hierin enthaltene Integrationskonstante \underline{c} ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Da der Strom durch die Induktivität L sich nicht sprunghaft ändern kann, gilt für den Schaltaugenblick

$$i(t=0) = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\varphi_u - \varphi) + \underline{c} = 0$$

und man erhält für die Integrationskonstante $\underline{c} = -(\hat{u}/Z) \sin(\varphi_u - \varphi)$. Der Strom in Bild 9.24a verläuft damit für $t > 0$ nach der Funktion

$$i = i_p + i_h = \frac{\hat{u}}{Z} \left(\sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \sin(\varphi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (9.108)$$

Wie in Bild 9.24b gezeigt, ist also dem nach Gl. (9.106) im stationären Zustand fließenden Sinusstrom i_p ein Strom i_h überlagert, der exponentiell mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$ abklingt. Dieser Anteil tritt nicht auf, wenn der *Schaltwinkel* gleich dem Phasenverschiebungswinkel, also $\varphi_u = \varphi$ (Bild 9.25a) oder wenn $\varphi_u = \varphi \pm 180^\circ$ ist.

In allen anderen Fällen weist insbesondere das erste Strommaximum oder -minimum nach dem Einschalten einen überhöhten Wert auf. Der Zeitpunkt $t_{\ddot{u}}$ dieses *Überschwingens* ist bestimmbar, indem man Gl. (9.108) nach der Zeit t differenziert und die erste Ableitung null setzt. Entsprechend erhält man den Schaltwinkel $\varphi_{u\ddot{u}}$, bei dem das größte Überschwingen auftritt, indem man Gl. (9.108) nach dem Schaltwinkel φ_u differenziert und auch diese Ableitung null setzt. Unter Verwendung der Umformung

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega} \tan \varphi$$

ergeben sich dann die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} -\tan \varphi \cos(\omega t_{\ddot{u}} + \varphi_{u\ddot{u}} - \varphi) &= \sin(\varphi_{u\ddot{u}} - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_{\ddot{u}}}, \\ \cos(\omega t_{\ddot{u}} + \varphi_{u\ddot{u}} - \varphi) &= \cos(\varphi_{u\ddot{u}} - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_{\ddot{u}}}, \end{aligned}$$

die bei maximalem Überschwingen gleichermaßen erfüllt sein müssen. Aus der Division dieser beiden Gleichungen folgt

$$-\tan \varphi = \tan(\varphi_{u\ddot{u}} - \varphi) \quad (9.109)$$

mit den Lösungen $\varphi_{u\ddot{u}} = 0$ und $\varphi_{u\ddot{u}} = 180^\circ$. Unabhängig vom Phasenverschiebungswinkel φ ergibt sich also die größte Stromspitze stets beim Einschalten im Spannungsnulldurchgang. In Bild 9.25b ist dieser Fall dargestellt. Der Wert der Stromspitze hängt vom Phasenverschiebungswinkel φ ab und erreicht für $\varphi = 90^\circ$ mit $2\hat{i}_p$ sein Maximum.

Beispiel 9.18: Einschalten einer Sinusspannung an einer RL-Reihenschaltung

Die RL-Reihenschaltung in Bild 9.24 mit den Werten $R = 7 \Omega$ und $L = 175 \text{ mH}$ wird an die Sinusspannung $U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ angeschaltet.

Gesucht sind die dem positiven Spannungsnulldurchgang nächstgelegenen Schaltwinkel φ_u , bei denen minimales bzw. maximales Überschwingen des Stroms i eintritt, sowie die zugehörigen Stromverläufe $i(t)$.

Bei $f = 50 \text{ Hz}$ hat die RL-Reihenschaltung nach Gl. (9.105) die Impedanz

$$\underline{Z} = R + j\omega L = 7 \Omega + j2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 175 \text{ mH} = 55,42 \Omega e^{j82,74^\circ} = Z e^{j\varphi}.$$

Nach Gl. (9.108) verschwinden Gleichanteil und Überschwingen für

$$\varphi_u = \varphi = 82,74^\circ = 1,444 \text{ rad}.$$

Der Strom verläuft dann, wie in Bild 9.25a dargestellt, nach der Funktion

$$i = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\omega t) = \frac{\sqrt{2} \cdot 230 \text{ V}}{55,42 \Omega} \sin(\omega t) = 5,87 \text{ A} \sin\left(0,314 \frac{t}{\text{ms}}\right).$$

Maximales Überschwingen tritt nach Gl. (9.109) beim Schaltwinkel $\varphi_u = 0$ auf.

Der Strom verläuft dann, wie in Bild 9.25b dargestellt, nach der Funktion

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(-\varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right] = 5,87 \text{ A} \left[\sin\left(0,314 \frac{t}{\text{ms}} - 1,44\right) + 0,992 e^{-\frac{t}{25 \text{ ms}}} \right].$$

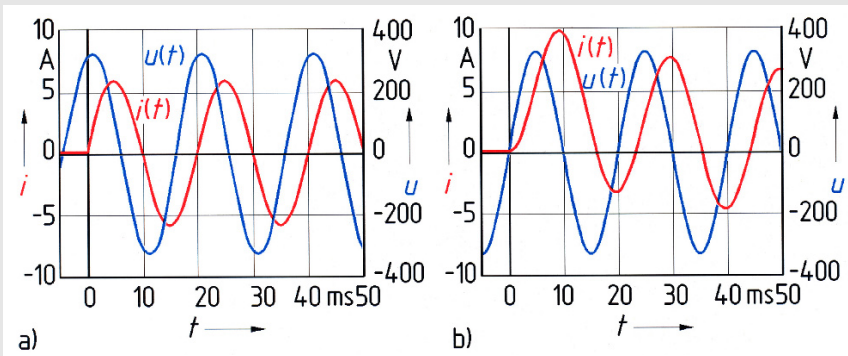


Bild 9.25: Spannung und Strom nach Einschalten einer Sinusspannung an einer RL-Reihenschaltung a) ohne Überschwingen b) mit maximalem Überschwingen

9.3.3.2 Schalten einer RC-Reihenschaltung an eine Sinusspannung

Wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Sinusspannung $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ an eine zuvor energielose RC-Reihenschaltung nach Bild 9.26a geschaltet wird, gilt mit den Gln. (9.43) und (9.64) die Maschengleichung

$$Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \varepsilon(t) \cdot \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u).$$

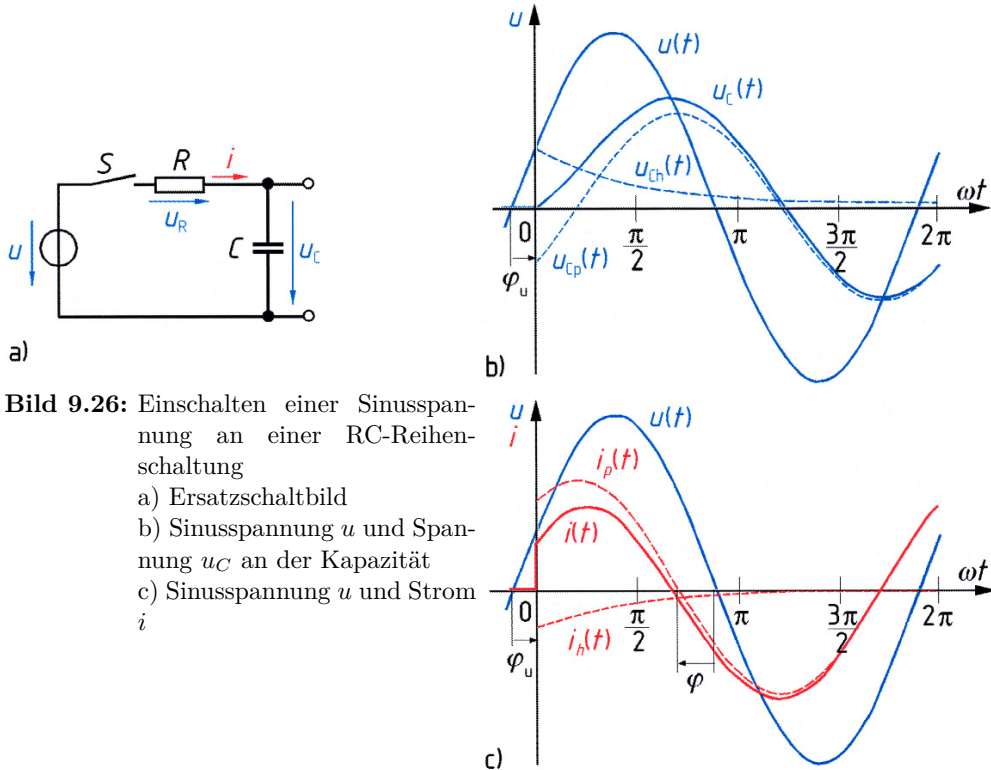


Bild 9.26: Einschalten einer Sinusspannung an einer RC-Reihenschaltung

- Ersatzschaltbild
- Sinusspannung u und Spannung u_C an der Kapazität
- Sinusspannung u und Strom i

Für $t > 0$ erhält man zur Bestimmung der Ausgangsspannung u_C die Differenzialgleichung

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{\hat{u}}{RC} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (9.110)$$

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung hat die Lösung

$$u_{Ch} = \underline{c} e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{c} e^{-\frac{1}{RC} t}. \quad (9.111)$$

Als partikuläre Lösung u_{Cp} wird die für $t \rightarrow \infty$, also im stationären Zustand, auftretende Sinusspannung verwendet, die mit Hilfe der komplexen Rechnung ermittelt wird. Die Impedanz \underline{Z} der RC-Reihenschaltung ergibt sich mit den Gln. (5.248) bis (5.250) zu

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{j \operatorname{Arctan} \frac{-1}{\omega RC}} = Z e^{j\varphi}. \quad (9.112)$$

Wie Gl. (9.112) zeigt, ist der Phasenverschiebungswinkel φ negativ. Die im stationären Zustand an der Kapazität C liegende Sinusspannung u_{Cp} wird durch den Spannungszeiger

$$\underline{U}_{Cp} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{U}{Z} = -j \frac{U e^{j\varphi_u}}{\omega CZ e^{j\varphi}} = -j \frac{U}{\omega CZ} e^{j(\varphi_u - \varphi)}$$

beschrieben. Dies entspricht der Zeitfunktion

$$u_{Cp} = -\frac{\hat{u}}{\omega CZ} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi). \quad (9.113)$$

Aus der Addition der Gln.(9.113) und (9.111) folgt die allgemeine Lösung

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ch} = -\frac{\hat{u}}{\omega CZ} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) + \underline{c} e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (9.114)$$

Da die Spannung an der Kapazität C sich nicht sprunghaft ändern kann, gilt für den Schalt Augenblick

$$u_C(t=0) = -\frac{\hat{u}}{\omega CZ} \cos(\varphi_u - \varphi) + \underline{c} = 0.$$

Aus dieser Anfangsbedingung folgt die Integrationskonstante \underline{c} , die in Gl. (9.114) eingesetzt wird. Die Spannung verläuft damit für $t > 0$ nach der in Bild 9.26b dargestellten Funktion

$$u_C(t) = u_{Cp} + u_{Ch} = \frac{\hat{u}}{\omega CZ} \left[-\cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) + \cos(\varphi_u - \varphi) e^{-\frac{1}{RC}t} \right]. \quad (9.115)$$

Der nach Gl. (9.113) im stationären Zustand auftretenden Sinusspannung u_{Cp} ist eine Spannung u_{Ch} überlagert, die exponentiell mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$ abklingt und ein Überschwingen der Spannung u_C verursacht. Dieser Anteil tritt nicht auf, wenn die Differenz von Schaltwinkel und Phasenverschiebungswinkel $\varphi_u - \varphi = \pm 90^\circ$ ist. Den größten Wert erreicht das Überschwingen bei den Schaltwinkeln $\varphi_{u\ddot{u}} = 0^\circ$ und $\varphi_{u\ddot{u}} = 180^\circ$.

Der in Bild 9.26c dargestellte Strom i ergibt sich aus Gl. (9.115) mit Gl. (9.43) zu

$$i(t) = i_p + i_h = C \frac{du_C}{dt} = \frac{\hat{u}}{Z} \left[\sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \frac{1}{\omega CR} \cos(\varphi_u - \varphi) e^{-\frac{1}{RC}t} \right]. \quad (9.116)$$

9.3.3.3 Schalten eines Reihenschwingkreises an eine Sinusspannung

Wenn man in Gl. (9.85) statt der Sprungfunktion $U \varepsilon(t)$ die Funktion $\varepsilon(t) \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ einsetzt, erhält man in Abwandlung von Gl. (9.89) für $t > 0$ die inhomogene Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\vartheta \omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega \frac{\hat{u}}{L} \cos(\omega t + \varphi_u). \quad (9.117)$$

Gl. (9.89) ist die zugehörige homogene Differenzialgleichung, bei deren Bearbeitung man zwischen dem aperiodischen und dem periodischen Fall sowie dem aperiodischen Grenzfall zu unterscheiden hat. Die Gln. (9.93), (9.99) und (9.97) geben die jeweilige Lösung an. Beispiel 9.19 zeigt für einen periodischen Fall, wie man eine partikuläre Lösung findet und die Integrationskonstanten bestimmt.

Beispiel 9.19: Einschalten einer Sinusspannung an einem elementaren RLC-Reihenschwingkreis

Der elementare, für $t < 0$ energielose Reihenschwingkreis in Bild 9.27a mit $R = 250 \Omega$, $L = 525 \text{ mH}$ und $C = 0,3 \mu\text{F}$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ beim Schaltwinkel $\varphi_u = 35^\circ$ an die Sinusspannung $U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ geschaltet.

Gesucht ist der Stromverlauf $i(t)$.

Mit den Gln. (9.87), (9.88) und (9.100) erhält man die Kennwerte

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{525 \text{ mH} \cdot 0,3 \mu\text{F}}} = 2,520 \text{ ms}^{-1},$$

$$\vartheta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{250 \Omega}{2} \sqrt{\frac{0,3 \mu\text{F}}{525 \text{ mH}}} = 0,09449,$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \vartheta^2} \omega_0 = \sqrt{1 - 0,09449^2} \cdot 2,520 \text{ ms}^{-1} = 2,508 \text{ ms}^{-1}.$$

Die Differenzialgleichung (9.117) lautet somit

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 0,4762 \text{ ms}^{-1} \frac{di}{dt} + 6,349 \text{ ms}^{-2} i = 194,6 \frac{\text{mA}}{\text{ms}^2} \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung hat nach Gl. (9.99) die Lösung

$$i_h = \left[K_1 \cos\left(2,508 \frac{t}{\text{ms}}\right) + K_2 \sin\left(2,508 \frac{t}{\text{ms}}\right) \right] e^{-0,2381 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

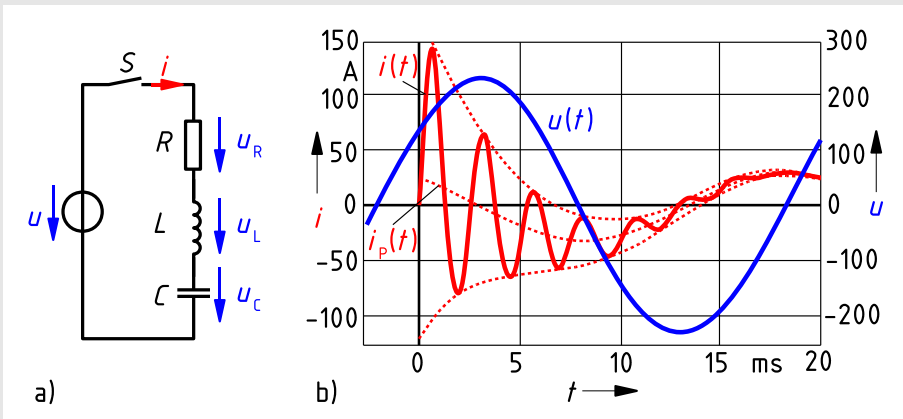


Bild 9.27: Schalten einer Sinusspannung an einen Reihenschwingkreis

a) Ersatzschaltbild, b) Spannungs- und Stromverlauf

Als partikuläre Lösung i_p wird der für $t \rightarrow \infty$ fließende Sinusstrom verwendet. Mit der Impedanz des Reihenschwingkreises

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 250 \Omega - j10,445 \text{ k}\Omega = 10,448 \text{ k}\Omega e^{-j88,63^\circ} = Z e^{j\varphi}$$

erhält man den Stromzeiger

$$\underline{i}_p = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{230 \text{ V } e^{j35^\circ}}{10,448 \text{ k}\Omega e^{-j88,63^\circ}} = 22,01 \text{ mA } e^{j123,63^\circ}.$$

Dies entspricht der Zeitfunktion

$$i_p = \sqrt{2} \cdot 22,01 \text{ mA } \sin(\omega t + 123,63^\circ) = 31,13 \text{ mA } \cos(\omega t + 33,63^\circ).$$

Die beiden Integrationskonstanten K_1 und K_2 in der allgemeinen Lösung $i = i_p + i_h$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Wegen der Induktivität L kann sich der Strom i im Schalt Augenblick nicht sprunghaft ändern. Hieraus folgt

$$i(t=0) = 31,13 \text{ mA } \cos(33,63^\circ) + K_1 = 0$$

und $K_1 = -25,92 \text{ mA}$. Da im Schalt Augenblick sowohl die Spannung u_C an der Kapazität C als auch wegen $i(t=0) = 0$ die Spannung u_R am Widerstand R null sind, liegt zunächst die gesamte Spannung u an der Induktivität L . Aus dieser Anfangsbedingung folgt mit Gl. (9.41)

$$u_L(t=0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \hat{u} \sin \varphi_u = \sqrt{2} U \sin \varphi_u.$$

Wenn man die Differenziation durchführt und die vorgegebenen Werte einsetzt, erhält man $525 \text{ mH}(-0,3142 \text{ ms}^{-1} 31,13 \text{ mA } \sin 33,63^\circ + 2,508 \text{ ms}^{-1} K_2 + 0,2381 \text{ ms}^{-1} 25,92 \text{ mA}) = 186,6 \text{ V}$.

Hieraus folgt für die zweite Integrationskonstante $K_2 = 141,4 \text{ mA}$. Nach Einsetzen beider Integrationskonstanten in die allgemeine Lösung $i = i_p + i_h$ erhält man

$$i(t) = 31,13 \text{ mA } \cos(\omega t + 33,63^\circ) + \left[-25,92 \text{ mA } \cos\left(2,508 \frac{t}{\text{ms}}\right) + 141,4 \text{ mA } \sin\left(2,508 \frac{t}{\text{ms}}\right) \right] e^{-0,2381 \frac{t}{\text{ms}}}$$

und nach Zusammenfassung der Kosinus- und der Sinus-Funktion in der eckigen Klammer den in Bild 9.27b gezeigten Stromverlauf

$$i(t) = 31,1 \text{ mA } \cos\left(0,314 \frac{t}{\text{ms}} + 33,6^\circ\right) + 144 \text{ mA } \sin\left(2,51 \frac{t}{\text{ms}} - 10,4^\circ\right) e^{-0,238 \frac{t}{\text{ms}}}.$$

9.3.3.4 Ausschalten von Sinusströmen

Da sinusförmiger Wechselstrom in jeder Periode zweimal null wird, kann man ihn viel einfacher als Gleichstrom abschalten. Es ist nur notwendig, nach dem Nulldurchgang des Stroms ein Wiederzünden des Lichtbogens zu verhindern, z. B. durch großen Schaltkontaktabstand oder durch Kühlen und somit Entionisieren der Lichtbogenstrecke.

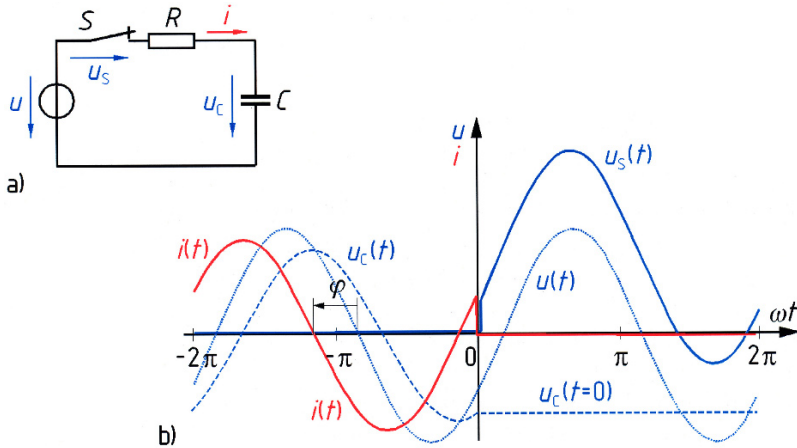


Bild 9.28: Abschalten eines Sinusstroms an einer RC-Reihenschaltung
a) Ersatzschaltbild, b) Strom- und Spannungsverläufe

Mit Bild 9.28 wird ein einfaches Beispiel betrachtet.

Vor dem Öffnen des Schalters S besteht zwischen der Sinusspannung $u(t)$ und dem Sinusstrom $i(t)$ der (negative) Phasenverschiebungswinkel φ . Die Spannung $u_C(t)$ an der Kapazität C eilt dem Strom $i(t)$ um 90° nach.

Nach Öffnen zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt nach der Maschengleichung am Schalter die Spannung $u_s = u - u_C$ auf, die sich, wie Bild 9.28b zeigt, aus der sinusförmigen Quellenspannung u und dem Augenblickswert $u_C(t = 0)$ ergibt, den die Spannung an der Kapazität im Schalt Augenblick hat.



10 Elektrische Leitungsmechanismen

In Abschnitt 1.2.2 ist der Mechanismus der elektrischen Strömung, die Art der den Strom repräsentierenden bewegten Ladungsträger, sowie die Einteilung der Substanzen in Leiter und Nichtleiter bereits kurz und phänomenologisch erläutert worden. In diesem Kapitel sollen, ausgehend von den physikalischen Grundgesetzen der Materie, die Leitungsmechanismen begründet und die daraus folgenden makroskopischen Gesetzmäßigkeiten entwickelt werden. Dabei werden die physikalischen Substanzen bzgl. ihres Leitfähigkeitsverhaltens in der Reihe zunehmenden Ordnungsgrades, d. h. in der Folge Vakuum-Gase-Flüssigkeiten-Festkörper betrachtet.

10.1 Elektrische Leitung im Vakuum

Unter „Vakuum“ ist im Folgenden nicht der „leere Raum“ gemeint – der sich technisch gar nicht realisieren lässt und daher für den Ingenieur uninteressant ist – sondern ein Raum, in dem die Anzahl der Gas-Atome oder -Moleküle bzw. ihr Druck p so gering und daher ihr gegenseitiger Abstand so groß ist, dass sie die Bewegung eines Ladungsträgers durch diesen Raum hindurch praktisch nicht beeinflussen. Das ist sicher der Fall, wenn der statistische Mittelwert dieses Abstandes, die *mittlere freie Weglänge* $\Lambda \sim 1/p$, groß ist gegen die Abmessung des Raumes in der Bewegungsrichtung des Ladungsträgers (Tabelle 10.1). Unterhalb von etwa $p = 10^{-3}$ mbar = 0,1 Pa spricht man von Hochvakuum.

Tabelle 10.1: Mittlere freie Weglänge Λ verschiedener edler und unedler Gase bei $T = 273$ K und bei einem Druck von $p = 1$ mbar (nach [Eic81])

Gas	He	Ne	Xe	H ₂	N ₂	CO ₂
$\Lambda/\mu\text{m}$	175	125	37	108	59	47

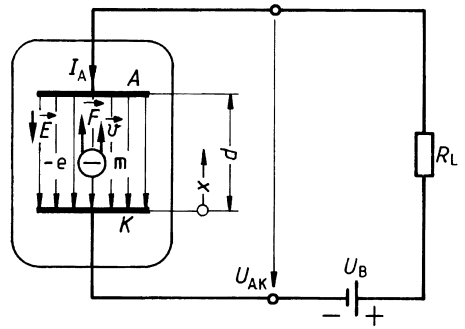
Eine elektrische Strömung im technischen Vakuum wird meist ausschließlich durch bewegte *Elektronen* bewirkt, die von außen in diesen Raum eingebracht werden müssen (Abschnitt 10.1.1). Die Erzeugung positiver Ionen durch Aufprall von Elektronen auf neutrale Gasteilchen kann vernachlässigt werden.

Von der Elektronenleitung im technischen Vakuum wird in vielen Bereichen der Elektrotechnik Gebrauch gemacht, z. B. in gittergesteuerten Elektronen- und Laufzeit-Röhren (Verstärker und Oszillatoren), in Röntgenröhren, Plasma-Displays, in Elektronenstrahl-Wandlerröhren als Oszillographenröhren und in Elektronenmikroskopen.

10.1.1 Elektronenemission in das Vakuum

Die zur elektrischen Leitung erforderlichen Elektronen werden in der Regel aus festen Körpern gewonnen. Darin sind die Elektronen durch Kräfte an die Atomrümpfe gebunden, sodass an ihnen eine bestimmte Arbeit zu leisten ist (*Austrittsarbeit* W), damit sie die anziehende Kraft nach dem Körperinnern hin überwinden und über die Oberfläche des Körpers austreten können. Diese *Emission* kann auf verschiedene Weise erreicht werden.

Bild 10.1: Elektron im Innern eines Plattenkondensators im Vakuum zwischen Anode A und Kathode K (Zweielektrodenröhre, Vakuum-Diode)
 U_B Betriebsspannung
 R_L Lastwiderstand



Bei der am häufigsten (z. B. in Elektronenröhren) angewandten *thermischen Emission* wird durch Erhitzen einer *Kathode K* (Bild 10.1) die im Innern des Kathodenmaterials bestehende Geschwindigkeitskomponente v der Elektronen senkrecht zur Oberfläche so weit erhöht, dass einige von ihnen entsprechend der Kraft \vec{F} die Barriere „Austrittsarbeit W “ überwinden können. Die Zahl der emittierten Elektronen nimmt dabei mit der Kathodentemperatur T_K zu. Durch eine positive Spannung U_{AK} an der der Kathode im Abstand d gegenüberliegenden Elektrode (*Anode A*) werden diese Elektronen zur Anode hin beschleunigt und dort aufgefangen: Durch das Vakuum fließt also ein Strom. Die Größe des Stroms ist von der Temperatur T_K und der anliegenden Spannung U_{AK} abhängig (Abschnitt 10.1.3.1).

Der Vorgang ist vergleichbar dem Verdampfen einer Flüssigkeit, wobei dem Dampf hier die austretenden Elektronen entsprechen. Der Verdampfungswärme der Flüssigkeit entspricht die Austrittsarbeit. Tabelle 10.2 gibt eine Übersicht über Austrittsarbeiten und Betriebstemperaturen einiger Kathoden.

Tabelle 10.2: Austrittsarbeit W und Betriebstemperatur T_K einiger Kathodenmaterialien (nach [Eic81])

	Massiv-Kathoden				
Material	W	Mo	Ta	Th	Ba
W/eV	4,5	4,2	4,1	3,4	2,5
T_K/K	2500	2300	2100	1500	800

	Atomfilm-Kathoden			Oxid-Kathoden		
Material	W + Th	W + Ba	W-O-Ba	BaO + SrO auf		ThO auf W
				Ni	W	
W/eV	2,6	1,6	1,3	1,0	1,6	1,0 ... 1,5
T_K/K	1900	1000	1000	1100	1400	1800

Auch durch Einfall von Licht geeigneter Wellenlänge λ können Elektronen aus einem Festkörper emittiert werden. Diese *Photoemission* setzt ein, wenn die Energie E eines in den Festkörper (Metall oder Halbleiter) eindringenden Lichtquants (Photon) größer ist als die Austrittsarbeit W eines Elektrons, d. h.

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c_0}{\lambda} > W \quad \text{bzw.} \quad \lambda < \frac{h \cdot c_0}{W} = \frac{1,24 \mu\text{m}}{\frac{W}{eV}} .$$

$h = 6,626\,068\,96 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ Plancksches Wirkungsquantum,

$c_0 = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Zur Einheit eV siehe Tabelle 1.2. Da die Austrittsarbeit W nach Tabelle 10.2 einige eV beträgt, kann mit sichtbarer, ultravioletter oder Röntgenstrahlung Photoemission bewirkt werden. Anwendung findet sie z. B. in Photodioden, Phototransistoren, Photoelementen und Solarzellen.

Ein Elektron mit einer Energie von mindestens 10 eV löst beim Auftreffen auf einen Festkörper *Sekundärelektronen* aus. Der optimale *Vervielfachungsfaktor* δ liegt bei Graphit, Alkali- und Erdalkali-Metallen unter 1, bei allen anderen Metallen zwischen 1 und 3 und erreicht bei Halbleitern und Isolatoren Werte von 3 ... 20. Von der Sekundärelektronenvervielfachung wird z. B. im Photomultiplier Gebrauch gemacht.

Wenn an einer Metalloberfläche eine Feldstärke von der Größenordnung 10^9 V/m herrscht (z. B. an einer feinen Drahtspitze, daher auch die Bezeichnung *Spitzeneffekt*), emittiert sie auf Grund der hohen Feldstärke Elektronen. Praktische Anwendung findet diese *Feldemission* – die nur wellenmechanisch verstanden werden kann – in elektronenoptischen Geräten, wie z. B. in der Elektronenstrahl-Mikroskopie und -Lithographie. Letztere wird zur Herstellung integrierter Halbleiterschaltungen (Abschnitt 10.5.6) eingesetzt.

10.1.2 Elektronenströmung im Vakuum

In der Regel werden die Elektronen am Ende ihres Weges durch das Vakuum von einer (meist metallischen) Elektrode (Anode) aufgenommen. Dementsprechend soll die Bewegung eines Elektrons durch das Vakuum an dem in Bild 10.1 dargestellten einfachen Modell untersucht werden.

Wenn zwischen Anode A und Kathode K eine Spannung $U_{AK} > 0$ liegt, besteht im Raum zwischen den als planparallel angenommenen Elektroden bei Vernachlässigung von Randeffekten ein homogenes elektrisches Feld \vec{E} . Dieses übt auf ein im Raum befindliches Elektron die konstante Kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ in Richtung auf die Anode A aus. Wenn die Kathode dauernd geheizt wird und somit ständig Elektronen nachliefert, ist der gesamte Raum von einer Elektronenströmung erfüllt. Über größere Strecken spreizt sich diese Elektronenströmung durch die gegenseitige elektrostatische Abstoßung der Elektronen auf; dem kann durch (magnetische) Bündelung entgegengewirkt werden (Abschnitt 10.1.2.2). Eine solche gebündelte Elektronenströmung wird als *Elektronenstrahl* bezeichnet. Dieser ist in unserem Modell geradlinig. Bei manchen Anwendungen ist er kreisförmig (z. B. Magnetron [GF83]) oder schraubenförmig (Gyrotron [LBL08]).

Zunächst sollen die Gesetzmäßigkeiten der Bewegung eines einzelnen Elektrons der Strömung im elektrischen und magnetischen Feld beschrieben werden, wobei die Beeinflussung durch alle übrigen Elektronen vernachlässigt wird. FF

10.1.2.1 Bewegung im elektrischen Feld

In der in Bild 10.1 dargestellten Anordnung besteht zwischen den beiden planparallelen Elektroden mit dem gegenseitigen Abstand d bei Anlegen der Spannung U_{AK} zwischen Anode und Kathode das näherungsweise homogene Feld

$$E_x = -U_{AK}/d. \quad (10.1)$$

Das Feld übt auf ein Elektron die Kraft

$$F_x = -e E_x = +e U_{AK}/d \quad (10.2)$$

in x -Richtung aus, durch die es auf die positive Anode hin beschleunigt wird. Der Bewegungsablauf wird durch die *Bewegungsgleichung*

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft} \quad (10.3)$$

$$m_e \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e U_{AK}}{d} \quad (10.4)$$

beschrieben, in der $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ As der Betrag der Elektronenladung und

$$m_e = 9,109\,382\,91 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

die *Ruhemasse des Elektrons* sind. Durch einmalige Integration der Bewegungsgleichung (10.4) erhalten wir die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{e U_{AK}}{m_e d} t + \text{const.} \quad (10.5)$$

Die Integrationskonstante wird durch die Vorgabe festgelegt, dass beim Start des Elektrons aus der Kathode ($t = t_1$) die Geschwindigkeit $v = v_1$ ist. Das liefert

$$v(t) = \frac{e U_{AK}}{m_e d} \cdot (t - t_1) + v_1. \quad (10.6)$$

Wie nach Gl. (10.14) gezeigt wird, darf v_1 meist vernachlässigt werden. Dann liefert die nochmalige Integration der Gl. (10.6)

$$x(t) = \frac{e \cdot U_{AK}}{2 m_e \cdot d} \cdot (t - t_1)^2. \quad (10.7)$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, dass der Startort in der Ebene $x = 0$ liegt. Aus Gl. (10.7) kann der Zeitpunkt t_2 berechnet werden, zu dem das Elektron die Anode erreicht ($x = d$)

$$d = \frac{e \cdot U_{AK}}{2 m_e d} \cdot (t_2 - t_1)^2 \quad (10.8)$$

und damit die *Laufzeit* $\tau = t_2 - t_1$ zum Durchqueren der Strecke Kathode-Anode

$$\tau = \sqrt{\frac{2 m_e \cdot d^2}{e \cdot U_{AK}}}. \quad (10.9)$$

Nach Einsetzen der Naturkonstanten e und m_e folgt

$$\tau = 3,37 \frac{d}{\text{m}} \sqrt{\frac{\text{V}}{U_{AK}}} \mu\text{s}. \quad (10.10)$$

Gl. (10.8) ist analog derjenigen für die Fallhöhe $h = g \tau^2 / 2$ im Schwerfeld der Erde. Das ist natürlich nicht überraschend, da die dortige Bewegungsgleichung formal mit Gl. (10.4) übereinstimmt; dabei entspricht die Größe $e U_{AK} / m_e d$ der Fallbeschleunigung g .

Beispiel 10.1: Elektronenlaufzeit in einer Zweielektrodenröhre

Für den Abstand $d = 5 \text{ mm}$ der gegenüberstehenden ebenen Plattenanordnung nach Bild 10.1 ist die Elektronenlaufzeit τ zu berechnen, wenn die Spannung $U_{\text{AK}} = 250 \text{ V}$ beträgt.

Nach Gl. (10.10) gilt für die Elektronenlaufzeit im Rahmen der verwendeten Näherungen

$$\tau = \frac{3,37 (d/\text{m})}{\sqrt{U_{\text{AK}}/\text{V}}} \mu\text{s} = \frac{3,37 \cdot 0,005}{\sqrt{250}} \mu\text{s} = 1,07 \text{ ns}.$$

Die Elektronenlaufzeit ist also sehr kurz und kann daher häufig vernachlässigt werden. Folglich darf der Stromdurchgang durch das Vakuum oftmals näherungsweise als trägheitslos angesehen werden. Dies ist für die Steuerung von Elektronenstrahlen in Elektronenröhren, Kathodenstrahl-Oszilloskopen etc. von großer Bedeutung.

Der Vorgang kann jedoch nicht mehr als trägheitslos behandelt werden, wenn die Elektronenlaufzeit in die Größenordnung der Periodendauer einer der Gleichspannung U_{AK} überlagerten Wechselspannung fällt (in Beispiel 10.1 also für $f > 1 \text{ GHz}$). Dann treten *Laufzeiteffekte* auf, die den Bewegungsvorgang der Elektronen wesentlich ändern und der Anwendung gittergesteuerter Elektronenröhren (Abschnitt 10.1.3.2) frequenzmäßig eine obere Grenze setzen. Dagegen beruht die Wirkungsweise der *Laufzeitröhren* (Wanderfeldröhren, Magnetron, (Reflex-) Klystron, Gyrotron) gerade auf dem Vorhandensein endlicher Laufzeiten. Diese Röhren spielen in der Mikrowellentechnik als Verstärker und Oszillatoren eine wichtige Rolle [GF83], [LBL08].

Elektronen-Geschwindigkeit

Nach Gl. (10.6) erreicht das Elektron die Anode zur Zeit $t = t_2$ mit der Geschwindigkeit

$$v_2 = v(t_2 = t_1 + \tau) = \frac{e U_{\text{AK}}}{m_e d} \tau, \quad (10.11)$$

sofern v_1 vernachlässigt werden kann. In Verbindung mit Gl. (10.9) folgt daraus

$$\frac{1}{2} m_e v_2^2 = e U_{\text{AK}}. \quad (10.12)$$

In dieser Schreibweise ist einfach der *Energieerhaltungssatz* zu erkennen, der in der Bewegungsgleichung (10.4) implizit enthalten ist: Wenn das Elektron die Potenzialdifferenz U_{AK} durchlaufen hat, so hat ihm das elektrische Feld die Energie $e U_{\text{AK}}$ zugeführt. Diese bewirkt eine gleich große Zunahme der kinetischen Energie vom Anfangswert $m_e v_1^2/2 (\approx 0)$ auf $m_e v_2^2/2$. Aus Gl. (10.12) folgt

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 e U_{\text{AK}}}{m_e}} \quad (10.13)$$

und nach Einsetzen der Naturkonstanten e und m_e

$$v_2 = 593 \sqrt{\frac{U_{\text{AK}}}{\text{V}}} \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (10.14)$$

Sofern die nach dieser Gleichung berechneten v_2 -Werte sehr viel größer sind als die *mittlere Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen* aus der Kathode $\sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k T_k}{m_e}}$ ($\approx 180 \text{ km/s}$ bei $T_k = 1300 \text{ K}$), ist die Vernachlässigung der Startgeschwindigkeit v_1 gerechtfertigt. Das ist schon bei Spannungen U_{AK} von wenigen Volt der Fall.

Beispiel 10.2: Elektronengeschwindigkeit in einer Elektronenstrahlröhre

In einer Elektronenstrahlröhre werden die Elektronen durch Spannungen von meist etlichen kV beschleunigt. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit nach dem Durchlaufen von $U = 10 \text{ kV}$?

Aus Gl. (10.14) erhält man die Geschwindigkeit

$$v = 593\sqrt{U/V}(\text{km/s}) = 593\sqrt{10000} \text{ km/s} \approx 60.000 \text{ km/s},$$

also rund 1/5 der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 . Bei dieser weicht die Masse m des Elektrons schon um einige Prozent von seiner Ruhemasse m_e ab.

Die Gl. (10.14) gilt entsprechend ihrer Herleitung nur, wenn die Masse des Elektrons von seiner Geschwindigkeit v unabhängig ist. Das ist nach der Relativitätstheorie nur für $v \ll c_0$ der Fall, denn für die *wirksame Masse eines Elektrons* gilt allgemein

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}. \quad (10.15)$$

Dementsprechend lautet die Bewegungsgleichung

zeitliche Änderung des Impulses = Kraft

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{eU_{AK}}{d}.$$

Aus ihr folgt durch Integration längs des Elektronenweges von der Kathode zur Anode (als Ergebnis einer hier nicht wiedergegebenen Rechnung)

$$(m - m_e)c_0^2 = eU_{AK}$$

bzw.

$$m c_0^2 = eU_{AK} + m_e c_0^2. \quad (10.16)$$

Danach setzt sich die Gesamtenergie $m c_0^2$ des Elektrons aus der ihm im elektrischen Feld zugeführten Energie eU_{AK} und der Ruheenergie $m_e c_0^2$ ($= 0,512 \text{ MeV}$) zusammen.

Aus Gl. (10.16) folgt mit Gl. (10.15) nach einer längeren Rechnung

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU_{AK}}{m_e c_0^2}\right)^2}} \cdot c_0. \quad (10.17)$$

Für die im Beispiel 10.2 gewählte Spannung $U_{AK} = 10 \text{ kV}$ ist v nach Gl. (10.17) um 1,5 % kleiner als der nach Gl. (10.14) berechnete Wert. Die *relativistische Korrektur* ist also praktisch noch vernachlässigbar. Dagegen muss sie bei Teilchenbeschleunigern unbedingt berücksichtigt werden, da die dort erreichbaren Geschwindigkeiten dicht unter der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit liegen.

Ablenkung durch ein elektrisches Feld

Bei vielen technischen Anwendungen von Elektronenstrahlen werden die Elektronen aus einer ursprünglichen geradlinigen Bahn ausgelenkt. Dies ist durch elektrische bzw. magnetische Felder möglich, die Komponenten senkrecht bzw. parallel zur Bewegungsrichtung der Elektronen haben.

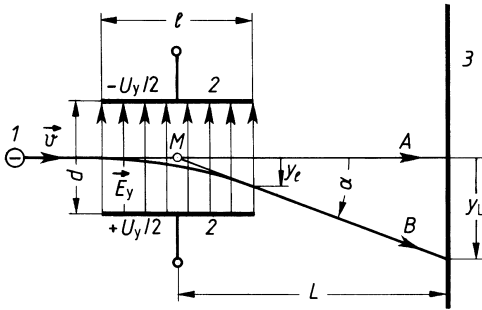


Bild 10.2: Ablenkung eines Elektronenstrahls 1 durch Ablenkplatten 2 um die Strecke y_L in der Ebene 3

Bild 10.2 zeigt eine solche Ablenkung von ursprünglich in z -Richtung fliegenden Elektronen 1 durch ein von der Spannung U_y erzeugtes elektrisches *Querfeld* E_y zwischen den Elektroden 2 (Ablenkplatten der Länge l im Abstand d). Dieses Feld überlagert der Elektronen- oder Strahl-Geschwindigkeit $v_z = \sqrt{2 \frac{e}{m_e} U_z}$ eine senkrecht wirkende Querkomponente v_y , die von der durchlaufenen Querspannung U_y bzw. Querfeldstärke E_y und der Laufzeit τ der Elektronen durch den Ablenkbereich abhängt. Für die Ablenkung y_L aus der ursprünglichen Richtung (A) in die um den Winkel α geneigte Richtung B im Abstand L von der Mitte M der Ablenkplatten sind außer den wirkenden Spannungen U_z und U_y auch die Abmessungen des Ablenksystems maßgebend. Die Lösung der (hier zweidimensionalen) Bewegungsgleichung liefert [Eic81]

$$y_L = \frac{l/2}{d} L \frac{U_y}{U_z}. \tag{10.18}$$

Die Größe y_L/U_y wird als *Ablenkempfindlichkeit* bezeichnet, ihr Kehrwert als *Ablenkkoeffizient*.

Wenn anstelle der Gleichspannung U_y eine Sinusspannung $\hat{u}_y \cos(\omega t + \varphi)$ zwischen den Ablenkplatten liegt, reduziert sich die Ablenkempfindlichkeit \hat{y}_L/\hat{u}_y gegenüber dem Wert nach Gl. (10.18) gemäß

$$\frac{\hat{y}_L}{\hat{u}_y} = \frac{y_L}{U_y} \cdot \frac{\sin \frac{\pi \cdot \tau}{T}}{\frac{\pi \cdot \tau}{T}}, \tag{10.19}$$

($\tau = l/v_y$ Laufzeit im Ablenkraum, $T = 2\pi/\omega$ Periodendauer der anliegenden Sinusspannung), wie hier ohne Beweis angegeben wird.

Durch veränderte Formgebung der Ablenkungsanordnung (geneigte, gekrümmte, geknickte Ablenkplatten, Laufzeit-Ablenkelektroden) kann erreicht werden, dass diese Verringerung erst im GHz-Gebiet nennenswert ist.

Anwendung findet die Ablenkung durch ein elektrisches Feld in Oszillographenröhren und in der Elektronenoptik (Abschnitt 10.1.3.3). Ihr Vorteil liegt darin, dass die Steuerung des Elektronenstrahls durch eine Spannung bis zu verhältnismäßig hohen Frequenzen praktisch leistungslos möglich ist. Nachteilig ist die geringe Ablenkempfindlichkeit.

Beispiel 10.3: Ablenkempfindlichkeit einer Oszillographenröhre

Wie groß ist die stationäre Ablenkempfindlichkeit y_L/U_y für eine Oszillographenröhre mit $L = 20$ cm, $l = 4$ cm, $d = 1$ cm und $U_z = 1600$ V?

Bis zu welcher Frequenz $f = 1/T$ ist die Reduktion der dynamischen Ablenkempfindlichkeit \hat{y}_L/\hat{u}_y gegenüber dem stationären Wert kleiner als 5 %?

Aus Gl. (10.18) folgt

$$\frac{y_L}{U_y} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \cdot 20 \text{ cm} \cdot \frac{1}{1600 \text{ V}} = \frac{1}{40} \frac{\text{cm}}{\text{V}}.$$

Nach Gl. (10.19) führt die Forderung

$$\frac{\sin \frac{\pi \cdot \tau}{T}}{\frac{\pi \cdot \tau}{T}} = 0,95$$

auf $\pi\tau/T = 0,5477$ und mit Gl. (10.14) wegen

$$\tau = \frac{l}{v_y} = \frac{4 \text{ cm}}{593 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 40} = 1,686 \text{ ns}$$

auf

$$\frac{l}{T} = f = \frac{0,5477}{\pi \cdot \tau} = 103 \text{ MHz}.$$

10.1.2.2 Bewegung im magnetischen Feld

Nach Abschnitt 4.1.2.1 übt ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung Q die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (10.20)$$

aus (Bild 10.3a). Dies gilt natürlich für Elektronen in einem elektrischen Leiter, aber auch für ein einzelnes Elektron im Vakuum und für einen ganzen Elektronenstrahl.

Die *Bewegungsgleichung* lautet für ein Elektron im magnetischen Feld gemäß Gl. (10.20)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (10.21)$$

Ablenkung durch ein magnetisches Feld

Da in der hier betrachteten Anordnung die Kraft \vec{F} auf der Bewegungsrichtung \vec{v} senkrecht steht, kann das Magnetfeld dem Elektron weder Energie zuführen noch ihm entziehen. Es bewirkt lediglich eine Änderung der Bewegungsrichtung unter Beibehalt des Betrags $|\vec{v}|$ der Geschwindigkeit.

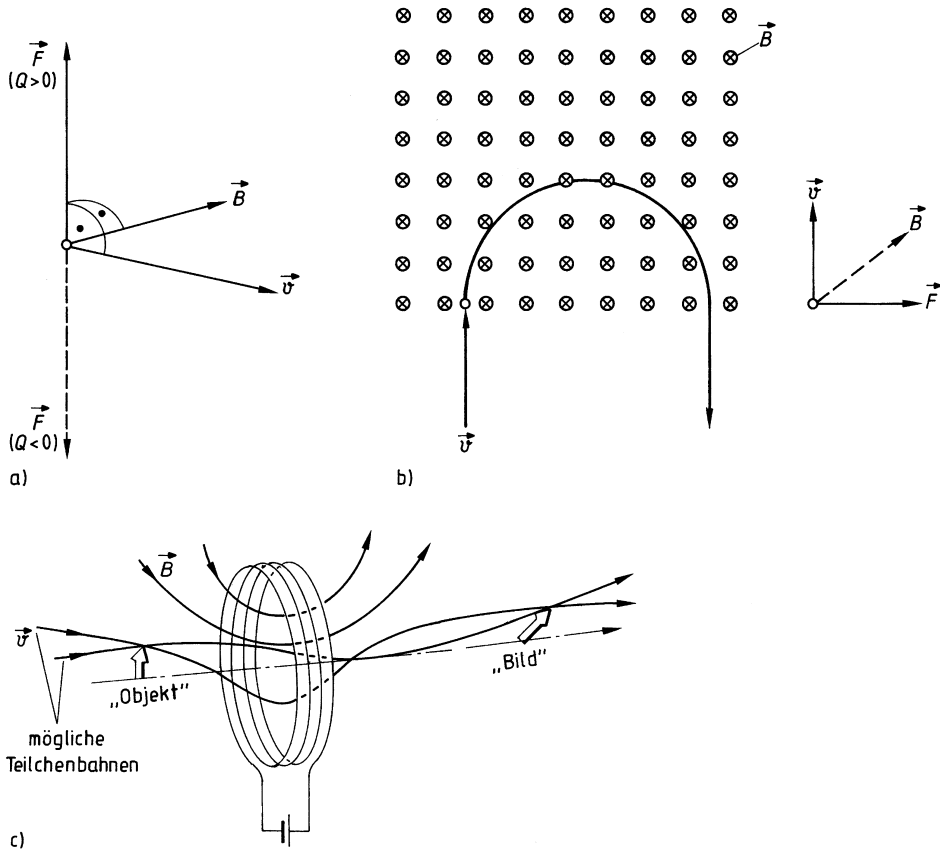


Bild 10.3: Elektronenbewegung im Magnetfeld

- a) Lorentz-Kraft \vec{F}
- b) Ablenkung eines Elektrons im Magnetfeld (aus [ZB99])
- c) Teilchenbahnen und Feldverlauf in einer „dünnen“ magnetischen Linse aus dem Solenoidfeld einer stromdurchflossenen Spule (aus [EH89])

Beispiel 10.4: Kreisbahn eines Elektronenstrahls im homogenen Magnetfeld

Ein geradliniger Elektronenstrahl, der die Spannung $U = 100 \text{ V}$ durchlaufen hat, tritt senkrecht in ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte $B = 10^{-2} \text{ T}$ ein und wird dadurch auf eine Kreisbahn geführt (Bild 10.3b). Wie groß sind der Radius r der Kreisbahn und die Umlaufzeit t_u ?

Die Bestimmungsgleichung für den *Bahnradius* r folgt aus der Gleichheit der Beträge von *Zentrifugal- und Lorentz-Kraft* nach Gl.(10.20):

$$\frac{m v^2}{r} = e v B$$

Hieraus folgt

$$r = \frac{m v}{e B}.$$

Da für die vorgegebene Spannung U die Elektronengeschwindigkeit $v \ll c$ ist, kann $m = m_e$ gesetzt werden. Unter Berücksichtigung von Gl. (10.13) und nach Einsetzen der Zahlenwerte für m_e und e erhält man

$$r = \frac{m_e}{e} \cdot \frac{v}{B} = 3,37 \cdot \frac{\sqrt{U/V}}{B/T} \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

also in unserem Fall $r = 0,337 \text{ cm}$. Die *Umlaufzeit* ist

$$t_u = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m_e}{e \cdot B} = \frac{3,57 \cdot 10^{-2}}{B/T} \text{ ns}.$$

d. h. unabhängig von v . In unserem Fall ist $t_u = 3,57 \text{ ns}$.

Technische Anwendungsgebiete sind die Elektronenoptik (magnetische Linsen, s. Bild 10.3c) und Mikrowellenröhren. In letzteren wird der Effekt in zweierlei Hinsicht genutzt: einmal zur Erzeugung der für den Verstärker- bzw. Oszillatorbetrieb erforderlichen gekrümmten Elektronenbahnen (z. B. Gyrotron, Magnetron), weiterhin zum Ändern zur Strahlfokussierung (z. B. Wanderfeldröhre): Lange Elektronenstrahlen (z. B. 15 cm) hoher Stromdichte haben die Tendenz, infolge der elektrostatischen Abstoßung der Elektronen zu divergieren. Eine radiale Geschwindigkeitskomponente in Verbindung mit einem axialen Magnetfeld eines Permanentmagneten oder stromdurchflossener Zylinderspulen führt zu einer kreisförmigen Bahnkomponente senkrecht zur Strahlrichtung und in Verbindung mit der axialen Geschwindigkeitskomponente insgesamt zu Spiralbahnen, womit die Aufweitung (Divergenz) des Strahls vermieden wird.

10.1.3 Technische Nutzung

Neben den schon stichwortartig angedeuteten Anwendungen sollen hier einige weitere Beispiele etwas ausführlicher dargestellt werden. Wegen detaillierter Darstellungen des Themas „Elektrische Leitung im Vakuum“ sei auf [Eic81], [GF83], [LBL08], [ZB99] verwiesen.

10.1.3.1 Elektronenröhre ohne Gitter

Die in Bild 10.1 dargestellte Anordnung eines im Vakuum befindlichen Plattenkondensators entspricht der Grundform einer Zweielektrodenröhre (Vakuum-Diode). Sie bildet zum einen das Grundelement der gittergesteuerten Elektronenröhren (Abschnitt 10.1.3.2) und ist zum anderen ein wesentlicher Bestandteil von Strahlerzeugungssystemen der Vakuumelektronik (z. B. Elektronenoptik, Laufzeitröhren, Beschleuniger).

In der oben genannten Anordnung entsteht noch kein stark fokussierter Elektronenstrahl wie bei der Oszilloskopröhre (Abschnitt 10.1.3.3), sondern die Elektronen wandern auf breiter Front von der geheizten Kathode zu der in geringer Entfernung benachbarten (kalten) Anode. In der praktischen Ausführung besteht die Anode aus einem Zylinder, welcher die ebenfalls zylindrische Kathode konzentrisch umgibt (Bild 10.4a).

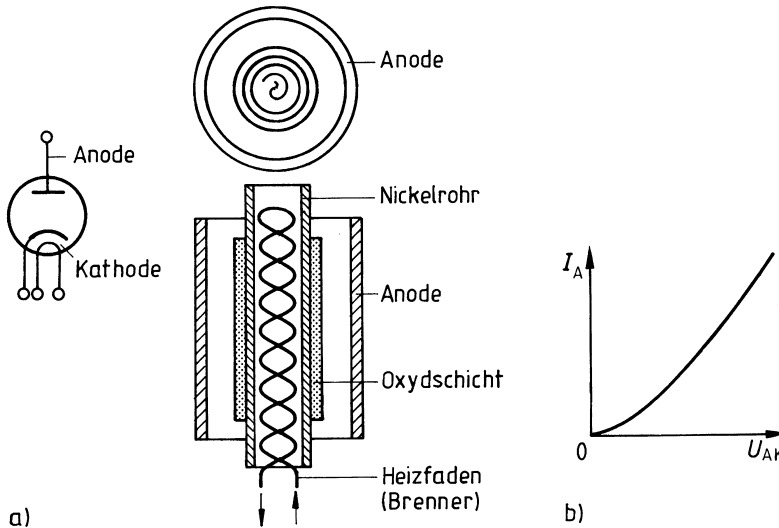


Bild 10.4: Vakuum-Diode mit indirekt geheizter Kathode (aus [ZB99])
 a) Schaltzeichen und Aufbau
 b) Kennlinie $I_A(U_{AK})$ im Raumladungsgebiet

Charakteristisch für das Betriebsverhalten der Vakuum-Diode ist, dass bei Anlegen einer Anodenspannung $U_{AK} > 0$ nicht alle emittierten Elektronen auch die Anode erreichen – was einen von U_{AK} unabhängigen Anodenstrom I_A zur Folge hätte – sondern dass bei schrittweiser Erhöhung von U_{AK} der sich jeweils einstellende Gleichstrom I_A ebenfalls (und zwar nichtlinear bzgl. U_{AK}) größer wird (Bild 10.4b). Das liegt daran, dass die Elektronenströmung nicht nur durch das von U_{AK} erzeugte Feld bestimmt wird, sondern auch durch das Feld, welches die von der Kathode emittierten negativ geladenen Elektronen infolge ihrer Raumladung selbst erzeugen. Dieses *Raumladungsfeld* schwächt vor der Kathode das durch die Anodenspannung bewirkte Feld. Sofern die Startgeschwindigkeit vernachlässigt wird, kompensieren sich an der Kathode beide Felder, sodass dort $E = 0$ ist. Mit dieser Randbedingung ist jetzt die Bewegungsgleichung

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E \quad (10.22)$$

zu lösen, in der das resultierende Feld E (im Gegensatz zu Gl. (10.2)) inhomogen ist. Die Lösung geschieht wie folgt: Zwischen der Kathode und einer Ebene x im *Entladungsraum* befindet sich nach Gl. (3.76) die Ladung

$$Q(x) = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(x) \cdot A - D(0) \cdot A;$$

nach den Gln. (3.26a) und (3.27) ist $D = \varepsilon_0 E$, d. h. hier $D(0) = \varepsilon_0 E(0) = 0$, also

$$Q(x) = \varepsilon_0 E(x) A. \quad (10.23)$$

Andererseits ist

$$Q(x) = A \int_0^x \varrho(x') dx', \quad (10.24)$$

wobei die Raumladungsdichte $\varrho(x) = -en(x)$ mit dem Strom I_A gemäß den Gln. (1.9) und (10.24) verknüpft ist

$$I_A = \frac{dQ(x)}{dt} = -\frac{dQ(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -A \varrho v \quad (10.25)$$

(v = Geschwindigkeit. Das Minuszeichen in Gl. (10.25) erklärt sich daraus, dass der technische Strom $I_A (> 0)$ durch die Bewegung einer negativen Ladung $Q(x)$ zustande kommt.). Aus den Gln. (10.23) bis (10.25) folgt

$$E(x) = \frac{Q(x)}{\varepsilon_0 A} = -\frac{I_A}{\varepsilon_0 A} \int_0^x \frac{dx'}{v(x')} = -\frac{I_A}{\varepsilon_0 A} t, \quad (10.26)$$

wobei t die zum Erreichen der Ebene x erforderliche Zeit ist. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m_e = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e I_A}{\varepsilon_0 A} t$$

(vgl. Gl. (10.4) für den raumladungsfreien Fall). Ihre zweimalige Integration liefert unter den Anfangsbedingungen $v(t_1) = 0$, $x(t_1) = 0$ (vgl. Abschnitt 10.1.2.1) die Geschwindigkeit

$$v = \frac{e I_A}{2 \varepsilon_0 m_e A} t^2$$

sowie

$$x = \frac{e I_A}{6 \varepsilon_0 m_e A} t^3 \quad (10.27)$$

und hieraus für $x = d$ die *Laufzeit*

$$\tau = \sqrt{\frac{6 d m_e \varepsilon_0 A}{e I_A}} \quad (10.28)$$

(vgl. Gl. (10.9)). In Verbindung mit den Gln. (10.26), (10.27) und (10.28) folgt

$$U_{AK} = -\int_0^d E(x) dx = \frac{I_A}{\varepsilon_0 A_0} \int_0^d t(x) dx$$

und schließlich die Kennlinie $I_A = f(U_{AK})$ der Vakuum-Diode im *Raumladungsgebiet*

$$I_A = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} A \frac{U_{AK}^{3/2}}{d^2} = K \frac{U_{AK}^{3/2}}{d^2}. \quad (10.29)$$

Die Proportionalität $I_A \sim U_{AK}^{3/2}$ gilt mit veränderten K -Werten auch für andere Elektrodenformen, also z. B. für die praktisch verwendeten zylindersymmetrischen Anordnungen der Elektroden.

Der Stromfluss in einer Vakuum-Diode unterscheidet sich also in zwei Punkten wesentlich von dem in einem metallischen Leiter:

1. Der Klemmenstrom ist nach Gl. (10.29) eine *nichtlineare* Funktion der Klemmenspannung.
2. Die Elektronen können nur von der geheizten zur kalten Elektrode wandern und das auch nur dann, wenn diese ein höheres Potenzial als die geheizte Elektrode hat. Würde man die Spannungsquelle in umgekehrter Polarität anschließen, so könnte die kalte Elektrode keine Elektronen emittieren. Der Strom fließt also nur in *einer* Richtung.

Die vorstehenden einfachen Gesetzmäßigkeiten sind wesentlich zu modifizieren, wenn man die Tatsache berücksichtigt, dass in Wirklichkeit die Elektronen mit stochastisch verteilten Geschwindigkeiten aus der Kathode emittiert werden. Dann kann auch schon für $U_{AK} < 0$ ein Strom fließen, da Elektronen mit entsprechend hohen Startgeschwindigkeiten trotz der von der Anode zur Kathode gerichteten elektrischen Feldkraft (Bremsfeld) die Anode erreichen können. Andererseits erreichen ab einem bestimmten positiven Wert U_s der Anodenspannung *alle* emittierten Elektronen die Anode, sodass für $U_{AK} > U_s$ der Anodenstrom konstant bleibt ($I_A = I_s = \text{Sättigungsstrom}$).

Die Kennlinie $I_A(U_{AK})$ einer realen Vakuum-Diode ist qualitativ in Bild 10.5a dargestellt. Auch in dieser verbesserten Darstellung ist die Richtungsabhängigkeit des Stromflusses klar zu erkennen. Praktische Diodenstrukturen werden im Raumladungsgebiet betrieben, wofür Gl. (10.29) eine brauchbare Näherung darstellt, wie Bild 10.5b zeigt.

10.1.3.2 Elektronenröhre mit Gitter

Fügt man zwischen Kathode K und Anode A eine dritte, elektronendurchlässige Elektrode G ein, welche als feinmaschiges Netz oder als Drahtwendel ausgeführt ist (*Gitter*), so wird aus der Vakuum-Diode die in Bild 10.6 schematisch dargestellte *Triode* mit 3 Anschlüssen. Sie ist funktional mit Transistoren vergleichbar (Abschnitt 10.5.3).

Die Elektronenemission aus der Kathode wird durch eine indirekte Heizung 1 bewirkt. Da sich mit der Spannung U_{GK} des Gitters gegen die Kathode die Feldverteilung zwischen Kathode und Anode und somit die Elektronenbewegung beeinflussen lässt, ist der Anodenstrom einer Triode außer von der Anodenspannung U_{AK} auch von der Gitterspannung U_{GK} abhängig.

Solange die Gitterspannung negativ ist, fließt kein Strom auf das Gitter. Der Anodenstrom lässt sich dann durch U_{GK} leistungslos steuern – und unterhalb des Laufzeitbereiches auch nahezu trägheitslos. Es gilt (vgl. Gl. (10.29) für die Vakuum-Diode)

$$I_A = K (U_{GK} + D U_{AK})^{3/2}. \quad (10.30)$$

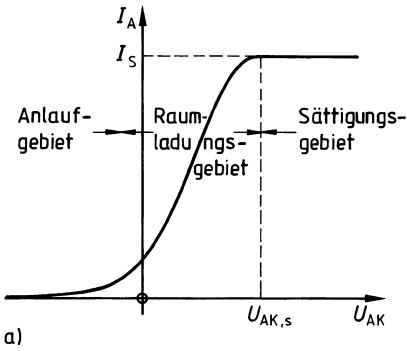


Bild 10.5: Vakuum-Dioden-Kennlinie bei planparalleler Elektrodenanordnung
 a) schematisch b) Vergleich zwischen Theorie und Messung

Kurve 1: + Messwerte für $d = 0,097 \text{ cm}$; $A = 0,28 \text{ cm}^2$; $I_S/A = 5,2 \text{ A/cm}^2$; $T_K = 1070 \text{ K}$
 o Theorie mit stochastischer Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen
 Kurve 2: Näherungsweise Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung
 Kurve 3: Verlauf nach Gl. (10.29)

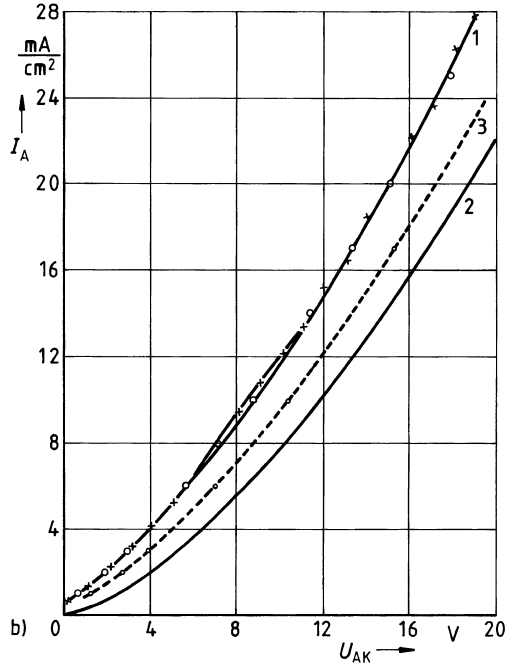
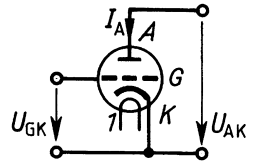


Bild 10.6: Schaltzeichen einer (indirekt geheizten) Triode
 1 Heizung, K Kathode, G Gitter, A Anode



Der *Durchgriff* D (er beträgt einige Prozent) ist ein Maß für die abschirmende Wirkung des Gitters auf die Anodenspannung. Das Bild 10.7 zeigt das *Ausgangskennlinienfeld* $I_A(U_{AK})_{U_{GK} = \text{const}}$ einer Triode gemäß Gl. (10.30) für den Bereich $U_{GK} < 0$.

10.1.3.3 Oszilloskop-Röhren

Diese Röhren dienen zur Darstellung zeitvarianter Spannungen auf einem Leuchtschirm mit Hilfe eines oder mehrerer, im Vakuum abgelenkter, Elektronenstrahlen. Der Aufbau einer Einstrahlröhre mit elektrostatischer Strahl-Fokussierung und -Ablenkung ist in Bild 10.8 schematisch dargestellt. Derartige Röhren werden in Kathodenstrahl-Oszilloskopen eingesetzt.

Das *Strahlerzeugungssystem* 1 emittiert, beschleunigt, bündelt und fokussiert den Elektronen-

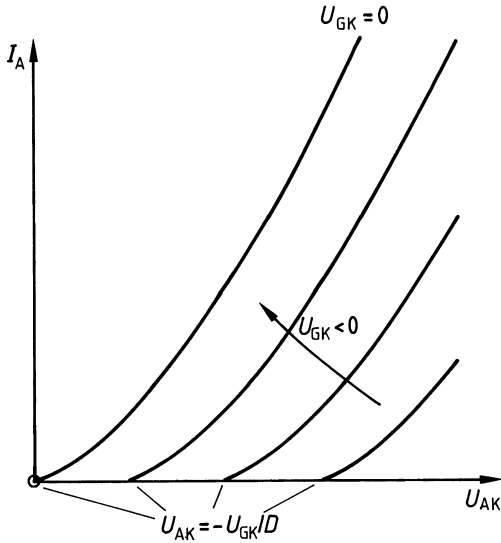


Bild 10.7: Ausgangskennlinienfeld $I_A(U_{AK})_{U_{GK}=\text{const}}$ einer Triode

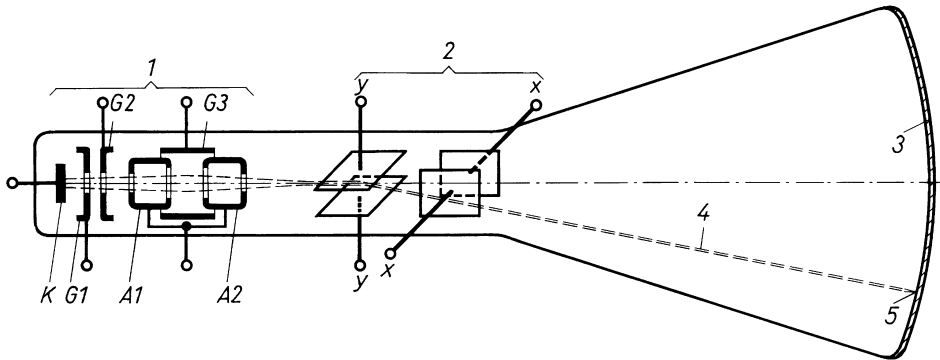


Bild 10.8: Aufbau einer Elektronenstrahl-Röhre mit elektrostatischer Strahl-Fokussierung und Ablenkung (schematisch)

- 1 Strahlerzeugungssystem
- K Kathode; G1 Steuerelektrode (Wehneltzylinder)
- G₂, G₃ Zylindrische Elektroden (Hilfsgitter); A₁, A₂ Zylindrische Anoden
- 2 Ablenkteil
- x-x Horizontales Ablensystem
- y-y Vertikales Ablensystem
- 3 Leuchtschirm; 4 Elektronenstrahl; 5 Leuchtfleck

strahl. Die von der Kathode emittierten Elektronen werden in ihrer Intensität durch eine negativ vorgespannte Zylinderelektrode, den als Steuergitter G_1 wirkenden *Wehneltzylinder*, gesteuert und in Richtung auf die an hoher positiver Spannung liegenden zylindrischen Anoden A_1 und A_2 beschleunigt. Durch Zusammenwirken mit den ebenfalls zylindrischen Elektroden G_2 und G_3 kommt es zur Fokussierung des Elektronenstrahls, bei der das elektrische Feld zwischen den Zylinderelektroden den Elektronenstrahl ähnlich ablenkt wie eine optische Sammellinse den Lichtstrahl. Man spricht daher von einer *Elektronenlinse*.

Nach der Fokussierung durchläuft der Elektronenstrahl das *Ablenkensystem 2*, das hier durch elektrische Felder innerhalb von senkrecht zueinander angeordneten Plattenkondensatoren x-x, y-y realisiert ist. Zur Darstellung eines Spannungs-Zeit-Diagramms $u(t)$ liegt die zu messende Spannung am y-Plattenpaar und eine der Zeit proportionale Spannung am x-Plattenpaar. Die auf den *Leuchtschirm 3* treffenden Elektronen 4 erzeugen entsprechend ihrer kinetischen Energie auf der dort aufgetragenen Schicht (z. B. Zinksulfid) Fluoreszenz. Dadurch entsteht der leuchtende Punkt 5, dessen Feinheit und Schärfe durch die Spannungen an den Zylinderelektroden des Ablenkensystems eingestellt werden.

10.1.3.4 Röntgenröhren

Wenn die von einer *Glühkathode* emittierten Elektronen nach Durchlaufen einer hinreichend hohen Spannung (je nach Anwendungszweck zwischen einigen 10 kV und einigen 100 kV bis 1 MV) auf eine metallische Anode (Antikathode) treffen, lösen sie dort *Röntgenstrahlung* aus. Das ist elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen zwischen etwa 10^{-3} nm und 10 nm. Dabei wird etwa 1 % der Elektronenenergie in Röntgenstrahlung umgewandelt. Das Durchdringungsvermögen der Strahlung (ihre Härte) hängt von der Anodenspannung ab.

Röntgenröhren werden nicht nur in der Medizin für Diagnose und Therapie eingesetzt, sondern auch in der Technik für die zerstörungsfreie Prüfung, insbesondere bei der Untersuchung fertiger Konstruktionsteile auf Fehlstellen, die während des Herstellungsprozesses oder im Betrieb entstanden sind.

10.2 Elektrische Leitung in Gasen

An der elektrischen Leitung in Gasen sind außer Elektronen häufig auch positive und negative Ionen beteiligt. Das hat eine Vielfalt von Leitungsmechanismen zur Folge, welche eine Fülle von Anwendungen ermöglicht, z. B. in der Beleuchtungs-, Anzeige-, Energie- und Halbleitertechnik. Welcher dieser Mechanismen vorherrscht, hängt wesentlich von der Stärke des durch das Gas fließenden Stroms ab, aber auch von der Art und dem Druck des Gases, vom Charakter der Ladungsträgerquelle und von der Geometrie der Entladungsstrecke.

10.2.1 Ladungsträger in Gasen

Die Partikel eines Gases (das sind Atome bei den Edelgasen bzw. Moleküle bei den unedlen Gasen und Metaldämpfen) sind im Grundzustand elektrisch neutral. Gase sind daher im Grundzustand elektrische Nichtleiter. Ein Stromfluss ist in einem Gas nur dann möglich, wenn ihm entweder von außen Ladungsträger zugeführt werden (z. B. über eine geheizte Kathode) oder im Gas selbst erzeugt werden. Sofern im letzteren Fall einem neutralen Partikel ein Elektron genommen bzw. ein überzähliges angelagert wird, entsteht ein positiv bzw. negativ geladenes

Teilchen. Man nennt es *Ion* (griech. Ion = Gehendes, Wanderndes), da es der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes folgen kann, und den ganzen Vorgang *Ionisierung*. In einem Entladungsgefäß wandert dabei das positive (negative) Ion zur negativen (positiven) Elektrode, d. h. zur Kathode (Anode) und wird deshalb als *Kation* (*Anion*) bezeichnet.

Die zur Abtrennung eines Elektrons von einem Atom bzw. Molekül notwendige Energie heißt *Ionisierungsenergie*. Üblicherweise gibt man an ihrer Stelle das Spannungsäquivalent an, die *Ionisierungsspannung* (Ionisierungsenergie/ e). Sie liegt z. B. bei Edelgasen zwischen 24,6 V (He) und 12,1 V (Xe), für Stickstoff beträgt sie 15,5 V und ist am kleinsten bei Metaldämpfen (Hg 10,4 V; Na 5,12 V; Cs 3,87 V).

10.2.2 Generation und Rekombination von Ladungsträgern

In Gasen können folgende Ionisationsprozesse zur *Ladungsträgererzeugung* (Bild 10.9) führen:

- Natürliche oder künstliche radioaktive bzw. kosmische Strahlung.
- Zusammenstöße mit schnellen (in einem elektrischen Feld beschleunigten) Elektronen bzw. Ionen (*Stoßionisation*). Dabei sind Elektronen die weitaus wirksameren und deshalb wichtigsten Ionisatoren in Gasen. Elektronen können u. a. von UV- oder härterer Strahlung aus neutralen Gasteilchen ausgelöst worden sein.
- Photonen (UV- und Röntgenstrahlung), die auch von angeregten Atomen emittiert werden können, wodurch diese wieder in den Grundzustand zurückkehren.
- Auslösung von Sekundärelektronen durch Ionenaufprall auf die Kathode.
- Emission von Elektronen
 - aus der durch Beschuss mit Ionen erhitzten Kathode und/oder
 - durch hohe elektrische Felder vor der Kathode.

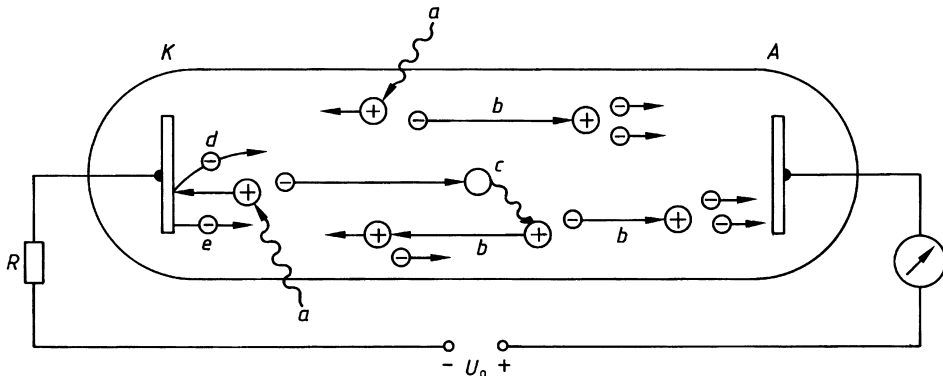


Bild 10.9: Entstehungsprozesse a) bis e) von Ladungsträgern in einem Gas
K Kathode, A Anode, (aus [Eic81])

Durch die Ionisierungsprozesse a) – c) entstehen primär je ein positives Ion und ein oder mehrere freie Elektronen. Diese stoßen in der Folgezeit mit Partikeln der umgebenden Gase zusammen.

Dabei können sich freie Elektronen an neutrale Partikel anlagern und so negative Ionen bilden (Anlagerung), aber auch positive Ionen können ihre Ladung an Neutralteilchen übertragen (Umladung).

Bei technischen Anwendungen ionisierter Gase ist die Konzentration der geladenen Partikel in der Regel noch so gering, dass ihre Bewegungen zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen voneinander unabhängig sind.

Ist das Gasgemisch dagegen hoch ionisiert, so können die gegenseitigen Beeinflussungen der Ladungsträger nicht mehr vernachlässigt werden. In diesem Fall muss die Ladungsträgerdichte beider Vorzeichen fast gleich sein, da sonst ein sofortiger Ausgleich von Überschussladungen auftreten würde. Ein solches Gasgemisch ist daher nach außen hin quasineutral und wird (Niedertemperatur-) *Plasma* genannt.

Die Konzentration der Ladungsträger ist aber immer so groß, dass eine nennenswerte Zahl von Zusammenstößen stattfindet. Die *mittlere freie Weglänge* liegt bei einem Gasdruck von 1 mbar typisch bei einigen 10 bis 100 μm (Tabelle 10.1) und nimmt umgekehrt proportional zum Druck ab.

Die nach Intensität und Richtung unregelmäßige thermische Bewegung der neutralen Gaspartikel überträgt sich natürlich auf die im Gas enthaltenen Ladungsträgerarten (Elektronen, Ionen) (Bild 10.10a).

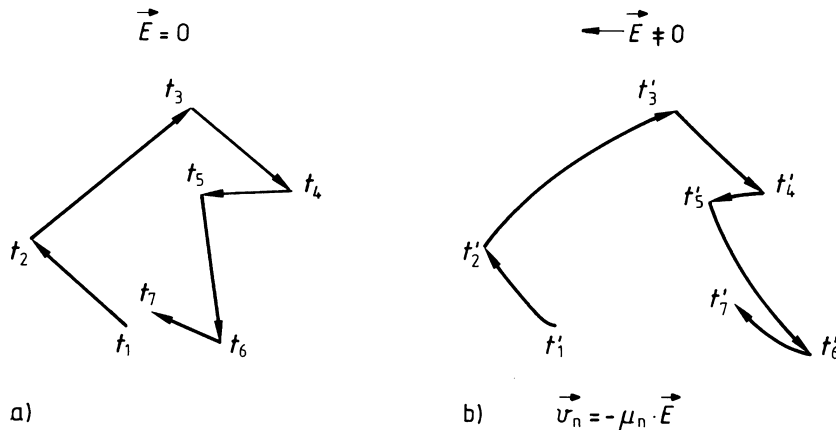


Bild 10.10: Bewegung negativer Ionen in einem Gas

a) ohne äußeres elektrisches Feld \vec{E}

b) unter Einwirkung eines solchen Feldes

t_i bzw. t'_i : Zeitpunkte der Zusammenstöße eines Ions mit Gaspartikeln

Die mittlere freie Weglänge der Elektronen ist rund fünfmal so groß wie die der Gaspartikel. In einem äußeren elektrischen Feld überlagert sich der unregelmäßigen thermischen Bewegung eines positiven (negativen) Ladungsträgers im zeitlichen Mittel eine Bewegung in Richtung (entgegen der Richtung) des äußeren elektrischen Feldes \vec{E} (*Driftbewegung*): Zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen mit neutralen Gasteilchen wird ein positives (negatives) Ion mit der Ladung $Q_i > 0$ ($Q_i < 0$) in Richtung (in Gegenrichtung) des elektrischen Feldes beschleunigt.

Beim nachfolgenden Zusammenstoß wird die aufgenommene Energie wieder in ungerichtete Bewegung umgesetzt, sodass die gerichtete Bewegung wieder mit der Geschwindigkeit null beginnt (Bild 10.10b, das für negative Ionen gilt).

Das Zusammenwirken der thermischen, unregelmäßigen Bewegung der Gaspartikel und der gerichteten Bewegung eines Ions erinnert an die mit konstanter Sinkgeschwindigkeit erfolgende Fallbewegung eines Körpers in einer reibungsbehafteten Flüssigkeit: Die Schwerkraft entspricht der elektrischen Feldstärke \vec{E} , die Reibung den fortwährenden Zusammenstößen. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die resultierende *Driftgeschwindigkeit* eines Ions der Feldstärke proportional ist und nicht die Beschleunigung wie im Vakuum (vgl. Gl. (10.4)). Es gilt

$$\vec{v} = b \cdot \operatorname{sgn}(Q_i) \vec{E}. \quad (10.31)$$

(Die Signumfunktion sgn liefert das Vorzeichen ihres Arguments.) Der Proportionalitätsfaktor

$$b = \frac{|Q|}{2m} \tau \quad (10.32)$$

heißt *Beweglichkeit*. Darin ist m die Masse des Ions, $\tau = \Lambda/\bar{v}$ die mittlere Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen des Ions mit einem Gaspartikel und Λ die zugehörige *mittlere freie Weglänge*.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{kT}{m}}$$

ist die mittlere Geschwindigkeit der Gaspartikel [Eic81]. τ nimmt mit wachsender Temperatur T ab.

Beispiel 10.5: Beweglichkeit und mittlere Lebensdauer von Stickstoffionen

Wie groß ist nach Gl. (10.32) die Beweglichkeit von Stickstoffionen bei der Temperatur $T = 300 \text{ K}$ und dem Druck 1 bar?

Zunächst wird die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} berechnet. Dafür erhalten wir mit der Molekülmasse $m = 4,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Js/K} \cdot 300 \text{ K}}{4,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} = 474 \text{ m/s}.$$

In Verbindung mit der mittleren freien Weglänge $\Lambda = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ folgt die mittlere Stoßzeit

$$\tau = \frac{\Lambda}{\bar{v}} = \frac{8,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}}{474 \text{ m/s}} = 1,79 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

und mit $|Q_i| \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ schließlich

$$b = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{2 \cdot 4,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \cdot 1,79 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}.$$

Experimentell wurden in Luft für negative und positive Ionen die Werte

$$b^- = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}, \quad b^+ = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

ermittelt, das bedeutet bei einer Feldstärke von $|\vec{E}| = 10^4 \text{ V/m}$ eine Driftgeschwindigkeit der negativen Ionen von $v^- = 1,9 \text{ m/s}$. Diese ist also sehr viel kleiner als die mittlere thermische Geschwindigkeit $\bar{v} = 474 \text{ m/s}$.

Als Folge der Zusammenstöße zwischen neutralen Gasparkeln und Elektronen bzw. Ionen werden nicht nur laufend neue Ionen gebildet (*Generation*), vielmehr findet auch eine Wiedervereinigung von positiven Ladungsträgern (Ionen) und negativen Ladungsträgern (Elektronen) statt. Diesen Vorgang nennt man *Rekombination*. Im Gleichgewicht ist die Generationsrate G gleich der Rekombinationsrate R . Da an der Rekombination je ein positiver und ein negativer Ladungsträger beteiligt ist, gilt (speziell im Fall der Ladungs-Neutralität) mit dem Rekombinationskoeffizienten r und der Ionenkonzentration N

$$R = r N^2 = G. \quad (10.33)$$

Die *mittlere Lebensdauer der Ionen* (typisch einige 100 s) ist

$$\tau_i = \frac{N}{G} = \frac{1}{r N}. \quad (10.34)$$

10.2.3 Entladungsformen

Die Gesamtheit der in Abschnitt 10.2.2 beschriebenen Erzeugungsprozesse a) – e) und der Rekombinationsprozesse nennt man *Gasentladung*. Diese tritt in einer Entladungsstrecke in unterschiedlichen Entladungsformen auf.

Außer vom Gasdruck hängt es entscheidend von der Stromdichte ab, welche der Entladungsformen sich ausbildet. Sie werden im Folgenden in der Reihe steigender Stromdichte beschrieben, die mittels einer Gleichspannungsquelle und eines geeignet gewählten Vorwiderstandes eingestellt wird (Bild 10.9).

10.2.3.1 Unselbstständige Entladung

Dieser Fall liegt vor, wenn zur Aufrechterhaltung der Entladung eine Ionisierungsursache von außerhalb des Entladungsraumes erforderlich ist (Ursachen a und b).

Für sehr kleine Spannungen U am bzw. Feldstärken im Entladungsgefäß sind die Ionengeschwindigkeiten v^- , v^+ so klein, dass noch keine Stoßionisation stattfindet und der Strom I durch Driftbewegung der Ionen zustande kommt. Dabei transportieren die positiven Ionen ($Q_i = +e$) während der Zeit t diejenige Ladungsmenge $Q^+ > 0$ in Richtung der elektrischen Feldstärke \vec{E} durch den Querschnitt A des Entladungsgefäßes, die sich in einem Zylinder der Länge $|\vec{v}^+| t$ befindet, d. h.

$$Q^+ = e N A |\vec{v}^+| t \quad \text{mit} \quad \vec{v}^+ = b^+ \vec{E};$$

die negativen Ionen ($Q_i = -e$) transportieren die Ladung

$$Q^- = (-e) N A |\vec{v}^-| t \quad \text{mit} \quad \vec{v}^- = -b^- \vec{E}$$

in der Gegenrichtung. Hieraus folgt der Strom I in Richtung von \vec{E}

$$I = \frac{Q^+ - Q^-}{t} = e N A (|\vec{v}^+| + |\vec{v}^-|) = e N A (|\vec{v}^+ - \vec{v}^-|)$$

bzw. die Stromdichte in Verbindung mit Gl. (10.31)

$$\vec{J} = eN(\vec{v}^+ - \vec{v}^-) = eNA(b^+ + b^-)\vec{E}. \quad (10.35)$$

Gasen zeigen also bei kleiner elektrischer Feldstärke Ohmsches Verhalten (vgl. Gl. (3.39)) mit der elektrischen Leitfähigkeit

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = eN(b^+ + b^-). \quad (10.36)$$

Mit $N = 10^9 \text{ m}^{-3}$ und den Werten für b^+ , b^- aus Beispiel 10.5 folgt $\kappa = 5,3 \cdot 10^{-14} \text{ S/m}$, was einem festen Isolierstoff mittlerer bis guter Qualität entspricht.

Mit wachsender Feldstärke werden in zunehmendem Maße Ionen an den Elektroden entladen, sodass der Strom nur noch bis zu einem Sättigungswert ansteigt. Dieser ist erreicht, wenn alle erzeugten Ionen an den Elektroden entladen werden (*Sättigungsbereich*).

Bei weiterer Steigung der Spannung können die im Gasraum vorhandenen Elektronen durch Stoßionisation neue Ionen und Elektronen erzeugen und letztere ihrerseits wieder Ionen und Elektronen, sodass eine lawinenartige Vermehrung von Ladungsträgern stattfindet. Man spricht dann von einer *Townsend-Entladung*. Da die Ströme im Bereich $10^{-15} \dots 10^{-6} \text{ A}$ liegen, spielen Raumladungen noch keine Rolle.

Bis hierher ist der Entladungsvorgang noch nicht mit einer Lichterscheinung verbunden. Man spricht daher von einer *Dunkel-* (oder *Vorstrom-*)*Entladung*. Die unselbstständigen Entladungen spielen in der Elektrotechnik nur eine geringe Rolle (z. B. zur Messung der Intensität von Röntgenstrahlen). Sie interessieren jedoch als Vorstufe zu den selbstständigen Entladungen, die nachfolgend beschrieben werden. Dazu wird der Strom entweder durch Verringerung des Vorwiderstandes oder Erhöhung der Betriebsspannung erhöht.

10.2.3.2 Selbstständige Entladung

Eine selbstständige Entladung setzt ein, wenn die aus dem Gasraum auf die Kathode aufprallenden positiven Ionen genügend Energie besitzen, um dort *Sekundärelektronen* auszulösen – und zwar gerade so viele, dass diese durch Stoßionisation mit neutralen Gasatomen im ganzen Entladungsraum wieder so viele Ionen erzeugen wie durch den Aufprall auf die Kathode dem Entladungsraum entzogen worden sind. Die Entladung bleibt dann auch ohne äußere Ionisation bestehen. Diesen Vorgang nennt man *Zünden*, die hierfür erforderliche Spannung U_Z heißt *Zündspannung*. Ihre Größe ist eine für jede Gasart typische Funktion des Produktes $p \cdot d$ (*Paschen-Kurven*), wobei d die Länge der Entladungsstrecke bezeichnet.

Die Townsend-Entladung geht beim Zünden unter beträchtlicher Spannungsabsenkung ($U_Z \rightarrow U_B = \text{Brennspannung}$) in die *normale Glimmentladung* über, durch die der Gasraum bei kalt bleibenden Elektroden unter Auftreten von Leuchterscheinungen elektrisch gut leitend wird. Dabei wechseln mehrere aufeinanderfolgende leuchtende Schichten und Dunkelräume einander ab.

Die Leuchterscheinung beruht auf der Anregung der Gasatome. Die Bewegungsenergie der Elektronen ist dabei gerade so weit angewachsen, dass die Gasatome beim Zusammenstoß den Energiebetrag vollständig aufnehmen, ihn aber (nach etwa 10 ns) wieder abgeben (meist als elektromagnetische Strahlung). Da zur Ionisierung mehr Energie als zur Anregung erforderlich ist, können Gasatome auch in Gebieten leuchten, in denen noch keine Ionisierung auftritt.

Da die Ionisierung der Grenzfall der Anregung ist, wird das bei der Ionisierung abgetrennte Elektron (das am losesten an das Atom gebundene Elektron) als *Leuchtelektron* bezeichnet.

Der Stromtransport findet zunächst nur über einen begrenzten Teil der Kathodenfläche statt und erfasst erst bei weiter steigendem Strom schließlich die gesamte Kathode. Von da an nimmt bei wachsendem Strom auch die Spannung an der Entladungsstrecke wieder zu (*anomale Glimmentladung*). Bei weiterer Steigerung des Stroms erfolgt der Übergang zur *Bogenentladung*. In diesem Bereich wird die Kathode durch Ionenaufprall so stark erhitzt, dass sie thermisch Elektronen emittiert. Gleichzeitig nimmt die Lichtaussendung stark zu: Die Lichtgebilde der Glimmentladung verschmelzen zum *Lichtbogen*. Dieser ist ein hochgradig ionisierter, hell leuchtender *Entladungskanal*, der neben neutralen Gasmolekülen einen hohen Anteil an Ionen und Elektronen enthält. Ein solches Teilchengemisch heißt *Plasma*. Beim Entstehen des Lichtbogenplasmas zieht sich die Ansatzfläche der Entladung auf der Kathode zu einem kleinen *Brennfleck* zusammen oder der Lichtbogen löst sich ganz von den Elektroden ab und ist von diesen durch je eine *Dunkelzone* getrennt.

Die Spannung U an der Entladungsstrecke nimmt dabei mit wachsendem Strom I ab. Man spricht daher beim Lichtbogen von einer *fallenden Strom-Spannungs-Charakteristik*. Für alle Punkte der Kennlinie $U(I)$ im Bereich der Bogenentladung ist der für dynamische Vorgänge maßgebliche differentielle Widerstand dU/dI negativ. Würde eine solche Entladungsstrecke an eine Spannungsquelle mit kleinem Innenwiderstand angeschlossen, hätte dies ein lawinenartiges Ansteigen des Stroms zur Folge (da für größere Ströme eine kleinere Spannung benötigt wird). In der Praxis muss daher die Entladungsstrecke durch eine Begrenzung des Stroms stabilisiert werden. Die *Stabilisierung der Entladung* kann sich bei nicht zu großen Strömen selbsttätig innerhalb der Gasstrecke etwa durch das Auftreten einer Raumladung einstellen (z. B. bei Glimm- und Spitzenentladungen) oder durch den Leitungswiderstand des Kreises. Bei Entladungen mit größeren Strömen sind jedoch äußere Mittel zur Strombegrenzung erforderlich, z. B. vorgeschaltete Widerstände, bei Wechselstrom auch Drosselspulen oder Kondensatoren.

Bei kleinen Spannungen zündet man den Lichtbogen durch Berühren der Elektroden und anschließendes Auseinanderziehen. Bei höheren Spannungen kommt es zur Lichtbogenzündung durch Funken (s. u.).

Für das Bestehen eines Lichtbogens von einigen cm Länge in Luft ist bei einem Gasdruck von etwa 100 kPa (= 1 bar) eine Mindestspannung von 15 ... 20 V (je nach Elektrodenmaterial) und ein Mindeststrom von 0,5 ... 1 A oder mehr erforderlich. Größere Lichtbogenlängen erfordern bei gleichen Strömen entsprechend höhere Spannungen.

Die oben beschriebenen Phänomene führen zu der in Bild 10.11 dargestellten *allgemeinen Gasentladungs-Charakteristik* $U(I)$. Sie gilt unter der Annahme eines homogenen elektrischen Feldes.

Der vorstehend geschilderte Übergang von Townsend- über Glimm- zur Bogenentladung bei wachsender Stromdichte findet nur bei nicht zu hohen Gasdrücken statt. Bei hohen Gasdrücken wird die Glimmentladung übersprungen (Bild 10.12; daraus können auch die Übergangsformen in Abhängigkeit vom Gasdruck bei konstanter Stromdichte entnommen werden).

Die bisherigen Betrachtungen gelten nur für ein näherungsweise homogenes Feld. Dieser Fall ist aber in der Praxis nicht gegeben. So ist z. B. das Feld zwischen zwei konzentrischen Zylinderelektroden inhomogen und durch die Oberflächenrauigkeit der Elektroden werden selbst bei

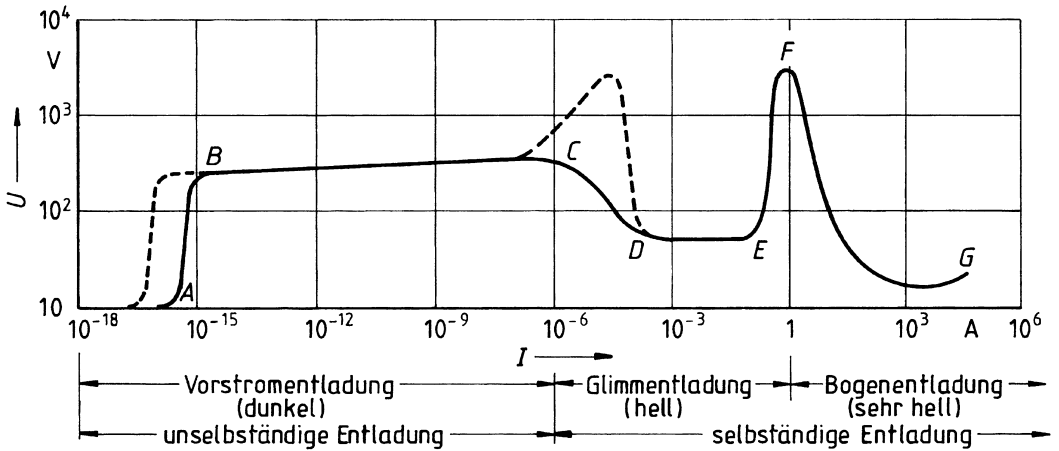


Bild 10.11: Allgemeine Kennlinie $U(I)$ einer Gasentladungsröhre mit kalter Kathode (aus [Eic81]).
 A–B Sättigungsgebiet (– bei verringerter Intensität des äußeren Ionisators)
 B–C Stromverstärkung durch Bildung von Townsend-Lawinen
 C Zündung
 C–D Übergang in die Glimmentladung (– – Bereich des Geiger-Müller-Zählrohres)
 D–E normale Glimmentladung
 E–F anomale Glimmentladung
 F–G Bogenentladung

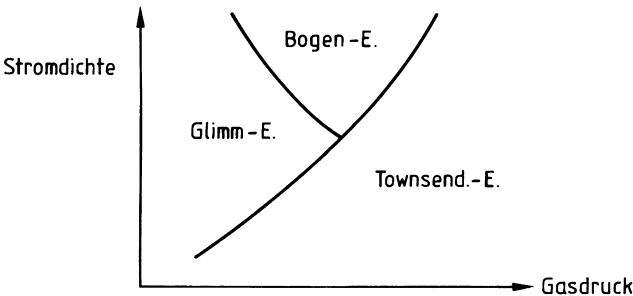


Bild 10.12: Diagramm der Gasentladungsformen in Abhängigkeit von Stromdichte und Gasdruck (nach [BSR06])

hoch symmetrischen Anordnungen Feldinhomogenitäten erzeugt. Deren Auswirkungen auf die Gasentladungs-Charakteristik werden im Folgenden beschrieben.

Koronaentladung

Bei stark inhomogenen Feldern können räumlich begrenzt extrem hohe elektrische Feldstärken auftreten, die weit über der zwischen den Elektroden im Mittel herrschenden Feldstärke E_{mi} liegen, welche im homogenen Fall noch keine Stoßionisation verursachen würde. In Extremfällen können infolge dieser lokal hohen Feldstärken Elektronen so stark beschleunigt werden,

dass es dort zu Stoßionisationen und zur Lichtanregung kommt. Die somit in dieser Zone zustandekommenden selbstständigen Entladungen bilden eine dünne, die Elektrode kranzförmig überziehende leuchtende Haut, die *Korona* genannt wird. Hiermit ist kein Durchschlag durch die ganze Entladungsstrecke verbunden. Der gesamte Raum außerhalb der Korona ist dunkel; es sprühen daher nur Spitzen, scharfe Kanten usw. (*Sprühentladung*). Zur Vermeidung bzw. zur Verminderung der Koronaentladung und der damit verbundenen Energieverluste werden z. B. bei Höchstspannungs-Freileitungen die die maximalen Feldstärken bestimmenden Querschnittsabmessungen des Leitersystems gegebenenfalls vergrößert (Hohl- oder Bündelleiter).

Funkenentladung

Wird die Spannung einer Glimmentladung gesteigert, so wächst die Glimmzone; aus der Glimmhaut treten größere Teilentladungen (*Büschelentladungen*) in den Raum und schließlich wird durch Ausweitung der Büschelentladungen der ganze Raum zwischen beiden Elektroden durch eine Entladung, den Funken, überbrückt.

Im Gegensatz zur gleichmäßig entstehenden und länger anhaltenden Glimmentladung ist der *Funkendurchbruch* ein plötzlicher, kurzzeitiger Entladungsstoß. Er tritt auf, wenn einerseits die elektrische Feldstärke bzw. Spannung groß genug ist, andererseits aber für das Entstehen einer länger dauernden Bogenladung mit großem Strom nicht genügend Ladung bzw. Energie verfügbar ist. Diese Verhältnisse liegen z. B. auch beim *Blitz* vor.

Eine weitere Art des frei im Gasraum entstehenden Funkens ist der *Gleitfunke* über die Oberfläche von Isolierungen hinweg. Er ist eine Gleitentladung an der Grenzschicht zwischen Gasraum und Isolierstoff. Wenn der Gleitfunke die gesamte Oberfläche des Isolierstoffs überbrückt, kommt es zum Überschlag zwischen den spannungsführenden Elektroden.

Die technische Bedeutung des Funkens liegt in der Tatsache, dass alle Abstände zwischen Leitern in Luft oder anderen Isolierstoffen so groß gemacht werden müssen, dass keine Funkenentladung auftritt. In vielen Fällen ist bereits das Auftreten einer Glimmentladung unzulässig.

Unter dem Begriff *elektrische Festigkeit* versteht man die Fähigkeit eines Isolierstoffs (hier eines Gases), den Isolator-Charakter zu bewahren. Ein Maß hierfür ist die *Durchbruch-Feldstärke*, bei welcher der Isolierstoff (wesentlich) zu leiten beginnt. Diese muss hinreichend weit über den im Betrieb auftretenden elektrischen Feldstärken liegen. Obwohl sich in Gasen der *Durchbruchskanal* meist wieder selbsttätig schließt, muss der Durchschlag vermieden werden, da er Spannungsabsenkung und Energieverlust bewirkt. Die Durchbruch-Feldstärke der Luft kann bei normalen atmosphärischen Bedingungen mit ca. $3 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 30 \text{ kV/cm}$ angesetzt werden. Wo diese überschritten wird, kommt es zum Durchschlag, in inhomogenen Feldern gegebenenfalls zum Teildurchbruch in der Form des Glimmens. Auf den genauen Wert der *Durchschlagfeldstärke* und darauf, ob eine vollständige Funkenentladung auftritt, sind von Einfluss: Lufttemperatur, Luftdruck, Luftfeuchte, Elektrodenform, zeitlicher Spannungsverlauf und Zeitdauer der Spannungseinwirkung. Steht bei einem Funkendurchbruch noch genügend Spannung und Energie zur Verfügung, so entsteht der stromstarke Lichtbogen.

Gewollt ist der Funke nur selten, z. B. bei der *Messfunkenstrecke*, einer einfachen Vorrichtung zum Messen von Hochspannungen, oder bei der Zündkerze für Benzin-Motoren.

10.2.4 Technische Nutzung der Gasentladung

Die verschiedenen Bereiche der Gasentladungs-Charakteristik nach Bild 10.11 ermöglichen eine Fülle physikalisch-technischer Anwendungen, über die Tabelle 10.3 eine Übersicht gibt.

Tabelle 10.3: Anwendungen der verschiedenen Bereiche der Gasentladungs-Charakteristik nach Bild 10.11 (aus [Eic81]).

Bereich	Anwendungen
A–B	Ionisationskammer
B–C	Gasphotozelle, Proportionalzähler
C–D	Geiger-Müller-Zähler, Korona-Stabilisator
D–E	Glimmlampe, Leuchtstoffröhre mit kalten Kathoden, Überspannungsableiter, Anzeigeröhren, Gasentladungs-Displays, Gas-Laser und Gas-Maser
E–F	Geräte für Kathodenzerstäubung und Ionenätzen
F–G	Lichtbogen-Schweißgeräte und -Schmelzöfen, Ignitrons

Gasentladungslampen arbeiten im Bereich D–E des Bildes 10.11 und stellen die im Alltag auffälligste Anwendungsgruppe dar. Die zu dieser Gruppe gehörenden Lichtstrahler beruhen darauf, dass beim Zusammenstoß von Elektronen mit Atomen bzw. Molekülen diese Energie aufnehmen, die sie kurz danach durch Aussendung von Licht wieder abgeben. Bei der Vielzahl der beteiligten Atome senden die einzelnen Atome unabhängig voneinander Strahlung aus (stochastischer Vorgang). Zwischen den emittierten Wellen besteht daher keine Phasenkohärenz, d. h. die abgestrahlten Wellen haben nicht den gleichen zeitlichen Phasenverlauf. Das von der Gasentladung abgegebene Licht stellt daher eine *inkohärente Emission* dar. Jedes Gas emittiert die seinem Spektrum entsprechende Lichtfarbe, z. B. im sichtbaren Bereich Natrium gelb, Lithium rot, Neon orangerot, Helium weißlichrosa. Lampen mit diesen Füllungen und kalten Kathoden werden als *Leuchtstoffröhren* bezeichnet. Sie haben eine Niederdruck-Gasfüllung (1 bis 10 mbar) und dienen hauptsächlich Werbezwecken.

Zu den *Niederdruck-Entladungslampen* gehören die *Gas-Laser* wie z. B. der klassische Helium-Neon-Laser. Bei ihnen wird das durch die Gasentladungen erzeugte Licht durch Vielfach-Reflexion auf so hohe Strahlungsdichte gebracht, dass eine *induzierte Emission* einsetzt, die zu einer eng gebündelten *kohärenten Lichtabstrahlung* mit sonst nicht erreichbarer Intensität führt.

Als *Hochdruck-Entladungslampen* (mit Gasdrücken bis zu größenordnungsmäßig 100 kPa = 10^3 mbar) werden hauptsächlich Natrium- (15 mbar Partialdruck) und Quecksilber ($10^3 \dots 10^5$ mbar Druck) -Dampflampen, Edelgas- und Metallhalogenlampen ausgeführt. In der Entladung bildet sich ein thermisches Plasma, bei dem zwischen allen Plasmapartnern – also Elektronen, Ionen und neutralen Atomen – thermisches Gleichgewicht herrscht. Hochdruck-Entladungslampen haben eine gute Lichtausbeute und finden für Straßen- und Arbeitsplatz-Beleuchtungen in Werkstätten Verwendung.

Leuchtstofflampen arbeiten mit Quecksilberdampf als Entladungsträger und haben an der Innenwand des Glasrohrs eine Schicht, die von der auf sie treffenden ultravioletten Strahlung der

Gasentladung zur Emission von sichtbarem Licht angeregt wird. Durch Auswahl aus den hierfür geeigneten Stoffen (z. B. mit seltenen Erden aktivierte Aluminate bzw. Oxide) können sehr verschiedenartige Farbtöne erzielt werden. Besonders wichtig sind die für die Raumbeleuchtung benutzten Leuchtstoffröhren mit tageslichtähnlichem (Kennbuchstabe T), gelblichweißem (G), warmtonigem (I) und weißem (W) Licht. Durch Verwendung von Glühkathoden können diese Röhren auch am 230 V-Niederspannungsnetz betrieben werden. Die im Vergleich mit Glühlampen von Spannungs-Schwankungen weit weniger abhängige Lichtausbeute der Leuchtstofflampen beträgt etwa das Sechsfache von Glühlampen gleicher Leistungsaufnahme. Außerdem wird kaum störende Wärme entwickelt; das Gas in der Lampe bleibt im Betrieb auf Zimmertemperatur. Die umgangssprachlich als Energiesparlampen bezeichneten *Kompakt-Leuchtstofflampen* sind in den letzten Jahren sehr preiswert geworden und dabei, in Privathaushalten die konventionellen Glühlampen zu verdrängen. Da sie teilweise über den Hausmüll entsorgt werden, ist ihre Verwendung wegen des enthaltenen Quecksilbers ökologisch problematisch.

Gasentladungs- oder Plasma-Displays sind *Multiелеktroden-Gasentladungssysteme* zur Darstellung von alphanumerischen Zeichen oder Bildern mit Hilfe eines Leuchtpunktrasters. Sie enthalten in einer Ebene eine Vielzahl parallel zueinander angeordneter stabförmiger Kathoden und in einer parallelen Ebene dazu senkrecht angeordnete stabförmige Anoden. Durch Anlegen kurzer Spannungsimpulse zwischen bestimmten Kathoden und Anoden lassen sich an den jeweiligen Überkreuzungsstellen des Gitternetzes aus Kathoden- und Anodenstäben punktförmige Gasentladungen zünden, deren Gesamtwirkung auf das menschliche Auge das darzustellende Bild ergibt, das sich durch einen hohen Kontrast auszeichnen kann.

10.3 Elektrische Leitung in Flüssigkeiten

Von den elektrisch leitenden Flüssigkeiten werden im Folgenden nur die elektrolytischen Flüssigkeiten (kurz: *Elektrolyte*) behandelt. Sie bestehen aus einem Lösungsmittel und darin gelösten positiven und negativen Ionen (Kationen und Anionen, vgl. Abschnitt 10.2.1). Diese können sich unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes oder eines Konzentrationsgefälles bewegen und so einen elektrischen Stromfluss bewirken. Als Lösungsmittel kommt Wasser wegen seiner hohen relativen Permittivität ($\epsilon_r = 81$) eine überragende Bedeutung zu. Der Stromtransport in geschmolzenen Metallen, welche ebenfalls zu den flüssigen Leitern gehören, bleibt außer Betracht, da dort der Leitungsmechanismus der gleiche ist wie bei den festen Metallen (Abschnitt 10.4.3.1).

Die Elektrolyte gehören zu den Leitern, die beim Stromdurchgang chemische Veränderungen erfahren. Man spricht daher von *elektrochemischen Vorgängen*. Diese treten in wässrigen Lösungen von Säuren, Basen und Salzen sowie in Salzschnmelzen auf. Die beim Stromdurchgang stattfindenden stofflichen Umsetzungen nennt man *Elektrolyse*. Sie wird in der Technik in vielfältiger Weise angewandt (Abschnitt 10.3.2).

10.3.1 Mechanismus der elektrolytischen Leitung

Bei der Elektrolyse findet man an den der Stromzu- und -abführung dienenden Elektroden Bestandteile des Elektrolyten. Hieraus muss gefolgert werden, dass die Moleküle des Elektrolyten voneinander getrennt (zersetzt) sind und dass die Molekülteile unter dem Einfluss der Spannung zu den Elektroden wandern. Bild 10.13 zeigt dies am Beispiel des Kupfersulfats (CuSO_4).

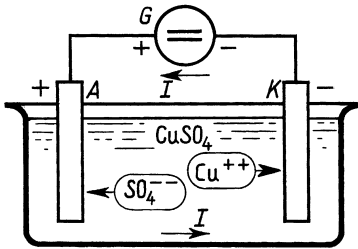


Bild 10.13: Elektrolyse am Beispiel der Zersetzung von Kupfersulfat (CuSO_4)
 A Anode; K Kathode
 SO_4^- Anion; Cu^{++} Kation
 G Generator; I Stromrichtung

Dessen Zerlegung in seine Bestandteile Cu und SO_4 und die Bewegung dieser Molekülteile zu den beiden Elektroden (Kathode und Anode) zeigt, dass die Molekülteile (*Ionen*) elektrisch geladen sind. Dabei ist in jeder Lösung oder Schmelze immer das eine Ion, in unserem Beispiel das Kupfer Cu , elektrisch positiv geladen. Da es zur negativen Elektrode, der Kathode K, wandert (Bild 10.13), ist das Cu das Kation. Die positive Ladung dieses Kations wird durch hochgestellte Pluszeichen gekennzeichnet (+ bei einer positiven Elementarladung, ++ bei zwei usw.), für Kupfer also Cu^{++} . Entsprechend wird das zur positiven Anode A wandernde Anion durch hochgestellte Minuszeichen charakterisiert, in unserem Beispiel also das Sulfat-Ion durch SO_4^{-} .

Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die Spaltung der Moleküle in Anion und Kation nicht erst von der angelegten äußeren elektrischen Spannung bewirkt wird, sondern schon vorher vorhanden ist. Die an der *elektrolytischen Zelle* liegende Spannung hat die Ionen nur noch zu bewegen.

Die Ladungen wandern durch den Elektrolyten also unter Inanspruchnahme der Ionen als Träger. Eine derartige Strömung wird als *Trägerleitung* bezeichnet im Gegensatz zu der *reinen Elektronenleitung* z. B. im Vakuum und in Metallen. Dabei ist die Trägerbewegung in der technischen Praxis gewollt: Bei der CuSO_4 -Zersetzung (nach Bild 10.13) wird die Kathode verkupfert, indem das Kupfer sich aus der CuSO_4 -Lösung wie beschrieben niederschlägt. Eine Verringerung des Cu -Gehaltes im Elektrolyten kann durch den Sekundärprozess der Wiederverbindung von Cu mit SO_4 an der Anode zu CuSO_4 vermieden werden. Der Vorgang wird verwendet, um Gegenstände zu verkupfern, oder auch, um an der Kathode das besonders reine *Elektrolytkupfer* aus einem als Anode dienenden verunreinigten Kupferblock zu gewinnen. Die Beimengungen bleiben im Bad oder sammeln sich im *Anodenschlamm*.

Bei der Elektrolyse entstehen, abgesehen von etwa auftretenden sekundären Prozessen neben den primären z. B. folgende Produkte: H_2 und Cl_2 bei HCl (Salzsäure), 2H_2 und O_2 bei H_2SO_4 (Schwefelsäure), bei KOH (Kalilauge) und bei NaOH (Natronlauge), 2NaOH und Cl_2 bei NaCl (Kochsalz) usw.

Ganz allgemein sind Wasserstoff und Metalle (sowie die diese vertretenden Radikale wie das Ammonium NH_4) Kationen, wandern also mit dem Strom zur Kathode, während die Säurereste und Hydroxylgruppen Anionen sind, also entgegen der technischen Stromrichtung zur Anode wandern.

10.3.2 Ladungs-, Massen- und Strombilanzen

10.3.2.1 Faradaysche Gesetze

Da die bei der Elektrolyse transportierten Ladungen bei ihrer Wanderung an die stofflichen Träger gebunden sind, sind die elektrolytisch zersetzten bzw. an den Elektroden abgeschiedenen Massen m der beförderten Elektrizitätsmenge $Q > 0$ proportional, d. h. bei konstantem Strom dem Produkt aus dem Strom $I > 0$ und der Dauer t des Stromflusses:

$$m = cQ = cIt \quad (10.37)$$

Dies ist das 1. *Faradaysche Gesetz*. Der Proportionalitätsfaktor c ist das *elektrochemische Äquivalent*. Seine Abhängigkeit von der relativen (d. h. auf das Wasserstoffatom der Masse m_H bezogenen) Masse A_r eines Atoms und dessen Ladungszahl z_i ergibt sich aus folgender Überlegung: Wenn pro Zeit n Atome an der Elektrode abgeschieden werden, ist

$$m = n t A_r m_H,$$

andererseits gilt

$$I = n e z_i,$$

d. h. mit Gl. (10.37)

$$c = \frac{m}{It} = \frac{A_r}{z_i} \cdot \frac{m_H}{e}. \quad (10.38)$$

Der dimensionslose Quotient A_r/z_i wird als *Äquivalentgewicht* (oder äquivalente molare Masse) bezeichnet.

Damit ergibt sich das 2. *Faradaysche Gesetz*: Die von gleichen Elektrizitätsmengen Q abgeschiedenen Massen $m = cQ$ verhalten sich wie die Äquivalentgewichte A_r/z_i .

Nach den Gln. (10.37) und (10.38) ist zur Abscheidung der Masse eines Stoffs von der numerischen Größe seines Äquivalentgewichtes, d. h. für $m = A_r/z_i$ Gramm, die Ladung $e/(m_H/g)$ erforderlich, also ein universeller Wert. Man erhält ihn wie folgt: Eine Menge von A_r Gramm eines jeden Stoffs (= 1 Mol) enthält dieselbe Anzahl $N_A \cdot 1$ mol Atome bzw. Moleküle. Die Größe

$$N_A = 6,022\,141\,29 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

heißt *Avogadro-Konstante* oder *Loschmidt-Zahl*. Danach gilt insbesondere für Wasserstoff mit $A_r = 1$

$$m_H N_A \cdot 1 \text{ mol} = 1 \text{ g}$$

und damit

$$\frac{e}{m_H} = e N_A \frac{\text{mol}}{\text{g}}. \quad (10.39)$$

Die Größe

$$F = e N_A \quad (10.40)$$

wird *Faraday-Konstante* genannt. Sie hat den Wert

$$F = 96.485,3365 \text{ C mol}^{-1}. \quad (10.41)$$

Diese Universalität wird als 3. *Faradaysches Gesetz* bezeichnet. Es belegt zugleich die atomistische Struktur der Elektrizität. Tatsächlich ist nie eine kleinere Elektrizitätsmenge als die Elementarladung

$$e = 1,602\,176\,565 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (10.42)$$

beobachtet worden. Das ist die Ladung eines einwertigen Ions, z. B. des Wasserstoff-Kations, d. h. $-e$ ist die *Ladung eines Elektrons*. Alle in der Natur auf und oberhalb der atomaren Ebene vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache dieser Elementarladung. Umgekehrt ist 1 C der Betrag der Ladung von $(1,602 \cdot 10^{-19})^{-1} \approx 6,24 \cdot 10^{18}$ Elektronen.

Aus den Gln. (10.37) bis (10.39 a) erhält man die abgeschiedene Masse

$$m = \frac{I t}{F} \cdot \frac{A_r}{z_i} \frac{\text{g}}{\text{mol}}. \quad (10.43)$$

Der Faktor $\frac{A_r}{z_i} \cdot \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ wird als *äquivalente molare Masse* bezeichnet.

Die Gl. (10.43) gilt für einen einatomigen Stoff mit der relativen Atommasse A_r . Bei mehratomigen Kationen bzw. Anionen tritt an die Stelle von A_r und z_i die *relative Molekülmasse* M_r und deren Ladungszahl. Dabei ist M_r die Summe der relativen Atommassen. So ist z. B. für SO_4 mit der relativen Atommasse 32 für S und 16 für O die relative Molekülmasse $M_r 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 96$.

Die nach Gl. (10.43) berechneten Massen sind theoretische Höchstwerte. In der Praxis wird zum Abscheiden einer bestimmten Masse mehr Ladung Q benötigt, weil ein Teil der zugeführten Energie in Nebenprozessen verbraucht wird, z. B. zur Wasserstoffabscheidung.

Beispiel 10.6: Abscheidung von Kupfer bei der Elektrolyse

Welche Zeit t wird bei dem Strom $I = 100 \text{ A}$ mindestens gebraucht, um an der Kathode die Masse $m = 1 \text{ kg}$ Kupfer niederzuschlagen? Als Elektrolyt dient Kupfersulfatlösung CuSO_4 .

Kupfer hat die relative Atommasse $A_r = 63,6$ und ist im Kupfersulfat zweiwertig ($z_i = 2$). Also ist die erforderliche Zeit nach den Gln. (10.43) und (10.41)

$$t = \frac{96,5 \text{ (kC/mol)} m z_i}{A_r I} \frac{\text{mol}}{\text{g}} = \frac{96,5 \text{ (kC/mol)} 1000 \text{ g} \cdot 2}{63,6 \cdot 100 \text{ A}} \frac{\text{mol}}{\text{g}} = 30346 \text{ s} = 8,43 \text{ h}.$$

Es sind also erhebliche Zeiten bzw. Ströme erforderlich, um größere Kupfermengen zu gewinnen. Bei der elektrolytischen Raffination arbeitet man daher meist mit sehr großen Strömen. Auch bei der elektrolytischen Gewinnung von Metallen im Schmelzfluss (z. B. Aluminium aus Tonerde Al_2O_3 , gelöst in Kryolith Na_3AlF_6) werden große Ströme verwendet, die bei großen Anlagen 20.000 A überschreiten. Außer der elektrolytischen Zersetzung liefert der Strom auch die Wärme, die dem Bad bei Aluminium eine Temperatur von etwa 950°C gibt (Beispiel 10.8).

Ein Elektrolyt, in dem sich Anionen und Kationen mit der Konzentration n_A bzw. n_K , der Beweglichkeit b_A bzw. b_K und mit der Wertigkeit z_A bzw. z_K befinden, hat die Leitfähigkeit

$$\kappa = n_A z_A (b_A + b_K), \quad (10.44)$$

wobei aus Gründen der Ladungsneutralität $n_A z_A = n_K z_K$ ist (vgl. die entsprechende Gl. (10.36) für ionisierte Gase). Im Gegensatz zu dort nehmen hier die Beweglichkeiten und damit die Leitfähigkeit mit der Temperatur zu.

Beispiel 10.7: Leitfähigkeit von Salzsäure

Wie groß ist die Leitfähigkeit von 0,1-normaler Salzsäure bei 18 °C, wenn für die Beweglichkeiten die Werte $b_A = b_{\text{Cl}^-} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $b_K = b_{\text{H}^+} = 33 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ zugrunde gelegt werden? Welchen Widerstand R hat ein Würfel von 1 cm Kantenlänge?

Aus Gl. (10.44) folgt mit $n_A = n_K = 0,1N_A \text{ mol/Liter} = 10^{-4} N_A \text{ mol cm}^{-3}$, $z_A = z_K = 1$ sowie $e N_A = F$ nach Gl. (10.40, 10.41)

$$\kappa = 96,5 \cdot 10^3 \frac{\text{As}}{\text{mol}} \cdot 10^{-4} \text{ mol cm}^{-3} \cdot 39,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = 0,0385 \frac{1}{\Omega \text{ cm}}.$$

Daraus erhält man nach den Gln. (2.11) und (2.14) $R = 26 \Omega$.

10.3.2.2 Elektrolytische Spannung galvanischer Zellen

Taucht man einen Metallstab in einen Elektrolyten, so entsteht zwischen diesen beiden verschiedenartigen Leitern (Elektronen- bzw. Ionenleiter) eine Spannung: Jeder in einer Flüssigkeit gelöste Stoff hat das Bestreben, die gesamte Flüssigkeit zu durchdringen, wobei der im Innern der Lösung herrschende *osmotische Druck* mit der Anzahl der Lösungsmoleküle, also mit der Konzentration, wächst. Andererseits hat aber jeder feste Körper, also beispielsweise auch das Metall eines Stabes, die Neigung zur Auflösung, wobei Teile des Metalls in Lösung gehen. Dieser *Lösungsdruck* wirkt dem osmotischen Druck entgegen, sodass je nach der Größe beider entweder Ionen des Stabes in Lösung gehen oder Metallionen des Elektrolyten sich an den Stab anlagern. Da Metallionen als Kationen positiv sind, wird beim Überwiegen des Lösungsdrucks der Elektrolyt positiv (z. B. ZnSO_4) und der Metallstab (z. B. Zn) wegen des jetzt bestehenden Überschusses an Elektronen negativ, während beim Überwiegen des osmotischen Druckes der Metallstab (z. B. Cu) positiv und der Elektrolyt (z. B. CuSO_4) negativ elektrisch geladen wird. Zwischen dem Metallstab S und dem Elektrolyten entsteht also eine Spannung U_{SK} bzw. U_{SA} (*elektrochemische Spannungsreihe der Metalle*).

10.3.2.3 Zersetzungs- und Polarisations-Spannung

Zur elektrolytischen Zersetzung werden je eine Anode (z. B. Cu) und eine Kathode (z. B. Zn) in einem gemeinsamen Elektrolyten (z. B. H_2SO_4) benötigt. Nach den Faradayschen Gesetzen sind für die Zersetzung bestimmte Mindest-Elektrizitätsmengen erforderlich und die abgeschiedenen Stoffmengen sind diesen Mindest-Elektrizitätsmengen proportional.

Die elektrische Energie, die zur Gewinnung von 1 Mol eines bestimmten Stoffs erforderlich ist, erhält man aus der Faraday-Konstante $F \approx 96,5 \text{ kAs mol}^{-1}$, multipliziert mit der Stoffmenge 1 mol, der Ladungszahl z_1 und der *Zersetzungsspannung* U_z , die mindestens aufgewendet werden muss, um eine Zersetzung des Elektrolyten an den Elektroden zu erreichen. Damit gilt für die Energie

$$W = z_1 U_z \cdot 96,5 \text{ kAs.} \tag{10.45}$$

Dies ist gleichzeitig die maximale Energie, die bei der zugrunde liegenden elektrochemischen Reaktion der Abscheidung eines Mols aus der Ionenform zu gewinnen ist. Die Energie W , die *Affinität der Reaktion* genannt wird, lässt sich thermodynamisch berechnen, demgemäß auch die Zersetzungsspannung U_z , denn es gilt nach Gl. (10.45)

$$U_z = W / (z_i 96,5 \text{ kAs}). \quad (10.46)$$

Die Zersetzungsspannung

$$U_z = U_{SK} - U_{SA} \quad (10.47)$$

ergibt sich aus den beiden Spannungsdifferenzen U_{SK} und U_{SA} zwischen dem Elektrolyten und Kathode bzw. Anode, die sich ebenfalls thermodynamisch berechnen lassen. Unterhalb der Spannung U_z findet keine Zersetzung und praktisch keine Stromleitung statt.

Zu dieser Zersetzungsspannung U_z tritt noch eine Reihe weiterer Teilspannungen hinzu: Vor allem hat auch der elektrolytische Leiter bei jeder Temperatur einen bestimmten Widerstand, der weit größer als der Widerstand der Metalle ist. So beträgt beispielsweise der Widerstand eines Würfels von 1 cm Kantenlänge bei 30 %-iger Schwefelsäure bei 18 °C etwa 1,7 Ω , während derselbe Würfel bei Kupfer nur etwa 1 $\mu\Omega$, also rund 1 Millionstel davon hat, wie aus Gl. (2.11) und Tabelle A.3 im Anhang A.3 einfach ermittelt werden kann. In diesem Widerstand R des Elektrolyten entsteht durch den hindurchfließenden Strom I eine Spannung IR und eine Leistung I^2R . Diese Leistung wird in Wärme umgesetzt, die man bei vielen elektrochemischen Prozessen und bei der Schmelzelektrolyse zur Heizung des Bades benutzt.

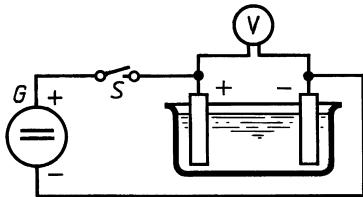


Bild 10.14: Nachweis der Polarisationsspannung
S Schalter; G Generator; V Spannungsmesser

Weitere Spannungsabfälle entstehen durch komplizierte Vorgänge an den Elektroden und in ihrer näheren Umgebung. Sie erhöhen die theoretischen Spannungsdifferenzen U_{SK} und U_{SA} zwischen den Elektroden und dem Elektrolyten. Nach der Elektrolyse sind die Elektroden noch für eine gewisse Zeit mit den Produkten der Elektrolyse beladen. Sie stellen somit eine *galvanische Zelle* dar. Nach dem *Gesetz von Le Blanc* ist die Spannung dieser Zelle, die *Polarisationsspannung*, gleich der theoretischen Zersetzungsspannung U_z . In Bild 10.14 ist eine Messschaltung zum Nachweis einer solchen Polarisationspannung angegeben.

Beispiel 10.8: Energieaufwand bei der Schmelzelektrolyse von Aluminium

Welche Energie ist erforderlich, um Aluminium der Masse $m = 1$ kg im Schmelzfluss zu gewinnen, wenn die Badspannung (Gesamtspannung) $U = 5,0$ V beträgt?

Da Aluminium die relative Atommasse $A_r = 27$ hat und $z_1 = 3$ ist, wird für $m = 1$ kg nach den Gln. (10.43) und (10.41) die Elektrizitätsmenge

$$Q = I t = m F z_1 / A_r \frac{\text{mol}}{\text{g}} = 1000 \text{ g} (96,5 \text{ kC/mol}) 3/27 \frac{\text{mol}}{\text{g}} = 10,72 \text{ MC}$$

benötigt. Bei $U = 5$ V ist also theoretisch die Energie

$$W = UQ = 5 \text{ V} \cdot 10,72 \text{ MC} = 53,6 \text{ MWs} = 14,9 \text{ kWh}$$

erforderlich. Mit dem Energieverbrauch für die Heizung sind praktisch rund 18 kWh je kg Aluminium aufzuwenden.

10.3.3 Technische Nutzung elektrischer Leitung in Flüssigkeiten

Elektrochemische Vorgänge spielen in der heutigen Technik auf vielen Gebieten eine bedeutende Rolle, vor allem zur

- Erzeugung und Speicherung elektrischer Energie (Batterien, Akkumulatoren, Brennstoffzellen)
- direkten Erzeugung von Metallen und Gasen aus Rohmaterialien durch Elektrolyse
- Veredelung bzw. für Abdrücke von Werkstoffoberflächen durch *Galvanik*
- Untersuchung bzw. Verhinderung der *Korrosion* an Metallen.

Diese Vielfalt wird durch die folgende beispielhafte Übersicht belegt.

10.3.3.1 Elektrochemische Stromerzeuger

Elektrochemische Stromerzeuger sind galvanische Zellen mit zwei Elektroden aus verschiedenen Materialien in einer als Elektrolyt wirkenden elektrisch leitfähigen Flüssigkeit, die häufig mit einer Art Gelatine stark eingedickt ist. Je nach dem Verlauf der chemischen Reaktion spricht man bei irreversiblen Vorgang von *Primärzellen* (sie sind nach der Entladung nicht wieder aufladbar), bei reversiblen Vorgang von *Sekundärzellen* (sie können durch Umkehrung der Stromrichtung wieder in den geladenen Zustand zurückgeführt werden.) Beide Ausführungsformen werden häufig zur Stromversorgung elektronischer Geräte eingesetzt. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [Jak93].

Primärzellen

Praktische Bedeutung haben ausschließlich *Trockenzellen*, bei denen der Elektrolyt durch Zusätze in eine Gallerte überführt ist. Wir beschränken uns auf eine Betrachtung der wichtigsten Ausführungsformen.

Die **Kohle-Zink-Zelle** (besser: *Braunstein-Zink-Zelle*) ist aus der *Leclanché-Zelle*, der ältesten Form der Trockenzelle, hervorgegangen und stellt auch heute noch einen der am weitesten verbreiteten Zelltypen dar. Ihr Aufbau ist in Bild 10.15 dargestellt.

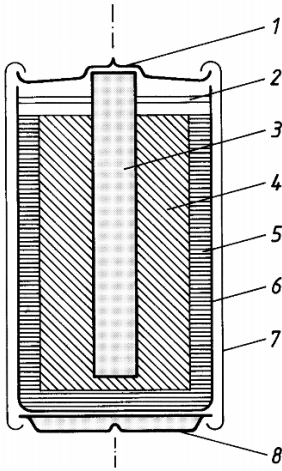


Bild 10.15: Aufbau der Kohle-Zink-Zelle

- 1 Kappe, Pluspol
- 2 Dichtung
- 3 Kohlestab
- 4 Kohlepulver im Beutel um Mangandioxid (Braunstein) als Kathode
- 5 Elektrolyt
- 6 Zinkbecher
- 7 Stahlmantel
- 8 Bodenscheibe, Minuspol

Die Kohle-Zink-Zelle liefert eine Leerlaufspannung von 1,5 ... 1,7 V. Bei Belastung nimmt die Klemmenspannung durch den wachsenden Innenwiderstand der Zelle rasch ab. Da sich die Zelle in Betriebspausen regeneriert, wird sie bei kurzzeitiger Last mit längeren Betriebspausen viel besser ausgenutzt als bei Dauerbelastung (Bild 10.16a).

Die Betriebseigenschaften sind gekennzeichnet durch eine Energiedichte zwischen 120 mWh/cm^3 und 150 mWh/cm^3 . Die Baugrößen liegen im Bereich $50 \text{ mAh} \dots 30 \text{ Ah}$, sie bestimmen den Abszissen-Maßstab in Bild 10.16a. Unterhalb von 0°C lässt die Kohle-Zink-Zelle deutlich in ihrer Leistung nach. Der praktische Einsatzbereich liegt bei $-10 \dots +50^\circ\text{C}$.

Alkali-Mangan-Zellen enthalten Kaliumhydroxid als Elektrolyt zwischen der in der Mitte der Zelle angeordneten Anode aus gepresstem Zinkpulver und der ringförmigen Kathode aus Braunstein. Die Energiedichte lässt sich auf 300 mWh/cm^3 vergrößern. Die Leerlaufspannung von 1,5 V sinkt bei Belastung weit weniger ab als bei der Kohle-Zink-Zelle (Bild 10.16b). Die Alkali-Mangan-Zelle kann im Temperaturbereich $-20 \dots +55^\circ\text{C}$ eingesetzt werden.

Silberoxid-Zink-Zellen arbeiten ebenfalls mit Kalilauge als Elektrolyt und einer Zinkanode. Die Kathode besteht hier aus gepresstem Silberoxidpulver. Aus Preisgründen werden sie hauptsächlich als Miniaturzellen ausgeführt (*Knopfzellen*, z. B. 8 mm Durchmesser, 4 mm Höhe), die z. B. in Uhren, Hörgeräten und in kompakten elektronischen Geräten eingesetzt werden. Energiedichten bis zu 600 mWh/cm^3 sind erreichbar. Die Leerlaufspannung beträgt 1,6 V und bleibt bis zu dem (belastungsabhängigen) Entladungsende nahezu konstant.

Lithium-Zellen arbeiten mit Lithium als Anode und erreichen je nach Kathodenmaterial Leerlaufspannungen zwischen 1,5 und 3,8 V, die während der gesamten Lebensdauer nahezu konstant bleiben (Bild 10.16c), und Energiedichten bis 1 Wh/cm^3 . Als weitere Vorteile sind die mindestens 10-jährige Lagerfähigkeit und der große zulässige Betriebstemperaturbereich von (bis zu) $-55 \dots +125^\circ\text{C}$ anzusehen. Wegen ihrer besonderen Eigenschaften werden Lithiumzellen z. B. in Herzschrittmachern und zur Spannungsversorgung von flüchtigen Speichern in elektronischen Geräten nach Abschalten der Hauptstromversorgung eingesetzt.

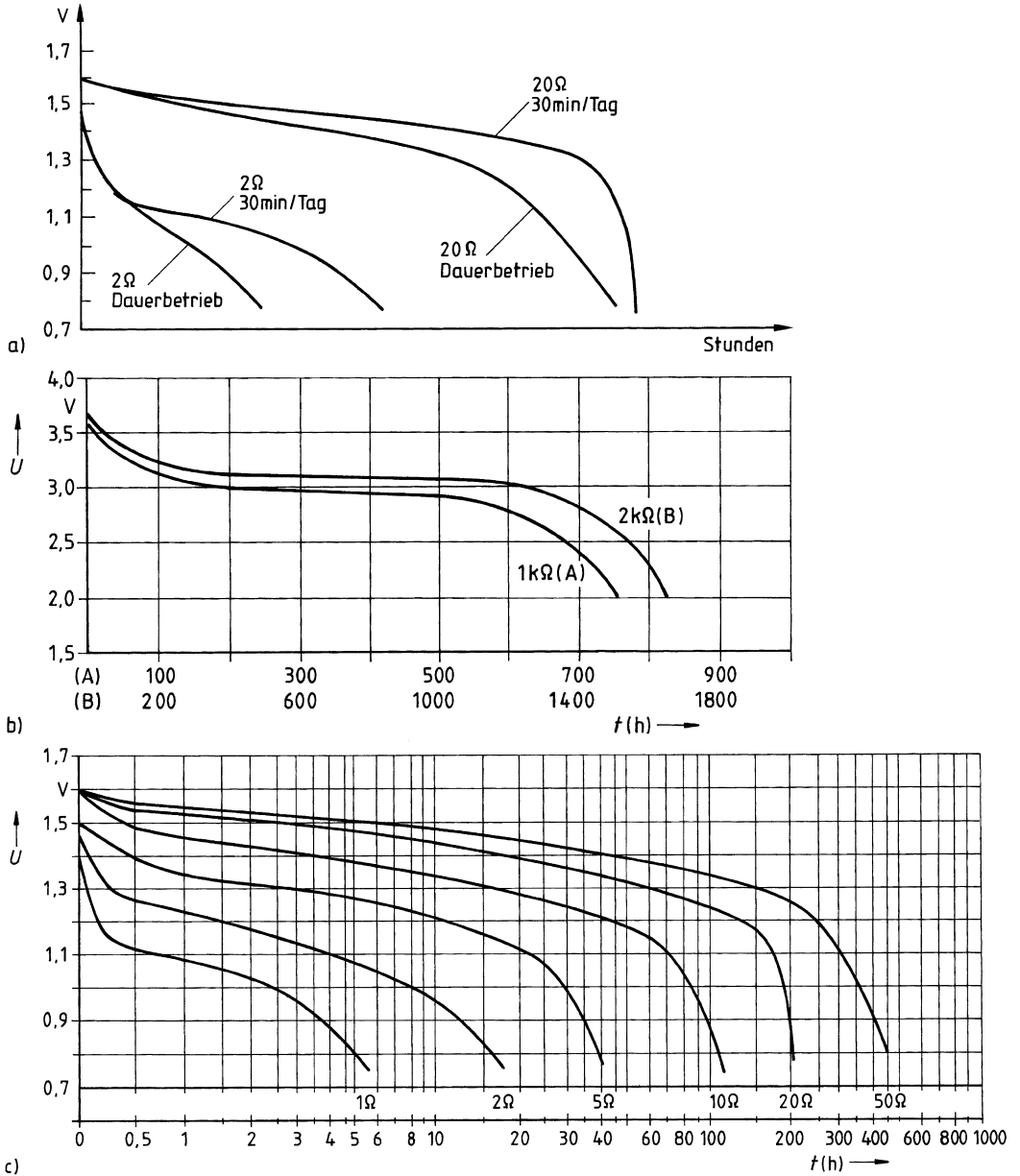


Bild 10.16: Entladekurven von Primärzellen in Abhängigkeit von der Belastung (aus [Jak93])
 a) Kohle-Zink-Zelle bei Dauerentladung bzw. bei Entladung mit Betriebspausen
 b) Lithium-Chromoxid-Zelle ERAA
 c) Alkali-Mangan-Zelle 4020 (LR 20)

Brennstoffzellen sind als spezielle Primärelemente aufzufassen: Sie sind zwar nicht aufladbar, verfügen jedoch über ein nahezu unbegrenztes Ladungsspeichervermögen (in der Batterietechnik als *Kapazität* bezeichnet), da die Reaktionsstoffe (ein Brennstoff, meist Wasserstoff, und als Oxidator Sauerstoff oder auch Luft) kontinuierlich der Ni-Anode und der Ni-Kathode zugeführt werden. Die bei der Oxydation vom Brennstoff an das Anodenmaterial abgegebenen Elektronen fließen unter Energieabgabe durch den äußeren Stromkreis zur Kathode und werden dort vom Oxidationsmittel aufgenommen. Das beim Stromfluss in der Zelle entstehende Reaktionsprodukt (Wasser) muss kontinuierlich aus dem Elektrolyten (z. B. Kalilauge) und aus der Zelle abgeführt werden, ebenso die Reaktions- und Verlustwärme. Bei normalem Luftdruck und Zimmertemperatur werden zum Erzeugen von 1 kWh etwa 660 l Wasserstoff und 330 l Sauerstoff benötigt. Dabei entsteht 0,5 l Wasser. Brennstoffzellen erreichen Wirkungsgrade von 70 %. Anwendungen von zukünftig großer wirtschaftlicher Bedeutung betreffen die netzunabhängige Stromversorgung von Elektroautos, Blockheizkraftwerken, die Hausenergieversorgung und möglicherweise auch die Versorgung kleiner mobiler Geräte wie Laptops und Mobiltelefone. Ein extraterrestrisches Anwendungsbeispiel ist die elektrische Energieversorgung von Raumfahrzeugen (2 kW bei Gemini, 1,1 kW bei Apollo, 14 kW beim Space Shuttle).

Sekundärzellen (Akkumulatoren)

Die elektrochemischen Vorgänge sind oft umkehrbar, d. h. eine Zersetzung, die bei der einen Stromrichtung hervorgerufen wird, kann von einem Strom entgegengesetzter Richtung wieder rückgängig gemacht werden. Da bei jeder Elektrolyse an den Elektroden Stoffe abgeschieden oder umgeladen werden, ist die Frage von Bedeutung, ob und wie man diese Stoffe, die Energiequellen darstellen, speichern und vor Veränderungen bewahren kann. Hier gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten: Entweder speichert man die Massen, welche die chemische Energie tragen, in den Elektroden selbst oder außerhalb der Elektroden, z. B. als Flüssigkeit oder Gas. Zur Zeit sind nur Sekundärzellen der ersten Art in Betrieb, deren Speichervermögen somit durch die Größe der Elektroden gegeben ist. Wichtige Ausführungsformen sind neben dem klassischen Blei- und Nickelmetallhydrid-Akkumulator vor allem Systeme, die auf Lithium-Ionen basieren ([Jak93], [TR97], [Kie03], [Moo11] und [Kor13]).

10.3.3.2 Elektrolyse, Galvanik und Korrosion

Elektrolyse

Die Elektrolyse findet großtechnische Anwendung

1. in der Metallurgie zum Gewinnen und Raffinieren von Metallen, z. B. von Kupfer, Nickel, Zink, Aluminium, Magnesium, Natrium usw. Beispielsweise wird Aluminium aus einer Schmelze von Tonerde (Al_2O_3) und Kryolith ($\text{AlF}_3 \cdot 3 \text{NaF}$) in Eisenwannen gewonnen, deren mit Graphit ausgekleidete Innenwände als Kathode dienen, während als Anode dicke Kohleelektroden benutzt werden, welche in die Schmelze eintauchen. Das Aluminium scheidet sich in flüssiger Form am Wannenboden ab und kann dort abgelassen werden. Zur Gewinnung von 1 kg Aluminium sind nach Gl. (10.43) 3000 Ah nötig.
2. in der chemischen Großindustrie beim Gewinnen von Wasserstoff, bei der Chloralkalielektrolyse zum Gewinnen von Alkali und Chlor, bei der Herstellung von Oxidationsmitteln usw. Beispielsweise wird zur Chlorerzeugung eine NaCl-Lösung zwischen einer Titan-Kathode und einer Edelstahl-Anode elektrolysiert, an der das Chlorgas gewonnen wird.

Galvanik

Die *Galvanotechnik* befasst sich mit dem Erzeugen festhaftender metallischer Überzüge aus edlerem Metall auf unedleren Metallen (z. B. verkupfern, vernickeln, verchromen, verzinken, verzinnen, versilbern, vergolden, platinieren). Die Galvanotechnik spielt z. B. in der Fahrzeugindustrie, bei der Herstellung gedruckter Schaltungen sowie mechanischen Schaltern und Steckverbindungen eine große Rolle. Zur galvanischen Oberflächenveredelung gehört auch das Aufbringen einer Oxidschutzschicht auf Aluminium (*Eloxalverfahren*).

Unter *Galvanoplastik* (= Elektroformung) versteht man die Anfertigung naturgetreuer Abdrücke feinsten Muster (Galvanos), z. B. für die Kunststoffindustrie (Master zur Herstellung von CDs und DVDs) und die elektronische Industrie (z. B. Kupferfolien für gedruckte Schaltungen).

Korrosion

Korrosion ist eine schädliche Wirkung der Elektrolyse, die auftritt, wenn verschiedene Metalle mit feuchten Stoffen in Berührung kommen und sich hierbei ein Stromkreis bildet. Dabei wird das als Anode wirkende Metall zersetzt, z. B. bei der Korrosion von Rohrleitungen durch im Erdreich vagabundierende Gleichströme einer elektrischen Bahn. Zur Vermeidung von Korrosion muss ein die gefährdenden Metallflächen umgebender isolierender Schutz vorgesehen werden. Auch bei Installationen in Gebäuden ist darauf zu achten, dass verschiedene Metalle (z. B. Bleirohre und Kupferdrähte) nur mit dazwischenliegender elektrischer Isolation miteinander mechanisch verbunden werden.

10.4 Elektrische Leitung in homogenen kristallinen Festkörpern

10.4.1 Kristallaufbau von Metallen, Halbleitern und Isolatoren

Feste Körper haben ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Gestalt. Diese Eigenschaften beruhen darauf, dass die Bausteine des Festkörpers (Atome, Moleküle) eine durch ihre gegenseitigen Bindungskräfte bedingte feste Lage zueinander haben. Diese räumliche Lage kann geordnet oder ungeordnet sein. Dementsprechend unterscheidet man den *kristallinen* und den *amorphen Zustand*. Wir beschränken uns im Folgenden zunächst auf den ersteren. In der Elektrotechnik werden häufig Werkstoffe verwendet, die sowohl kristalline als auch amorphe Bereiche enthalten (z. B. Polyethylen, Glaskeramik). Andererseits können in Flüssigkeiten Ordnungszustände auftreten, welche denen eines Kristalls entsprechen (z. B. Flüssigkristalle für LCDs).

Bei den kristallinen Festkörpern unterscheidet man den *einkristallinen* und den *polykristallinen Zustand*. Im ersten Fall besteht die regelmäßige Anordnung der atomaren Bausteine über den gesamten Körper hinweg, im zweiten Fall setzt sich der Festkörper aus einer großen Zahl sehr kleiner Einkristalle unterschiedlicher Orientierung zusammen. In dieser einführenden Darstellung ist die Beschränkung auf den einkristallinen Zustand ausreichend.

Metalle kristallisieren überwiegend in einem von drei Gittertypen. In den Bildern 10.17a-c sind die *Elementarzellen* dieser Typen dargestellt, durch deren periodische Fortsetzung in den drei Raumrichtungen der makroskopische Kristall gebildet wird. Tabelle 10.4 gibt einen Überblick über technisch wichtige Vertreter dieser Gittertypen.

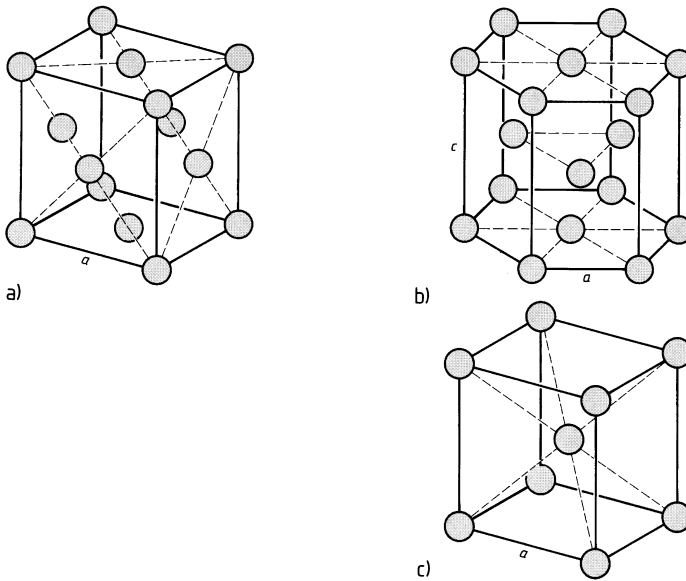


Bild 10.17: Elementarzellen der drei häufigsten Gittertypen bei Metallen (aus [Mün87])

- a) kubisch-flächenzentriert (kfz)
- b) hexagonal dichteste Packung (hdP)
- c) kubisch-raumzentriert (krz)

Tabelle 10.4: Gitterstrukturen metallischer Werkstoffe (nach [Mün87])

	kubisch-flächen-zentriert	hexagonal dichteste Packung	kubisch-raum-zentriert
Beispiele	Cu, Ag, Au, Al, Ni, Pb, Pt	Be, Mg, Zn, Cd	Cr, Mo, Ta, W, Li, Na, K

Die elektronischen *Halbleiter* Germanium und Silizium stehen wie der Kohlenstoff in der 4. Gruppe des Periodischen Systems der Elemente und kristallisieren im *Diamantgitter*: Jedes Atom ist von vier nächsten Nachbarn umgeben, die sich in den Ecken eines Tetraeders befinden. Ein solches Gitter entsteht durch Ineinanderschachteln zweier kubisch-flächenzentrierter Gitter, die in den drei Raumrichtungen jeweils um ein Viertel der Raumdiagonale verschoben sind (Bild 10.18a).

Germanium und Silizium sind *Element-Halbleiter*, da sie jeweils nur aus einer Atomsorte bestehen. Daneben spielen in der Elektrotechnik *Verbindungs-Halbleiter* vom Typ $A^{III}B^V$ bzw. $A^{II}B^{VI}$ eine wichtige Rolle. Zur *ersten* Gruppe gehören z. B. GaAs und InP. Diese Halbleiter kristallisieren im *Zinkblendegitter*. Dieser Gittertyp entsteht – in Analogie zum Diamantgitter – durch Ineinanderschachteln je eines kubisch-flächenzentrierten Gitters vom Atomtyp A bzw. B. Dadurch ist jedes Atom der Sorte A (B) Mittelpunkt eines Tetraeders, in dessen vier Ecken Atome der Sorte B (A) sitzen (Bild 10.18b). Zur *zweiten* Gruppe gehört z. B. Cadmiumsul-

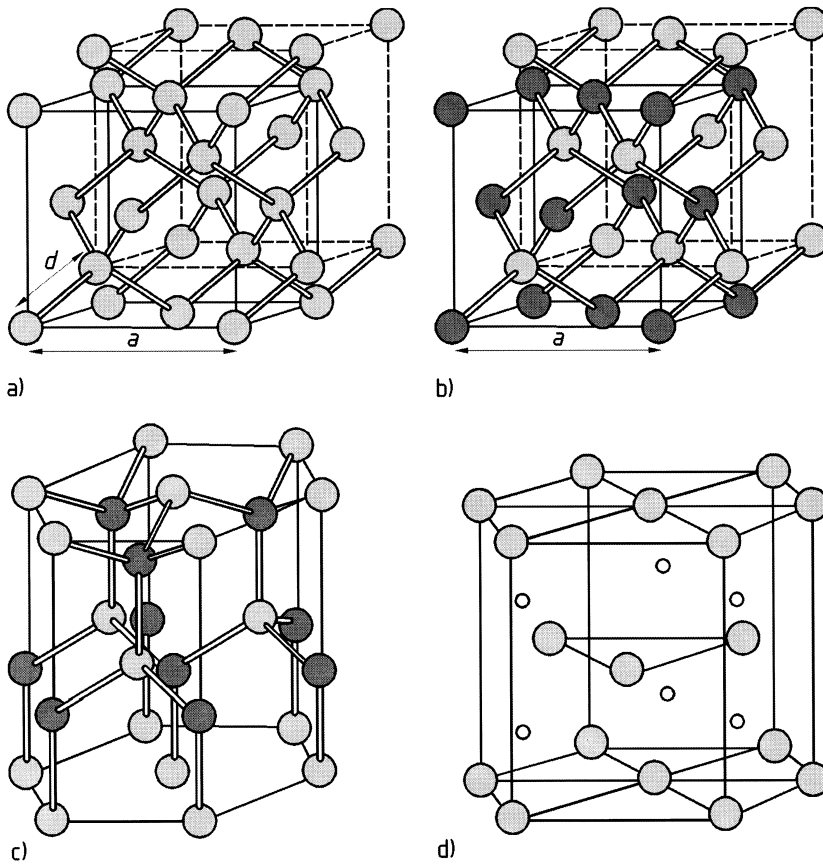


Bild 10.18: Gittertypen bei Halbleitern bzw. Isolatoren

- a) Diamantgitter (aus [Mün87])
- b) Zinkblendegitter (aus [Mün87])
- c) Wurtzitgitter (aus [Mün87])
- d) Korundstruktur (aus [Sch91]); die Kationen sind als leere Kreise dargestellt

fid, das im *Wurtzitgitter* kristallisiert, welches durch Ineinanderschachteln zweier hexagonaler Teilgitter entsteht (Bild 10.18c).

Ein Beispiel für einen *Isolator* mit *elektronischer Bindung* ist der Diamant (Bild 10.18a). Ein Beispiel für *Ionenbindung* ist der Saphir (einkristallines Al_2O_3), der in der Korundstruktur kristallisiert (Bild 10.18d).

10.4.2 Energiebändermodell

Die dicht benachbarten Atome in einem Kristall stehen in einer starken kräfte- und energiemäßigen Wechselwirkung. Als Folge davon treten an die Stelle der möglichen diskreten Energiewerte der Elektronen im Einzelatom endliche (erlaubte) Energiebereiche, so genannte *Energiebänder*. Die dazwischenliegenden Energiebereiche nennt man verbotene Energiebänder und die Gesamtheit aller Energiebänder das Energiebändermodell, kurz *Bändermodell*. Sein Zustandekommen und die damit mögliche Klassifizierung der Festkörper in Metalle, Halbleiter und Isolatoren werden in diesem Abschnitt erläutert.

10.4.2.1 Energiewerte der Elektronen im Einzelatom

Nach dem sehr einfachen *Bohrschen Atommodell* bewegen sich die Elektronen eines Atoms um den Atomkern in kreis- bzw. ellipsenförmigen Bahnen, wobei der Atomkern Mittelpunkt der Kreise oder ein Brennpunkt der Ellipsen ist. Der positiv geladene Atomkern (Kernladungszahl z) ist von z negativ geladenen Elektronen umgeben, sodass die Wirkung der positiven Ladung des Kerns gerade durch die Gesamtladung aller Elektronen aufgehoben wird und somit das Atom nach außen hin neutral wirkt.

Wesentlich für die weiteren Betrachtungen ist das durch die Erfahrung bestätigte Postulat, dass die an den Atomkern gebundenen Elektronen nur auf ganz bestimmten *Bahnen* (*Schalen*) den Atomkern umkreisen können, ohne Energie in Form einer elektromagnetischen Welle abzustrahlen. Diese Erfahrungstatsache ist im Rahmen der klassischen Physik nicht zu verstehen, sondern eine Folge quantenmechanischer Gesetze. Entsprechend seiner Geschwindigkeit (kinetische Energie) und seiner Entfernung vom Kern (potenzielle Energie) hat das Elektron eine für jede Bahn charakteristische, konstante Gesamtenergie W_n (auch *Energieniveau* oder *Energie-term* genannt). Wenn der Nullpunkt der potenziellen Energie ins unendlich Ferne gelegt wird, um eine allgemeingültige Darstellung zu erreichen, bedeutet $W_n < 0$, dass das Elektron an den Kern gebunden ist. Für diese Bindungszustände gilt nach der Quantentheorie $-W_n \sim 1/n^2$ (Bild 10.19). Da nur eine diskrete Schar von Elektronenbahnen existiert, sind Zwischenwerte nicht möglich im Gegensatz zum freien Elektron, das beliebige Werte seiner Gesamtenergie haben kann.

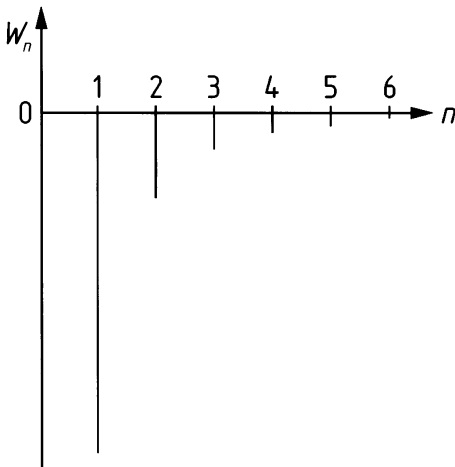


Bild 10.19: Darstellung der möglichen Energiewerte $W_1, W_2, W_n \dots$ von Elektronen beim Bohrschen Atommodell

In der Natur stellt sich jedes physikalische System so ein, dass sein Energieinhalt so klein wie möglich ist. Daher haben auch die Elektronen das Bestreben, ein möglichst tiefes Energieniveau (möglichst kleine *Schalenummer* n) einzunehmen. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik finden auf dem erlaubten Energieniveau W_n der n -ten Schale $2n^2$ Elektronen Platz, d. h. Bahnen in großer Entfernung vom Atomkern können mehr Elektronen aufnehmen als Bahnen in unmittelbarer Umgebung des Kerns. Die Elektronen eines Atoms besetzen daher zunächst die unteren Energieniveaus (beginnend mit $n = 1$).

Das oberste Energieniveau, das Elektronen enthält, ist meist unvollständig besetzt. Die Elektronen in der äußersten Schale sind für chemische Reaktionen maßgebend, denn sie sind die am lockersten an den Atomkern gebundenen Elektronen. Ihre Anzahl ist gleich der *Wertigkeit* (*Valenz*) der betreffenden Atomsorte; man nennt sie daher *Valenzelektronen*.

10.4.2.2 Energiewerte der Elektronen im kristallinen Festkörper, Klassifizierung nach Metallen, Halbleitern und Isolatoren

Wegen der engen räumlichen Nachbarschaft der Atome im Kristall treten ihre Elektronenhüllen in eine starke kräfte- und energiemäßige *Wechselwirkung*. Als Folge davon entstehen aus jedem erlaubten diskreten Energieniveau eines Elektrons im Einzelatom N eng benachbarte, erlaubte Energieniveaus eines Elektrons im Kristall ($N =$ Zahl der in Wechselwirkung stehenden Atome).

Hierzu gibt es ein anschauliches Analogon aus dem Bereich der gekoppelten elektrischen Netzwerke: Ein frei schwingender LC -Schwingkreis ist durch eine charakteristische Frequenz gekennzeichnet, die Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, bei der Energie zwischen den beteiligten Speichern Induktivität L und Kapazität C periodisch ausgetauscht wird. Entsprechend besitzt ein System aus zwei gleichen gekoppelten Schwingkreisen zwei derartige charakteristische Frequenzen, von denen je eine etwas oberhalb und unterhalb der Resonanzfrequenz des Einzelkreises liegt. Diese beiden Resonanzfrequenzen des Gesamtsystems liegen umso weiter auseinander, je stärker die Kopplung der beiden Schwingkreise ist (Beispiel 10.9).

Beispiel 10.9: Resonanz bei gekoppelten Schwingkreisen

Gegeben ist das in Bild 10.20 dargestellte System aus zwei transformatorisch gekoppelten Schwingkreisen.

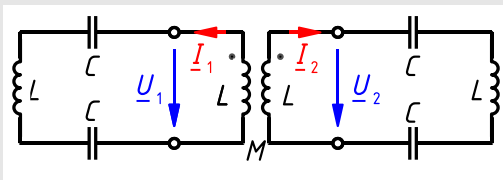


Bild 10.20: System aus zwei gleichen, transformatorisch gekoppelten Schwingkreisen

Für die beiden Kreise gilt nach dem Maschensatz

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{2}{j\omega C} \underline{I}_1 + j\omega L \underline{I}_1, \\ \underline{U}_2 &= \frac{2}{j\omega C} \underline{I}_2 + j\omega L \underline{I}_2. \end{aligned}$$

Nach Gl. (6.106a, b) gilt für den verlustlosen Übertrager beim in Bild 10.20 auf beiden Seiten verwendeten Erzeuger-Zählpfeilsystem

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= -j\omega L \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= -j\omega M \underline{I}_1 - j\omega L \underline{I}_2, \end{aligned}$$

d. h. zusammengefasst

$$\begin{aligned} 2(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 &= 0, \\ j\omega M \underline{I}_1 + 2(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \underline{I}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Da die triviale Lösung $\underline{I}_1 = 0, \underline{I}_2 = 0$ ausgeschlossen werden kann, erhält man die Lösung aus der Forderung, dass die Koeffizienten-Determinante dieses Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} 2(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) & j\omega M \\ j\omega M & 2(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \end{vmatrix} = -4(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + \omega^2 M^2 = 0$$

sein muss. Diese biquadratische Gleichung führt auf die beiden Resonanzfrequenzen des Schwingkreissystems:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{2L}}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{2L}}}, \quad (M \leq L).$$

Dieses Ergebnis belegt quantitativ die eingangs gemachten Bemerkungen.

In Verallgemeinerung des Ergebnisses des Beispiels 10.9 gilt: Eine Kettenschaltung aus N gleichen verlustfreien Schwingkreisen besitzt N Resonanzfrequenzen. Sie liegen, wie die hier nicht wiedergegebene Rechnung zeigt, im endlichen Frequenzbereich

$$f_{\text{res}} / \sqrt{1 + \frac{M}{L}} \dots f_{\text{res}} / \sqrt{1 - \frac{M}{L}}, \quad (M \leq L) \tag{10.48}$$

Für $N \rightarrow \infty$ entsteht somit ein Kontinuum von Resonanzfrequenzen (Bild 10.21).

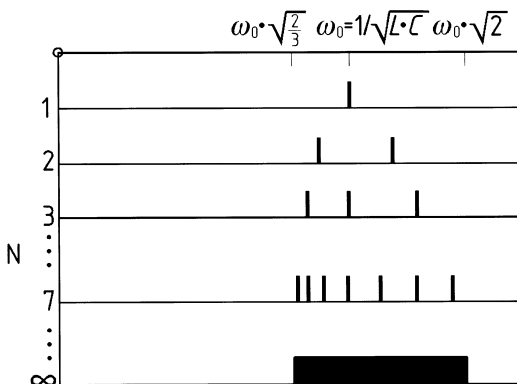
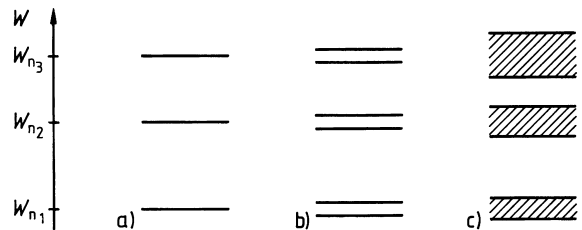


Bild 10.21: Resonanzkreisfrequenzen einer Kette aus N gleichen, transformatorisch gekoppelten Schwingkreisen ($M/L = 0,5$)

Eine harmonische Anregung (Spannung oder Strom), die dem einen Ende der Kette zugeführt wird, pflanzt sich in Form einer ungedämpften (Spannungs- oder Strom-)Welle über die Struktur hinweg fort, sofern die Frequenz im Intervall (10.48) liegt. Man nennt das Intervall daher *Durchlassbereich*. Für Frequenzen außerhalb dieses Intervalls verursacht eine Anregung eine vom Ort der Anregung aus über der Struktur exponentiell abfallende Strom-Spannungs-Verteilung. Diese Frequenzen bilden den *Sperrbereich* der Struktur. (Dabei ist die Dämpfung keine Folge von Energieverlusten in den Elementen der Schwingkreise, denn diese sind ja als verlustfrei angenommen; vielmehr liegt hier Reflexionsdämpfung vor.)

Diese Tatsachen lassen sich nun qualitativ auf das Verhalten eines Elektrons in einem Kristall übertragen. Dabei beschränken wir uns, da es hier nur um das Prinzip geht, auf eine lineare Anordnung von N gleichartigen Atomen (*eindimensionaler Kristall*), bei der im Sinne unserer Analogie jedes Atom lediglich mit seinen beiden nächsten Nachbarn in Wechselwirkung tritt. Durch diese Wechselwirkung spaltet jeder erlaubte atomare Energiewert W_n in N erlaubte Energiewerte für ein Kristallelektron auf, die jeweils in einem endlichen Energieintervall liegen (Bild 10.22, vgl. Bild 10.21).

Bild 10.22: Zur Entstehung des Bändermodells aus den möglichen Energiewerten der Einzelatome
 a) Einzelatom (vgl. Bild 10.19)
 b) zwei Atome
 c) Festkörper ($N \rightarrow \infty$, typisch 10^{22} cm^{-3})



Wegen der außerordentlich großen Anzahl der in einem Festkörper vereinigten Atome ($N \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$) entstehen so viele dicht beieinanderliegende Energiewerte, dass man sie nicht mehr voneinander unterscheiden kann: Aus jedem Energieniveau eines Einzelatoms entsteht scheinbar als Kontinuum ein *Energieband* gewisser Breite (Bild 10.22c).

Die zwischen den Bändern mit erlaubten Energieniveaus verbleibenden Zwischenräume (*verbotene Bänder*) enthalten keine durch Elektronen stationär besetzbaren Energieniveaus. Die Breite der Energiebänder wird für tiefer liegende Energiewerte immer kleiner. Diese Abnahme wird dadurch hervorgerufen, dass die Kopplung zwischen den Elektronen der Atome im Gitter um so schwächer ist, je stärker ihre Bindung an den Atomkern ist, d. h. je näher sie sich bei ihm befinden. Bei Bändern höher liegender Energiewerte kann die Breite dagegen so groß werden, dass sich sogar zwei Bänder überlappen.

Die Analogie zwischen der Schwingkette und dem eindimensionalen Kristall gilt auch bezüglich der Bewegung eines Elektrons durch den Kristall hindurch: Ein *Elektron* mit einem Wert der Gesamtenergie *innerhalb* eines *erlaubten* (*verbotenen*) *Bandes* breitet sich in Form einer *ungedämpften* (*gedämpften*) *Materiewelle* aus¹. Dem zur Energie proportionalen Ampli-

¹Die duale Teilchen- und Wellenvorstellung vom Elektron ist experimentell fundiert. So bietet sich beispielsweise für die Beschreibung der Ablenkung eines Elektronenstrahls durch elektrische oder magnetische Felder das Teilchenbild an, während die „Aufspaltung eines Elektronenstrahls“ beim Auftreffen auf die Oberfläche metallischer Substanzen, in ähnlicher Weise wie die Beugung von Licht an Gittern, nur durch den Wellencharakter des Elektrons erklärt werden kann.

tudenquadrat der Spannungs- bzw. Stromwelle bei der Schwingkreiskette entspricht nach den Gesetzen der Quantenmechanik die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* eines Elektrons an einer Stelle im Kristall. Der räumlich konstanten Energiedichte im Durchlassbereich der Schwingkreiskette entspricht somit die konstante Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Kristallelektrons in einem erlaubten Energieband, d. h. die dortigen Energiewerte sind im gesamten Kristall „erlaubt“. Daher wird jeder erlaubte Energiewert durch einen durchgehenden Strich gekennzeichnet (bei unserem bislang eindimensionalen Kristall also längs der x-Achse). Kristallelektronen mit Energiewerten in verbotenen Bändern sind entsprechend durch gedämpfte Materiewellen zu beschreiben mit Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, welche vom Ort der Freisetzung des Kristallelektrons aus exponentiell abfallen (Abschnitt 10.4.4.2).

Die vorstehend beschriebene Analogie zwischen der Ausbreitung einer Spannungs- bzw. Stromwelle über eine Schwingkreiskette hinweg und der Bewegung eines Kristallelektrons bestimmter Energie ist deshalb nicht überraschend, da es sich in beiden Fällen um die *Wellenausbreitung* in *periodischen Strukturen* handelt.

Entsprechend wie im Einzelatom werden im Kristall die erlaubten Energieniveaus von tiefen Werten zum Wert null hin durch die Gesamtheit der Elektronen besetzt. Dabei kann das oberste mit Elektronen besetzte Energieband entweder vollständig besetzt sein – wie die darunter liegenden Bänder – oder unvollständig.

Die Quantenmechanik lehrt, dass ein vollständig mit Elektronen besetztes Energieband keinen Beitrag zur elektrischen Leitfähigkeit leistet, da sich die Anteile der einzelnen Elektronen kompensieren. Im Teilchenbild wird dieser Umstand wie folgt beschrieben und ist anschaulich verständlich: Alle Valenzelektronen sind in den Bindungen zwischen den Atomen gefangen und stehen daher für die Stromleitung nicht zur Verfügung.

Hieraus ergibt sich sofort eine Einteilung der kristallinen Festkörper in Leiter (Metalle) und Nichtleiter (Isolatoren). Im ersten Fall ist das oberste mit Elektronen besetzte Energieband unvollständig besetzt (man nennt es daher *Leitungsband*), im zweiten Fall ist auch das oberste mit Elektronen besetzte Energieband vollständig besetzt (man nennt es *Valenzband*). Das Leitungsband ist hier also leer. Die Breite $W_G = W_C - W_V$ des verbotenen Energiebandes (W_C = Unterkante Leitungsband, W_V = Oberkante Valenzband) wird *Bandabstand* genannt.

Bei dieser Klassifizierung fehlen zunächst die Halbleiter. Wie diese zwischen die Metalle und Isolatoren einzuordnen sind, wird im Folgenden erläutert.

Die vorstehend beschriebene Besetzung der erlaubten Energiezustände gilt exakt nur am absoluten Nullpunkt der Temperatur $T = 0$ K. Bei Temperaturen $T > 0$ K, d. h. in allen realen Fällen, führt das Prinzip des Energieminimums der Elektronengesamtheit in Verbindung mit einer quantenmechanischen Zusatzbedingung (Ausschließungsprinzip von Pauli) dazu, dass jeder erlaubte Energiezustand W nicht automatisch besetzt ist, sondern dass hierfür lediglich eine gewisse Wahrscheinlichkeit $f(W, T)$ mit $0 \leq f(W, T) \leq 1$ besteht. Diese *Fermi-Verteilung*

$$f(W, T) = \frac{1}{1 + e^{(W - W_F)/kT}} \quad (10.49)$$

ist in Bild 10.23a in Abhängigkeit von der Elektronenenergie W mit der Temperatur T als Parameter dargestellt.

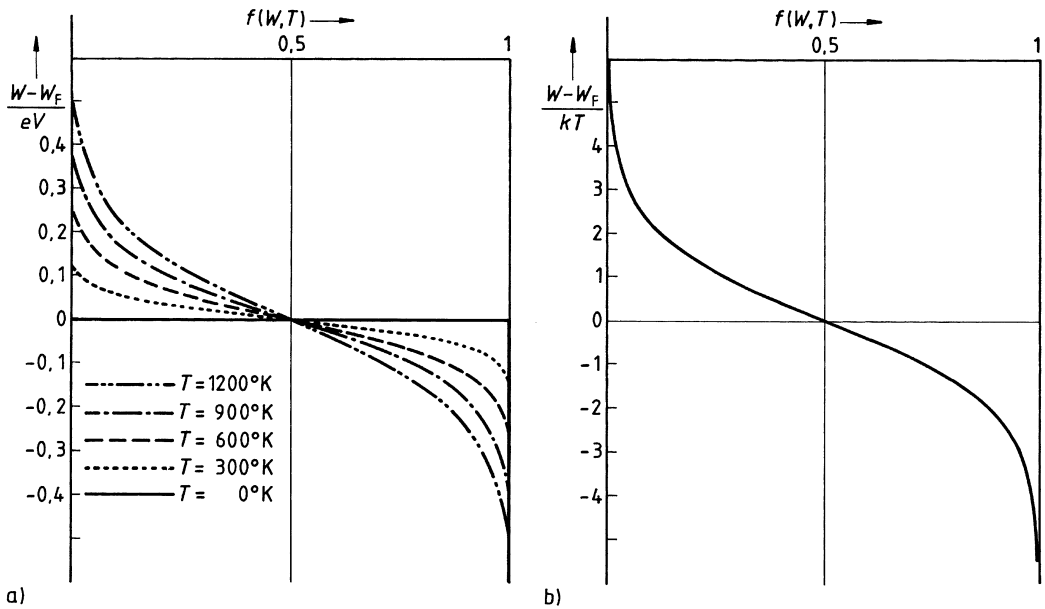


Bild 10.23: Fermi-Verteilung a) für verschiedene Temperaturen, b) normierte Darstellung

Die *Fermi-Energie* W_F errechnet sich aus der Gesamtzahl der Kristallelektronen und ist somit eine entscheidende Materialkenngröße. Die Fermi-Verteilung hat Ähnlichkeit mit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeit von Gasmolekülen und geht formal für $W_F \rightarrow 0$, $W \gg kT$ in diese über. Der Größe kT (≈ 25 meV bei Raumtemperatur) kommt nach Gl. (10.49) die Bedeutung der Maßeinheit der Elektronenenergie im Kristall zu.

Am absoluten Nullpunkt $T = 0$ K springt die Verteilungsfunktion an der Stelle $W = W_F$ vom Wert $f = 1$ (für $W < W_F$) auf den Wert $f = 0$ (für $W > W_F$), d. h. alle erlaubten Energiezustände unterhalb (oberhalb) des *Fermi-Niveaus* sind mit Sicherheit besetzt (unbesetzt).

Bei Temperaturen $T > 0$ K geht die Verteilung in der Umgebung der Fermi-Energie innerhalb eines Energieintervalls von wenigen kT von f -Werten nahe 1 zu Werten nahe 0 über. Dazwischen liegende erlaubte Energiewerte sind mit einer Wahrscheinlichkeit $0 < f(W, T) < 1$ besetzt (Bild 10.23b).

Nach diesen Erläuterungen können wir nun Metalle, Halbleiter und Isolatoren in Verbindung mit dem Energiebändermodell des Festkörpers wie folgt klassifizieren (Bild 10.24):

Bei **Metallen** liegt das Fermi-Niveau W_F innerhalb des Leitungsbandes, sodass es bei allen Temperaturen $T \geq 0$ K erlaubte Energiezustände gibt, die auch besetzt sind, ohne dass das Leitungsband voll besetzt ist. Dieser Festkörpertyp besitzt also für alle Temperaturen $T \geq 0$ K eine Leitfähigkeit.

Bei **Halbleitern** liegt das Fermi-Niveau etwa in der Mitte des verbotenen Energiebereiches $W_V \dots W_C$ (daher der Name Halbleiter). Folglich ist bei der Temperatur $T = 0$ K das Leitungsband leer, das Valenzband voll gefüllt. Im Teilchenbild heißt das: Alle Valenzelektronen sind in Bindungen zwischen den Atomen „gefangen“, der Festkörper leitet den Strom nicht

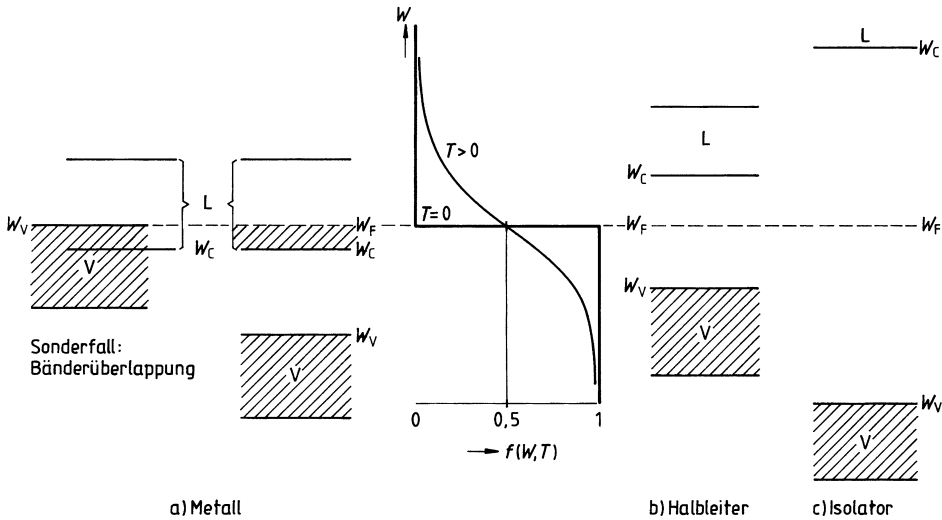


Bild 10.24: Bändermodell eines Metalls (a), Halbleiters (b) und Isolators (c)

– er verhält sich wie ein Isolator. Für Temperaturen $T > 0\text{ K}$ sind einige Energieniveaus in der Nähe der Oberkante des Valenzbandes mit einer merklichen Wahrscheinlichkeit unbesetzt. Die fehlenden Elektronen haben durch Aufnahme thermischer Energie aus dem Kristallgitter den Bandabstand $W_G = W_C - W_V$ überwunden und besetzen mit derselben Wahrscheinlichkeit entsprechende erlaubte Energieniveaus in der Nähe der Unterkante des Leitungsbandes. Im Teilchenbild stellt sich dieser Vorgang wie folgt dar: Bei Temperaturen $T > 0\text{ K}$ schwingen die Gitterbausteine um ihre Gleichgewichtslage und können einen Teil dieser thermischen Energie an Valenzelektronen abgeben. Wenn die übertragene Energie größer als die Bindungsenergie des Valenzelektrons an das Wirtsatom ist, wird es vom Atom abgegeben und steht als (quasi-) freies Elektron zur Stromleitung im Kristall zur Verfügung. Das Atom bleibt ionisiert zurück. Offenbar ist die untere Grenze der Bindungs- (= Ionisierungs-) Energie identisch mit dem Bandabstand W_G . Dieser Festkörpertyp besitzt also erst für $T > 0\text{ K}$ eine Leitfähigkeit.

Wie bei Halbleitern liegt auch bei **Isolatoren** das Fermi-Niveau nahe der Mitte des verbotenen Energiebereiches $W_V \dots W_C$. Der Unterschied zum Halbleiter besteht jedoch darin, dass der Bandabstand $W_C - W_V = W_G$ hier viel größer ist (Diamant 5,5 eV; Saphir 8,7 eV), d. h. auch der Energieaufwand, um ein Elektron aus dem voll besetzten Valenzband in das leere Leitungsband zu heben. Im Teilchenbild: Die Ionisierungsenergie zur Loslösung eines Valenzelektrons vom Wirtsatom ist viel größer und damit die Möglichkeit, eine Leitfähigkeit zu erzielen, viel geringer. Eine merkliche Leitfähigkeit würde bei diesem Festkörpertyp rechnerisch erst bei Temperaturen im Bereich des Schmelzpunktes (Diamant 3500 °C, Saphir 2050 °C) vorhanden sein. Bei tieferen Temperaturen, also dort, wo dieser Festkörpertyp in der Elektrotechnik eingesetzt wird, ist sein Leitungsband praktisch leer, d. h. er ist ein (nahezu idealer) Nichtleiter.

10.4.3 Elektrische Leitung in Metallen

10.4.3.1 Normalleitung

Die in einem metallischen Leiter vorhandenen (quasi-) freien Elektronen (d. h. im Bändermodell die Elektronen im Leitungsband) führen wegen ihrer Wechselwirkung mit den Metall-Atomen bzw. -Ionen eine thermisch bedingte unregelmäßige Eigenbewegung aus, bei der sie *im zeitlichen Mittel* am Ort bleiben. Wenn auf diese Elektronen als Folge einer an den metallischen Leiter angelegten Spannung eine elektrische Feldstärke \vec{E} einwirkt, überlagert sich der stochastischen thermischen Bewegung eine gerichtete Bewegung entlang der elektrischen Feldlinien mit der *Driftgeschwindigkeit*

$$\vec{v} = -b \vec{E}. \quad (10.50)$$

Der Proportionalitätsfaktor b heißt *Beweglichkeit* (wie bei den ionisierten Gasen, siehe die entsprechende Gl. (10.31)). Dafür gilt in Analogie zu Gl. (10.32)

$$b = \frac{e \Lambda}{m_e \bar{v}_e} = \frac{e}{m_e} \tau_e \quad (10.51)$$

mit der *mittleren freien Weglänge* Λ , der mittleren Elektronengeschwindigkeit (nach [Mün93])

$$\bar{v}_e = 3,58 \cdot \sqrt[3]{n/\text{cm}^3} \text{ cm s}^{-1}$$

und der Zahl der am Strom beteiligten Elektronen pro Volumen n . In erster Näherung darf man annehmen, dass *jedes Metallatom ein quasi-freies Elektron liefert*. Daher ist n von der Größenordnung der Avogadro-Konstante (siehe Abschnitt 10.3.2.1) $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Für die Stromdichte gilt entsprechend zu Gl. (10.35) (im Unterschied dazu gibt es hier aber nur eine Ladungsträgerart, nämlich die Elektronen mit der Ladung $Q_e = -e$)

$$\vec{J} = -e n \vec{v}. \quad (10.52)$$

Durch Einsetzen der Gl. (10.50) in die Gl. (10.52) folgt

$$\vec{J} = e n b \vec{E}.$$

Die Größe

$$\kappa = e n b \quad (10.53)$$

ist die *elektrische Leitfähigkeit*, ihr Kehrwert $1/\kappa = \rho$ ist der *spezifische elektrische Widerstand*. Da die Größen n und b für konstante Temperatur von der elektrischen Feldstärke (bzw. von der anliegenden Spannung) unabhängig sind, ist die elektrische Stromdichte proportional zur Feldstärke bzw. zur Spannung. Diese Aussage

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (10.54)$$

wird als *Ohmsches Gesetz* bezeichnet (Abschnitt 2.1.1.1).

Beispiel 10.10: Ladungsträgerströmung in Silber

Silber besitzt bei Raumtemperatur den spezifischen Widerstand $\varrho = 1,6 \mu\Omega\text{cm}$. Wie groß sind die Beweglichkeit und die mittlere freie Weglänge Λ und wie groß ist die Driftgeschwindigkeit $|\vec{v}|$ bei der Stromdichte 1 A/mm^2 ?

Aus Gl. (10.53) folgt mit $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $n \approx 5,86 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$

$$b = \frac{1}{\varrho e n} = \frac{1}{1,6 \mu\Omega \text{ cm} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 5,86 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}} = 66,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}.$$

Der Wert für n ergibt sich aus der Dichte $10,5 \text{ g cm}^{-3}$, der relativen Atommasse 107,87 und der Avogadro-Konstante $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Die mittlere Elektronengeschwindigkeit beträgt

$$\bar{v}_e = 3,58 \cdot \sqrt[3]{5,86 \cdot 10^{22}} \text{ cm s}^{-1} = 1,39 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-1}.$$

Damit folgt aus Gl. (10.51)

$$\Lambda = \frac{9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g} \cdot 1,39 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-1}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \cdot 66,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} = 5,27 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

Das sind etwa 100 Atomdurchmesser. Die gesuchte Driftgeschwindigkeit erhält man aus Gl. (10.52) zu

$$|\vec{v}| = \frac{1 \text{ A mm}^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 5,86 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}} = 0,11 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Sie ist also um 10 Zehnerpotenzen kleiner als die mittlere Elektronengeschwindigkeit \bar{v}_e !

Die (quasi-) freien Metallelektronen legen also in Richtung eines einwirkenden elektrischen Feldes \vec{E} im Mittel nur sehr kleine Strecken und diese auch nur mit sehr geringer Geschwindigkeit ungestört zurück. Durch die fortwährenden Zusammenstöße mit den Metall-Ionen wird die einem Elektron zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen vom elektrischen Feld zugeführte kinetische Energie ΔW jeweils in ungeordnete Bewegung der Gitterbausteine umgesetzt, d. h. in Joulesche Wärme. Dabei gilt $\Delta W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$, also mit Gl. (10.50) $\Delta W = (-e E)(\tau_e \cdot (-b E))$. Da die Anzahl der Zusammenstöße pro Volumen proportional zur Elektronendichte n ist und pro Zeit jedes Elektron im Mittel $1/\tau_e$ Zusammenstöße erfährt, beträgt die räumliche Dichte der thermischen Verlustleistung

$$W_J = \frac{n}{\tau_e} \cdot \Delta W = e n b E^2 = \kappa E^2.$$

Die Joulesche Stromwärme wächst also mit dem Quadrat der Feldstärke und damit auch der Stromdichte (Gl. (10.54)).

10.4.3.2 Supraleitung

Mit dem Begriff *Supraleitung* bezeichnet man die Erscheinung, dass bei einigen Metallen (sowie Legierungen und metallisch leitenden Verbindungen) der spezifische elektrische Widerstand

beim Unterschreiten einer *Sprungtemperatur* T_C praktisch schlagartig auf einen unmessbar kleinen Wert absinkt. Tabelle 10.5 enthält in der linken und mittleren Spalte eine Auswahl derartiger Materialien. Auch bei einigen Metalloxyden (Keramiken) wurde die Eigenschaft der Supraleitung entdeckt und zwar bei auffallend hohen Sprungtemperaturen (siehe rechte Spalte in Tabelle 10.5). Diese *Hochtemperatur-Supraleiter* sind für den praktischen Einsatz von besonderem Interesse.

Tabelle 10.5: Sprungtemperatur einiger Supraleiter

	T_C/K		T_C/K		T_C/K
Al	1,18	Pb	7,2	La-Ba-CuO	30
In	3,41	Nb	9,46	Y-BaCuO	90
Sn	3,72	NbTi (50 %)	10,5	BiSrCaCuCo	110
V	5,3	Nb ₃ Sn	18	TlBaCaCuO	123

10.4.3.3 Technische Nutzung

Die Normalleitung von Metallen bzw. Metall-Legierungen wird in einer Fülle von Anwendungen genutzt, wie die folgende stichwortartige Übersicht zeigt:

- *Leiterwerkstoffe*: Wicklungen, Kabel, Freileitungen, Hohlleiteroberflächen, Leiterbahnen in integrierten Schaltungen, Dünn- und Dickschicht-Schaltungen sowie auf Leiterplatten
- *Kontaktwerkstoffe*: Mess-, Nachrichten- sowie Starkstromtechnik
- *Widerstandswerkstoffe*: Normal- und Präzisionswiderstände, Heizleiter
- *Messtechnik*: Widerstandsthermometer, Thermoelemente

Die Werkstoffe werden dabei vorwiegend in polykristalliner Form verwendet.

Für die *Supraleitung* ergeben sich ebenfalls zahlreiche, wenn auch (wegen des Kühlaufwandes) speziellere Anwendungsmöglichkeiten, die sich z. T. noch im Entwicklungsstadium befinden, so z. B. in der *Schwachstromtechnik* für

- hochempfindliche Messtechnik (Magnetometer, Galvanometer, Spannungs-Normale),
- Mikrowellentechnik (Filter und Resonatoren sehr hoher Güte, hochempfindliche Detektoren und Mischer)
- extrem schnelle logische Gatter, Speicher und A/D-Wandler

und in der *Starkstromtechnik* für

- Magnetspulen für Kernforschung, Kernspintomographie, Magnetschwebbahn (in Japan),
- Drehstromkabel und Kabel für die *Hochspannungs-Gleichstromübertragung* (HGÜ) als Alternative zu Hochspannungs-Überlandleitungen
- Spulen für magnetische Energiespeicher, Strombegrenzer.

10.4.4 Elektrische Leitung in Halbleitern

Als Halbleiter wurden ursprünglich alle Substanzen bezeichnet, deren elektrische Leitfähigkeit bei Raumtemperatur zwischen etwa $\kappa = 10^3 \text{ S cm}^{-1}$ und $\kappa = 10^{-10} \text{ S cm}^{-1}$ liegt, also zwischen der sehr großen Leitfähigkeit von Metallen und der sehr kleinen Leitfähigkeit von Isolatoren. Diese rein phänomenologische Kennzeichnung umfasst – selbst bei Beschränkung auf kristalline Substanzen – eine sehr heterogene Stoffgruppe: Die meisten dieser Substanzen zeigen bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit einen positiven Temperaturkoeffizienten (Heißeiter), einige – in Übereinstimmung mit den Metallen – einen negativen (Kaltleiter, z. B. Boride, Karbide, Nitride). Diese Eigenschaft kann sogar bei der selben Substanz je nach Temperaturbereich unterschiedlich sein.

Ferner lässt sich die Leitfähigkeit dieser Stoffe außer durch die Temperatur durch geringfügige Störungen des Gitteraufbaus (z. B. durch Fremdstoffanteile) sowie durch Belichtung wesentlich beeinflussen. In Verbindung mit metallischen Kontakten oder einem zweiten Halbleiter ist je nach Materialkombination die Leitfähigkeit von der Stromrichtung abhängig oder unabhängig.

Diese auf den ersten Blick verwirrende Vielfalt von Erscheinungen kann mit dem atomistischen Modell des kristallinen Halbleiters oder mit seinem Bändermodell erklärt werden. Wegen ausführlicher Darstellungen der Halbleiterphysik wird auf [Mün87] und [Sch90] verwiesen.

Bei den heutzutage gebräuchlichen Halbleitern wird die elektrische Leitfähigkeit nur durch Elektronen verursacht (*elektronische Halbleiter*), die Ionenleitung spielt also keine Rolle. Dabei kommen sowohl *Element-Halbleiter* (Germanium, Silizium) als auch *Verbindungs-Halbleiter* (z. B. GaAs, CdS, InGaAsP) zum Einsatz.

10.4.4.1 Eigenleitung

Beim absoluten Nullpunkt der Temperatur ($T = 0 \text{ K}$) ist der reine Halbleiter ein idealer Isolator, denn die Valenzelektronen vermitteln paarweise die Bindung zwischen benachbarten Atomen und können sich daher – im Gegensatz zu den Metallen – nicht frei innerhalb des Gitters bewegen. Dieser Zustand entspricht im Bändermodell dem vollständig mit Elektronen besetzten Valenzband bei gleichzeitig leerem Leitungsband (Bild 10.24b).

Bei Temperaturen $T > 0 \text{ K}$ wird Energie aus den thermischen Schwingungen der Atome um ihre Gleichgewichtslage auf die gebundenen Elektronen im Atom übertragen. Diese kann ausreichen, um eines oder mehrere der am lockersten gebundenen Elektronen (Valenzelektronen) aus ihrer Bindung herauszureißen, wobei ein positiv geladener (ionisierter) Atomrumpf zurückbleibt. Die losgelösten Elektronen können sich dann im Gitter frei bewegen. (Natürlich unterliegen diese Elektronen den elektrischen Kraftwirkungen der ionisierten Atomrümpfe; man nennt sie daher, zur Unterscheidung der Elektronen im Vakuum, *quasifrei*.) Bei Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes \vec{E} können diese Elektronen einen Strom transportieren und so zu einer elektrischen Leitfähigkeit der Substanz führen. Mit wachsender Temperatur nimmt die Anzahl der thermisch aufgebrochenen Elektronenpaar-Bindungen und damit die Zahl der zum Stromtransport zur Verfügung stehenden Elektronen etwa *exponentiell* zu.

Im Bändermodell wird dieser Vorgang so beschrieben: Ein Elektron wird unter Aufnahme einer Energie $W \geq W_G$ ($= 0,66 \text{ eV}$ bei Germanium; $1,1 \text{ eV}$ bei Silizium) aus dem Valenzband über den verbotenen Energiebereich W_G hinweg in das Leitungsband gehoben, in dem es sich dann frei bewegen kann. Die Zunahme der Anzahl dieser Übergänge mit der Temperatur kommt

dadurch zum Ausdruck, dass die Fermi-Verteilung bei Temperaturerhöhung verschliffener verläuft, sodass im Valenz- (Leitungs-) Band immer mehr Energiezustände unbesetzt (besetzt) sind (Bilder 10.23 und 10.24b).

Das Aufbrechen einer Elektronenbindung und die damit verbundene Freisetzung eines Elektrons hinterlässt in der Elektronengesamtheit des Kristallgitters eine Lücke. Dieser Mangel an negativer Ladung (d. h. ein Überschuss $+e$ an positiver Ladung) kann wegen des stochastischen Charakters der Elektronenfreisetzung dadurch beseitigt werden, dass ein benachbartes Atom ein Valenzelektron abgibt. Dadurch entsteht dann allerdings dort eine Lücke in der Elektronenhülle. Diese kann wiederum durch ein befreites Elektron eines anderen Atoms geschlossen werden usw. Es bewegen sich also nicht nur die jeweils aus den Bindungen befreiten Elektronen, sondern auch die zugehörigen Lücken, allerdings in der entgegengesetzten Richtung. Dieser Vorgang lässt sich so beschreiben, als ob sich ein positiver Ladungsträger mit der Ladung $+e$ regellos durch den Kristall hindurchbewegen würde. Ein solcher fiktiver Ladungsträger wird als *Loch* oder *Defektelektron* bezeichnet.

Bei Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes fließt also im Halbleiter nicht nur ein Elektronenstrom, sondern auch ein *Löcherstrom*. Diesen für einen Halbleiter typischen Leitungsmechanismus nennt man *Eigenleitung*. Er ist in Bild 10.25a schematisch für Germanium bzw. Silizium dargestellt. Die Darstellung desselben Vorgangs im Bändermodell zeigt Bild 10.25b: Die aus den Bindungen befreiten Valenz-Elektronen befinden sich im Leitungsband, während die von ihnen im Valenzband hinterlassenen Lücken durch die Defektelektronen besetzt sind. Mit den Methoden der Quantentheorie kann bewiesen werden, dass die Leitfähigkeit der lückenhaften Elektronengesamtheit im Valenzband tatsächlich gerade so groß ist, als ob die unbesetzten Energierterme mit Teilchen der Masse m_e und der Ladung $+e$ besetzt und Elektronen überhaupt nicht vorhanden wären.

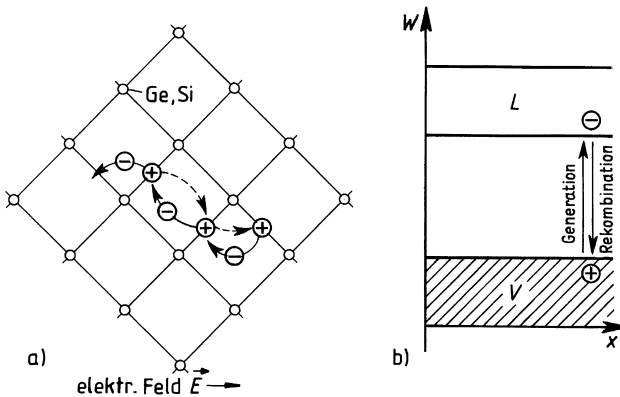


Bild 10.25: Eigenleitung im Halbleiter

- a) Schematische Darstellung im Kristallgitter für Germanium und Silizium (atomistisches Modell, statt des in Wirklichkeit dreidimensionalen Tetraedergitters (Bild 10.18a) ist der Einfachheit halber ein zweidimensionales dargestellt)
- b) Bändermodell L Leitungsband; V Valenzband; \ominus Elektron; \oplus Defektelektron

Die Hilfsvorstellung, das Defektelektron als positiven Ladungsträger zu betrachten, ermöglicht

es, viele Vorgänge im Halbleiter anschaulich zu erklären. Um die Anwendungsgrenzen dieser Vorstellung erkennen zu können, muss man jedoch beachten, dass der real vorhandene positive Ladungsträger das ionisierte Gitteratom ist, das abgesehen von den thermischen Schwingungen um die Gleichgewichtslage ortsgebunden ist. Was tatsächlich als Folge des Elektronenübergangs wandert, ist lediglich der positive Ionisationszustand. Das positiv geladene Defektelektron existiert dagegen als reales Teilchen nicht. Insbesondere können also durch Erhitzen eines Festkörpers keine Defektelektronen ins Freie emittiert werden, wohl aber Elektronen.

Die vorstehend beschriebene thermische Erzeugung freier Ladungsträger im Kristallgitter wird als *Generation* bezeichnet. Dabei entstehen Elektronen und Defektelektronen *paarweise*. Die Zahl G der Paarerzeugungsvorgänge pro Zeit und Volumen ist von der Konzentration der Ladungsträger unabhängig; mit der Temperatur nimmt sie exponentiell zu. Den umgekehrten Vorgang, d. h. die Rückkehr eines befreiten Elektrons in einen gebundenen Zustand (im Bild des Bändermodells die Wiedervereinigung eines Elektrons mit einem Loch) nennt man *Rekombination* (Bild 10.25b, vgl. die entsprechenden Bemerkungen bei den Gasen in Abschnitt 10.2.2). Die Zahl R der Rekombinationsvorgänge pro Zeit und Volumen ist proportional zur Konzentration der beiden Reaktionspartner (wie beim chemischen Massenwirkungsgesetz), d. h.

$$R = r n p \quad (10.55)$$

(n bzw. p = Konzentration der Elektronen bzw. Defektelektronen, vgl. Gl. (10.33)). Bei reinen Halbleitern ist aus Neutralitätsgründen natürlich $n = p$. Diese Konzentration der Ladungsträgerpaare wird *Inversions-* oder *intrinsic-Dichte* genannt und mit n_i bezeichnet. Im stromlosen Zustand gilt

$$G = R = r n_i^2. \quad (10.56)$$

Die intrinsic-Dichte nimmt in erster Näherung exponentiell mit der Temperatur T zu und mit dem Bandabstand W_G ab. Bei $T = 300$ K gilt für Germanium $n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ und für Silizium $n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Das bedeutet z. B. für Germanium, welches $4,4 \cdot 10^{22} \text{ Atome/cm}^3$ enthält, dass nur etwa jedes 10^9 -te Atom ein Elektron zur Stromleitung zur Verfügung stellt. Zum Vergleich: Bei den Metallen liefert im Mittel jedes Atom ein Leitungselektron.

Während also die Konzentration freier Ladungsträger in einem reinen Halbleiter um viele Zehnerpotenzen geringer ist als in Metallen, ist die Beweglichkeit der Elektronen b_n bzw. der Defektelektronen b_p um ein bis zwei Zehnerpotenzen größer, wie die Tabelle 10.6 für die Temperatur $T = 300$ K zeigt. Die daraus hervorgehende Tendenz $b_n > b_p$ gilt allgemein.

Tabelle 10.6: Elektronen- und Löcherbeweglichkeiten der wichtigsten Halbleiter

	Si	Ge	GaP	GaAs	InP	InAs	InSb
	cm^2/Vs						
b_n	1500	3900	200	8800	4600	33000	80000
b_p	450	1900	150	400	150	450	850

Mit wachsender Temperatur nehmen die Beweglichkeiten ab, denn die Ladungsträger kommen durch die zunehmenden Schwingungen der Gitterbausteine immer langsamer in Richtung eines äußeren elektrischen Feldes voran.

Die *Leitfähigkeit* eines intrinsic-Halbleiters beträgt

$$\kappa_i = e n_i (b_n + b_p) \quad (10.57)$$

(vgl. Gl. (10.36)); sie nimmt mit wachsender Temperatur monoton zu, da die exponentielle Temperaturabhängigkeit von n_i dominiert.

Beispiel 10.11: Intrinsic-Leitfähigkeit von Germanium und Silizium

Wie groß sind die intrinsic-Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand für Germanium und Silizium bei Raumtemperatur? In welchem Verhältnis stehen die Leitfähigkeiten zu derjenigen von Kupfer ($\rho = 1,7 \mu\Omega \text{ cm}$)?

Nach Gl. (10.57) und Tabelle 10.6 gilt für Germanium ($n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$)

$$\kappa_i = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \cdot 5800 \text{ cm}^2 (\text{Vs})^{-1} = 2,23 \cdot 10^{-2} (\Omega \text{ cm})^{-1}$$

bzw.

$$\rho_i = 1/\kappa_i = 44,9 \Omega \text{ cm}$$

und für Silizium ($n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$)

$$\kappa_i = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ As} \cdot 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \cdot 1950 \text{ cm}^2 (\text{Vs})^{-1} = 4,52 \cdot 10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$$

bzw.

$$\rho_i = 1/\kappa_i = 2,21 \cdot 10^5 \Omega \text{ cm}.$$

Der Vergleich mit Kupfer liefert

$$\kappa_{\text{Ge}}/\kappa_{\text{Cu}} = 3,8 \cdot 10^{-8}, \quad \kappa_{\text{Si}}/\kappa_{\text{Cu}} = 7,7 \cdot 10^{-12}$$

Die Leitfähigkeit eines Halbleiters lässt sich gegenüber dem intrinsic-Wert dadurch erheblich verändern, dass durch Zusetzen von Fremdstoffen weitere Ladungsträger für die Stromleitung zur Verfügung gestellt werden. Diese Störstellenleitung ist der Gegenstand des folgenden Abschnitts.

10.4.4.2 Störstellenleitung

Die praktische Bedeutung der Halbleiter für Bauelemente der Elektrotechnik beruht darauf, dass ihre elektrische Leitfähigkeit in gezielter Weise und um viele Zehnerpotenzen dadurch erhöht werden kann, dass der regelmäßige Kristallaufbau durch Fremdatome gestört wird, die anstelle von Wirtsatomen auf Gitterplätzen eingebaut werden. Diesen Einbau von Fremdatomen nennt man *Dotieren*. Er kann technologisch auf verschiedene Art durchgeführt werden:

- Die Fremdatome werden bereits der Halbleiterschmelze zugeführt, aus der später der dotierte Einkristall gewonnen wird (Dotierung in der Schmelze).

Von der Oberfläche des noch undotierten Einkristalls (Substrat) aus

- wächst aus einer mit Fremdatomen versetzten Gas- oder Flüssigkeitsphase ein dotierter Einkristall in der Orientierung des Substrats auf (*Gas-* bzw. *Flüssigphasen-Epitaxie*).

Die Arbeitstemperatur liegt im ersten Fall z. B. für Si bei 1000 ... 1250 °C, im zweiten Fall z. B. für GaAs bei 750 ... 850 °C. Bei Verwendung von Gasen aus metallorganischen Verbindungen können schon bei wesentlich niedrigeren Temperaturen Schichten mit ausgezeichneter Kristallqualität hergestellt werden (z. B. 400 ... 900 °C für GaAs).

- *diffundieren* Fremdatome in gasförmiger oder flüssiger Phase in das Substrat. Das Dotieren durch *thermische Diffusion* findet 300 ... 500 °C unterhalb des Schmelzpunktes statt.
- werden Moleküle des Halbleiters und des Dotierstoffs aus einem Molekularstrahl an das Substrat angelagert. Diese *Molekularstrahl-Epitaxie* wird z. B. bei Silizium bei ca. 500 °C durchgeführt.
- werden ionisierte Fremdatome mit kinetischen Energien im Bereich 10 ... 500 keV mittels eines Teilchenbeschleunigers in das Substrat eingeschossen. Diese *Ionenimplantation* erfolgt bei Raumtemperatur. Anschließend ist zur Ausheilung von Gitterfehlern eine Wärmebehandlung (*Temperung*) erforderlich.

Der Dotierungsgrad liegt je nach Material und Anwendungsfall etwa zwischen 10^{13} und 10^{20} Fremdatomen/cm³.

Die zur Dotierung geeigneten Elemente weisen einen Überschuss oder einen Mangel an Valenzelektronen verglichen mit den Atomen des Wirtsgitters auf, die sie substituieren.

Wenn z. B. in das Gitter des vierwertigen Germaniums oder Siliziums fünfwertige Fremdatome eingebaut sind (z. B. Arsen, Antimon, Phosphor), werden vier der fünf Valenzelektronen für die Elektronenpaar-Bindungen mit den vier nächsten Nachbarn im Tetraeder benötigt. Diese vier Elektronen kompensieren fünf positive Kernladungen des Fremdatoms, sodass netto ein einfach positiv geladener Kern übrigbleibt, um den das überschüssige fünfte Elektron kreist (Bild 10.26a). Diese Konfiguration entspricht einem Wasserstoffatom, allerdings in einem Medium mit der relativen Permittivität $\epsilon_r = 16$ (Germanium) bzw. 12 (Silizium). Daher beträgt die Bindungsenergie (= Ionisierungsenergie W_D) des überschüssigen Elektrons, die zu $1/\epsilon_r^2$ proportional ist, nur etwa 50 bzw. 90 meV. Demgegenüber ist zur Erzeugung der Eigenleitung eine Energiezufuhr der Größe W_G (= 0,66 eV bei Ge bzw. 1,1 eV bei Si) erforderlich. Durch Zufuhr einer solchen (kleinen) Energie kann das fünfte Elektron vom Fremdatom getrennt werden. Derartige elektronenliefernde Fremdatome werden als *Donatoren* und die von den freigesetzten Elektronen bewirkte Leitfähigkeit als *Störstellenleitung* bezeichnet. Sie überlagert sich der schon vom reinen Halbleiter her bekannten Eigenleitung. Die zur Ionisierung des Donatoratoms erforderliche Energie wird aus den thermischen Gitterschwingungen bezogen, sodass bei Raumtemperatur ($kT \approx 25$ meV) praktisch alle Donatoratome ihr überschüssiges Elektron abgeben haben. Sobald also die Dotierungskonzentration N_D wesentlich größer als die intrinsische Dichte ist, wird die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters fast nur noch durch den Störstellengehalt bestimmt.

Der vorstehend geschilderte Sachverhalt lässt sich im Bändermodell wie folgt beschreiben: Da das fünfte Elektron durch Zufuhr einer sehr kleinen Energiemenge W_D zum Leitungselektron wird, befindet es sich im gebundenen Zustand (im verbotenen Energiebereich) auf einem Energieniveau, das im Abstand W_D , also dicht unterhalb der Kante des Leitungsbandes liegt. Da dieses Energieniveau nur am Ort des Fremdatoms existiert – im Gegensatz zu den Energieniveaus im Valenz- und Leitungsband – wird es im Energiebändermodell durch einen *kurzen* Strich gekennzeichnet (Bild 10.26b).

Bild 10.26: Störstellenleitung im n-Halbleiter

a) atomistisches Bild

b) Bändermodell

L Leitungsband

V Valenzband

W_D Ionisierungsenergie des Donators

W_F Fermi-Niveau

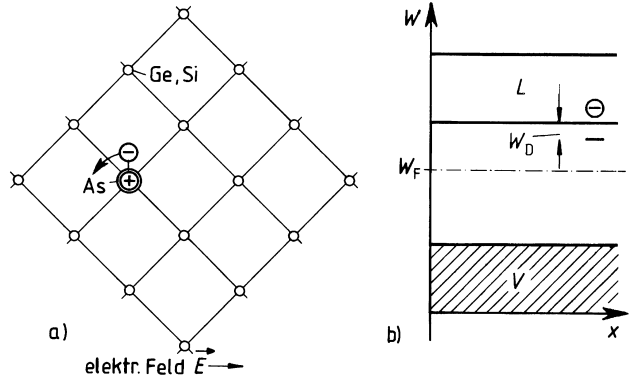
\ominus Elektron

\oplus Fremdatom, nach

Elektronenabgabe

positiv ionisiert

(Donator)



In diesem Zusammenhang sei an die im Abschnitt 10.4.2.2 beschriebene Analogie zwischen dem Energiebändermodell und einer Kette gekoppelter identischer elektrischer Schwingkreise erinnert: Wenn für ein einzelnes Kettenglied eine abweichende Resonanzfrequenz gewählt und die Kette an dieser Stelle durch eine harmonische Spannung bzw. einen harmonischen Strom erregt wird, so pflanzt sich diese Erregung in Form einer *gedämpften* Welle nach beiden Seiten auf der Kette fort. Im Abstand einiger Kettenglieder von der „Störstelle“ aus merkt man also praktisch von der Erregung und damit vom „falschen“ Kettenglied nichts mehr.

Da sich in dem mit Donatoren dotierten Halbleiter die Störstellenleitung der Eigenleitung überlagert, enthält das Leitungsband außer den aus Donatoren stammenden Elektronen auch solche *aus* dem Valenzband sowie *im* Valenzband die Löcher. Die Konzentrationen dieser beiden Ladungsträgerarten werden üblicherweise mit n_n bzw. p_n bezeichnet. Aus Gründen der Ladungsneutralität gilt

$$n_n = p_n + N_D^+, \quad (10.58)$$

wobei N_D^+ die Konzentration der ionisierten und daher positiv geladenen Donatoren ist. Bei Raumtemperatur ist N_D^+ praktisch gleich der Konzentration N_D der eingebrachten Donatoren. Die Gl. (10.56) gilt unverändert auch hier, d. h.

$$R = r n_n p_n = G = r n_i^2. \quad (10.59)$$

Für die elektrische Leitfähigkeit gilt in Verallgemeinerung der Gl. (10.57)

$$\kappa = e(p_n b_p + n_n b_n). \quad (10.60)$$

Nach Gl. (10.58) ist $n_n > p_n$, daher nennt man in einem mit Donatoren dotierten Halbleiter die Elektronen *Majoritätsträger* und die Defektelektronen *Minoritätsträger*. Sobald die Dotierungskonzentration N_D wesentlich größer als die intrinsic-Dichte n_i ist, gilt nach den Gln. (10.58) und (10.59) sogar $n_n \gg n_i$, $p_n \ll n_i$, sodass nach Gl. (10.60) die elektrische Leitfähigkeit numerisch praktisch nur von Elektronen bewirkt wird:

$$\kappa \approx e n_n b_n. \quad (10.61)$$

Man spricht daher von *n-Leitung* oder Elektronen- bzw. Überschussleitung und insgesamt von einem *n-Halbleiter*.

Beispiel 10.12: Störstellenleitung in einem Germanium-Kristall

Ein Germanium-Kristall enthalte $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ Donatoren. Wie groß ist seine Leitfähigkeit bei $T = 300 \text{ K}$ und welchen Anteil haben daran die Defektelektronen?

Aus den Gln. (10.58) und (10.59) erhält man mit der erlaubten Näherung $N_D^+ = N_D$

$$n_n = \sqrt{\left(\frac{N_D}{2}\right)^2 + n_i^2} + \frac{N_D}{2}, \quad p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \sqrt{\left(\frac{N_D}{2}\right)^2 + n_i^2} - \frac{N_D}{2},$$

d. h. mit der vorgegebenen Dotierung N_D und mit $n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$

$$n_n \approx N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}, \quad p_n \approx \frac{n_i^2}{N_D} = 5,76 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

Damit folgt aus Gl. (10.60) mit den Beweglichkeiten nach Tabelle 10.6

$$\kappa = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} (5,76 \cdot 10^{10} \cdot 1900 + 10^{16} \cdot 3900) \text{ cm}^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} = 6,2 \frac{1}{\Omega \text{ cm}}.$$

Der Defektelektronenanteil beträgt $\frac{5,76 \cdot 10^{10} \cdot 1900}{10^{16} \cdot 3900} = 2,8 \cdot 10^{-6}$, er ist also vernachlässigbar klein.

Eine Störstellenleitfähigkeit liegt auch vor, wenn in ein Germanium- oder Siliziumgitter Fremdatome mit nur drei Valenzelektronen eingebaut werden (z. B. Gallium, Indium, Aluminium, Bor). Ein derartiges Fremdatom kann nur drei der vier Elektronenpaar-Bindungen zu den nächsten Nachbarn realisieren; in der vierten Bindung fehlt ein Elektron. Diese Lücke kann unter Aufnahme einer geringen Ionisierungsenergie aus den Gitterschwingungen durch ein Valenzelektron aus einer Nachbarbindung aufgefüllt werden, wodurch das dreiwertige Fremdatom vier Valenzelektronen hat, also eine überschüssige negative Ladung aufweist. Da das Fremdatom ein Elektron aufnehmen kann, nennt man es *Akzeptor*. Bei diesem Vorgang ist bei dem das Elektron abgebenden Wirtsatom eine Lücke entstanden usw. Diese Lücke wandert also entgegen der Elektronen-Richtung wie bei der Eigenleitung beschrieben (Bild 10.27a).

Die Beschreibung des Akzeptors im Bändermodell ist dual zu der des Donators. Dass der Akzeptor unter geringer Energiezufuhr ein Elektron aus dem Valenzband aufnehmen kann, ist gleichbedeutend damit, dass er leicht ein Loch an das Valenzband abgibt. Daher liegt der gebundene Zustand des Loches dicht über der Valenzbandkante im verbotenen Energiebereich. Er wird dort durch einen *kurzen Strich* gekennzeichnet, da dieser Energiezustand nur in unmittelbarer Umgebung des Fremdatoms existiert (Bild 10.27b).

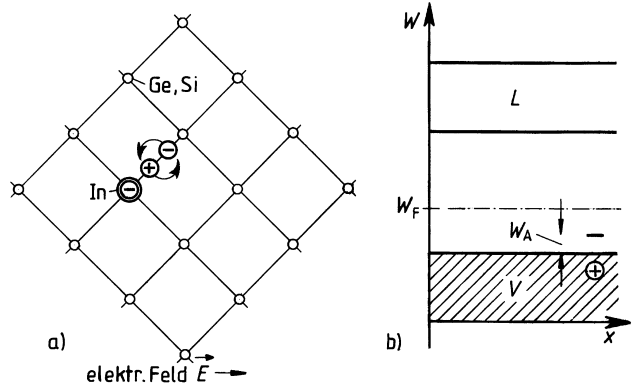
Die Konzentrationen n und p werden hier üblicherweise mit dem Index p versehen. Daher lautet die Neutralitätsbedingung in Analogie zur Gl. (10.58)

$$p_p = n_p + N_A^-. \quad (10.62)$$

Hierin bezeichnet N_A^- die Konzentration der ionisierten, also negativ geladenen Akzeptoren. Bei Raumtemperatur sind praktisch alle Akzeptoren ionisiert, d. h. $N_A^- = N_A$. Die Gl. (10.59) gilt sinngemäß unverändert, d. h.

$$R = r n_p p_p = G = r n_i^2. \quad (10.63)$$

Bild 10.27: Störstellenleitung im p-Halbleiter
 a) atomistisches Bild
 b) Bändermodell
 L Leitungsband
 V Valenzband
 W_A Ionisierungsenergie des Akzeptors
 W_F Fermi-Niveau
 \ominus Elektron
 \oplus Defektelektron
 (\ominus) Fremdatom, nach Elektronenaufnahme negativ ionisiert (Akzeptor)



Für die elektrische Leitfähigkeit gilt in Verallgemeinerung der Gl. (10.57)

$$\kappa = e(p_p b_p + n_p b_n). \quad (10.64)$$

Sobald die Akzeptorkonzentration N_A wesentlich größer als die intrinsic-Dichte ist, gilt $p_p \gg n_p$, sodass die Defektelektronen das Leitfähigkeitsverhalten beherrschen. Dann gilt in Analogie zu Gl. (10.61)

$$\kappa \approx e p_p b_p. \quad (10.65)$$

Man spricht daher von *p-Leitung* oder *Defektelektronen-* bzw. *Mangelleitung* und insgesamt von einem *p-Halbleiter*.

Die in der Praxis verwendeten Halbleiter enthalten fast immer sowohl Donatoren als auch Akzeptoren. In Verallgemeinerung der Gln. (10.58) und (10.62) gilt dann $n + N_A^- = p + N_D^+$. Nach außen hin ist nur die Differenz wirksam, d. h. der Leitfähigkeitscharakter des Halbleiters (n- oder p-Leitung) ist durch den Überschuss der Dotierungsatome der einen Art über die der anderen Art gegeben.

Das Fermi-Niveau W_F , das die Besetzungswahrscheinlichkeit 50 % eines Energieniveaus angibt, liegt bei dotierten Halbleitern nicht mehr wie bei dem in Bild 10.24b dargestellten Bändermodell des reinen Halbleiters nahe der Mitte des verbotenen Bandes, sondern verschiebt sich in Richtung des Donatoren- bzw. Akzeptorenniveaus, also jeweils zum Rand der verbotenen Zone: Bei n-Leitung (Bild 10.26) liegt es in der Nähe der Unterkante des Leitungsbandes, bei p-Leitung (Bild 10.27) in der Nähe der Oberkante des Valenzbandes. Es kann bei entsprechend hoher Dotierungskonzentration sogar in ein Band eintauchen (*Entartung*), wie z. B. bei der Tunnelodiode (Abschnitt 10.5.2.7) und bei der Laserdiode (Abschnitt 10.5.6.2).

10.4.4.3 Feld- und Diffusionsstrom

Unter dem *Feldstrom* versteht man den von Elektronen und Defektelektronen getragenen Strom I_F , der als Folge eines im Halbleiter bestehenden elektrischen Feldes \vec{E} fließt. Dieses Feld ist entweder die Folge einer an den Halbleiterkristall angelegten äußeren Spannung oder es tritt innerhalb des Kristalls in Bereichen auf, in denen keine Ladungsneutralität herrscht (Abschnitt 10.5.1). Es gilt

$$I_F = \kappa A E. \quad (10.66)$$

Hierin ist A der Querschnitt des Stromweges und

$$\kappa = e(n b_n + p b_p)$$

seine Leitfähigkeit gemäß den Gln. (10.60) bzw. (10.64). Für den Feldstrom gilt also das *Ohm'sche Gesetz*, sofern κ von E unabhängig, das Material also linear ist.

Ein *Diffusionsstrom* entsteht, wenn in einem Halbleiter räumliche Konzentrationsunterschiede der Elektronen und Defektelektronen bestehen und diese versuchen, sich durch Diffusion auszugleichen und eine Gleichverteilung herzustellen. (Eine Analogie hierzu ist eine Parfümflasche: Die hohe Duftkonzentration in ihrem Inneren verteilt sich nach Öffnen der Flasche im Laufe der Zeit über den ganzen zur Verfügung stehenden Raum und nimmt dabei natürlich ab.) Das vom Konzentrationsgefälle, der Beweglichkeit der Ladungsträger und von der absoluten Temperatur abhängige Diffundieren der Ladungsträger entspricht einem elektrischen Strom I_D , den man Diffusionsstrom nennt; er fließt also auch bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes \vec{E} . Ist ein solches Feld vorhanden, so fließt im Halbleiter der Gesamtstrom

$$I = I_F + I_D. \quad (10.67)$$

10.4.4.4 Stromleitung bei Lichteinstrahlung, Photowiderstand

Halbleiter ändern ihr elektrisches Verhalten bei Lichteinstrahlung. Ursache hierfür sind Generations- bzw. Rekombinationsprozesse von Ladungsträgern im Halbleiterinnern infolge der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer Strahlung und Kristall-Elektronen bzw. Defektelektronen: Bei Einfall von Licht geeigneter Wellenlänge in einen Halbleiter können Elektronen aus ihren Bindungen befreit werden und sich als (quasi)freie Ladungsträger durch den Kristall bewegen und dessen elektrisches Verhalten verändern. Da die Ladungsträger den Halbleiter nicht verlassen, spricht man hier vom *inneren Photoeffekt* (Abschnitt 10.5.6.1). Diesem liegt die Vorstellung zugrunde, dass elektromagnetische Strahlung der Frequenz $f = c/\Lambda$ (c = Lichtgeschwindigkeit, Λ = Wellenlänge) aus *Lichtquanten* (*Photonen*) der Energie hf besteht (h = Plancksches Wirkungsquantum $\approx 6,62 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$).

Damit ein Elektron durch Absorption eines Photons aus seinem Bindungszustand gelöst werden kann, muss in einem Eigenhalbleiter die Photonenenergie hf mindestens so groß wie der Bandabstand W_G sein, d. h. $hf = h \frac{c}{\Lambda} \geq W_G$ bzw. $\Lambda \leq \Lambda_G = hc/W_G$. Λ_G heißt *Grenzwellenlänge*. Bei diesem Vorgang entstehen offenbar immer Elektron-Loch-Paare.

Diese durch Lichteinfall bewirkte Leitfähigkeitsänderung in einem undotierten Halbleiter wird technisch im *Photowiderstand* genutzt. Das ist ein polykristalliner Halbleiterfilm auf einem isolierten Träger mit zwei ohmschen Kontakten. Für den sichtbaren Spektralbereich 0,4 ... 0,8 μm

eignet sich z. B. CdS ($W_G = 1,9 \text{ eV}$, $\Lambda_G = 0,65 \mu\text{m}$), während für Infrarotdetektion z. B. PbS ($W_G = 0,37 \text{ eV}$, $\Lambda_G = 3,35 \mu\text{m}$) verwendet wird. Der Widerstand R eines Photowiderstandes nimmt mit wachsender Lichtleistung P ab gemäß $R \sim P^{-\gamma}$ mit $\gamma = 0,5 \dots 1,2$. Bei dotierten Halbleitern beträgt die Grenzwellenlänge hc/W_i , wobei W_i der energetische Abstand des Donators bzw. Akzeptors von der benachbarten Bandkante ist. Sie werden im Infraroten betrieben und müssen zur Vermeidung thermischer Ionisation gekühlt werden.

Photowiderstände werden im sichtbaren Spektralbereich in vielen Signal-, Kontroll- und Steuerungsschaltungen eingesetzt, z. B. zur Helligkeitssteuerung von Lampen (Dämmerungsschalter). Im infraroten Spektralbereich spielen sie eine wichtige Rolle, z. B. in der Nachtfotografie und im wissenschaftlichen Gerätebau (IR-Spektroskopie, Wetterbeobachtung mit Satelliten, optische Pyrometer).

10.4.4.5 Stromleitung bei Magnetfeldeinwirkung, Feldplatte

Halbleiter ändern ihr elektrisches Verhalten auch unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes. Dieser Effekt wird genutzt zur Messung, Steuerung und Regelung magnetischer Felder, z. B. als Sensor zur Positionserfassung von magnetischen Materialien und als kontaktlose Potenziometer. Praktische Bedeutung haben der *Hall-Sensor* (Beispiel 4.1) und die *Feldplatte* erlangt.

Das in Bild 4.6 dargestellte dünne Halbleiterplättchen zeigt unter dem Einfluss des Magnetfeldes mit der zur Plättchenfläche orthogonalen magnetischen Flussdichte(-komponente) B neben dem Auftreten der Hall-Spannung U_H eine Erhöhung des Widerstandes R im Steuerkreis, stellt also einen *magnetfeldabhängigen Widerstand* dar. Da sich, wie Bild 10.28 zeigt, der Weg der Ladungsträger durch das widerstandsbehaftete Material um den Wert $1/\cos \Theta_H$ ($\Theta_H = \text{Hall-Winkel}$) vergrößert und der für den Stromfluss verfügbare Querschnitt um den Faktor $\cos \Theta_H$ kleiner wird, gilt

$$R(B) = R_0 \cos^2 \Theta_H = R_0(1 + \tan^2 \Theta_H) \quad \text{mit} \quad R_0 = R(B = 0).$$

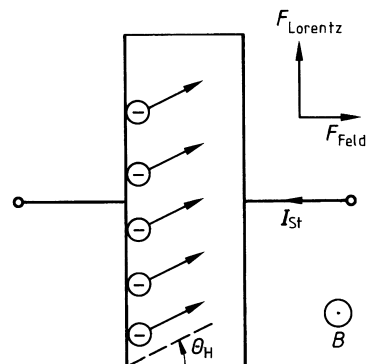


Bild 10.28: Zur Widerstandsänderung durch Ablenkung von Ladungsträgern im Magnetfeld (n-Halbleiter) (aus [Mün93])

Der Hall-Winkel Θ_H ergibt sich nach Bild 10.28 mit Gl. (10.50) aus

$$\tan \Theta_H = \frac{F_{\text{Lorentz}}}{F_{\text{Feld}}} = \frac{e v B}{e E} = \frac{e b E B}{e E} = b B,$$

d. h.

$$R(B) = R_0(1 + b^2 B^2). \quad (10.68)$$

Die Widerstandsänderung ist also unabhängig von der Orientierung der zum Plättchen orthogonalen Komponente des Magnetfeldes. Von der Beziehung (10.68) wird bei den *Feldplatten* Gebrauch gemacht.

10.4.5 Elektrische Leitung in Isolatoren

Einkristalline Isolatoren unterscheiden sich von den Halbleitern nur dadurch, dass ein sehr viel größerer Energieaufwand W_G erforderlich ist, um Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband zu heben. Das Bändermodell eines Isolators stimmt daher mit dem in Bild 10.24b angegebenen Bändermodell eines Halbleiters qualitativ überein, jedoch ist die Breite des verbotenen Bandes angewachsen auf $W_G > 3\text{eV}$ (bei Diamant ist $W_G \approx 5,4\text{eV}$, bei Saphir $W_G = 8,7\text{eV}$). Diese Energiebarriere ist so groß, dass sie selbst bei Raumtemperatur nur von einer sehr viel kleineren Anzahl von Elektronen überwunden werden kann als bei Halbleitern. Das Leitungsband eines Isolators ist daher auch bei Raumtemperatur noch nahezu leer und die Leitfähigkeit entsprechend gering. Eine willkürliche Grenze für die Kennzeichnung als (praktischer) Isolator ist 10^{-10} S/cm . Eine nennenswerte elektronische Leitfähigkeit würde sich theoretisch erst bei Temperaturen von 2500 ... 5000 K ergeben, also im Bereich der Schmelztemperatur, wodurch das Kristallgefüge aber zerstört würde.

Bei manchen Isolatoren kann durch Dotierung eine nennenswerte Erhöhung der Leitfähigkeit erzielt werden; sie werden dann den Halbleitern zugerechnet (z. B. Bor-dotierter Diamant).

Für eine detaillierte Diskussion des Leitfähigkeits- (und Durchschlags-) Verhaltens realer Isolatoren wird auf weiterführende Literatur verwiesen, z. B. [Mün93]. Einkristalline Isolatoren werden, ähnlich wie Metall-Einkristalle, nur in Ausnahmefällen in der Elektrotechnik verwendet, z. B. der Saphir (einkristallines Al_2O_3) als Substrat für Streifenleitungsschaltungen in der Höchstfrequenztechnik und für höchstintegrierte ICs, die aus Silizium auf einem Saphirsubstrat bestehen (Silicon On Sapphire, SOS).

Nicht einkristalline Isolatoren bilden die Mehrzahl der technisch verwendeten Isolierstoffe. Dazu gehören amorphe Substanzen (z. B. Glas, Bernstein), polykristalline Materialien (z. B. Keramiken, Porzellan) sowie organische Werkstoffe (z. B. Plastomere, Duromere, Elastomere, Papier) [Hil08], [Sch91].

10.5 Elektrische Leitung in geschichteten kristallinen Festkörpern

Nachdem in Abschnitt 10.4 der elektrische Leitungsmechanismus in homogenen Halbleitern und Metallen beschrieben worden ist, wird in diesem Abschnitt eine Übersicht darüber gegeben, in welcher vielfältiger Weise die elektrischen Eigenschaften von Grenzflächen zwischen Halbleitern bzw. zwischen einem Halbleiter und einem Metall für Bauelemente der elektrischen Nachrichten- und Energietechnik genutzt werden können. Dabei wird hauptsächlich auf Einzelbauelemente eingegangen. Diese bilden auch die Grundelemente der integrierten Schaltungen.

Aus der Vielzahl der Halbleiterbauelemente ist im Folgenden unter dem Gesichtspunkt der praktischen Bedeutung eine Auswahl getroffen worden, welche die Breite der Anwendungsmöglichkeiten belegt. Neben der Beschreibung des Aufbaus dieser Bauelemente und der qualitativen Erläuterung ihrer Wirkungsweise werden auch Hinweise auf Anwendungen gegeben.

Wegen ausführlicher Darstellungen der Technologie und der Eigenschaften von Einzelbauelementen bzw. integrierten Schaltungen und deren Anwendungen wird auf weiterführende Literatur verwiesen, z. B. [Hil08], [LBL08], [Mös92], [Mün93], [Sch90], [SS07], [Süß05], [WMF96].

10.5.1 Der pn-Übergang

Wenn im Innern eines einkristallinen Halbleiters ein mit Akzeptoren dotierter Bereich (p-Gebiet) an einen mit Donatoren dotierten Bereich (n-Gebiet) angrenzt, entsteht in der Umgebung der Grenzfläche des Dotierungswechsels eine charakteristische Übergangszone. Diese wird als *pn-Übergang* bezeichnet. Derartige pn-Übergänge sind in der Mehrzahl der Halbleiterbauelemente enthalten und bestimmen ihr elektrisches Verhalten entscheidend. Daher wird der folgenden Bauelementeübersicht eine ausführliche Beschreibung der elektrischen Eigenschaften eines pn-Übergangs vorangestellt.

Das Bild 10.29a zeigt einen solchen pn-Übergang. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die Dotierung mit Donatoren bzw. Akzeptoren jeweils ortsunabhängig sei (*abrupter pn-Übergang*). Die äußeren Endflächen des p- und n-Gebiets sind mit metallischen Belägen versehen (*Ohmsche Kontakte*; zu diesem Begriff s. Abschnitt 10.5.2.1), über die das als *Halbleiterdiode* bezeichnete Bauelement (meist mittels Drähten oder lötfähigen Kontaktflächen) mit anderen Bauelementen verbunden werden kann.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass zwischen den äußeren Kontakten keine Spannung liegt, sodass durch die Diode kein Strom fließt (*thermodynamisches Gleichgewicht*). Nach Bild 10.29a grenzt in der Ebene des Dotierungswechsels ein Halbleitergebiet mit hoher Elektronen- bzw. niedriger Defektelektronen-Konzentration (n_n bzw. p_n) an ein Gebiet mit niedriger Elektronen- bzw. hoher Defektelektronenkonzentration (n_p bzw. p_p). Ein solcher abrupter Konzentrationsprung stellt natürlich keinen Gleichgewichtszustand dar. Vielmehr werden beide Ladungsträgerarten versuchen, ihre großen Konzentrationsunterschiede zwischen p- und n-Gebiet in einer Übergangszone auszugleichen, indem Elektronen aus dem n- in das p-Gebiet diffundieren und Defektelektronen in der Gegenrichtung (Bild 10.29b). Durch diesen Konzentrationsausgleich der Elektronen und Defektelektronen entsteht in der Umgebung des Dotierungswechsels eine an beweglichen Ladungsträgern arme, also hochohmige Zone mit der Dicke d_0 , die als *Sperrschicht* bezeichnet wird.

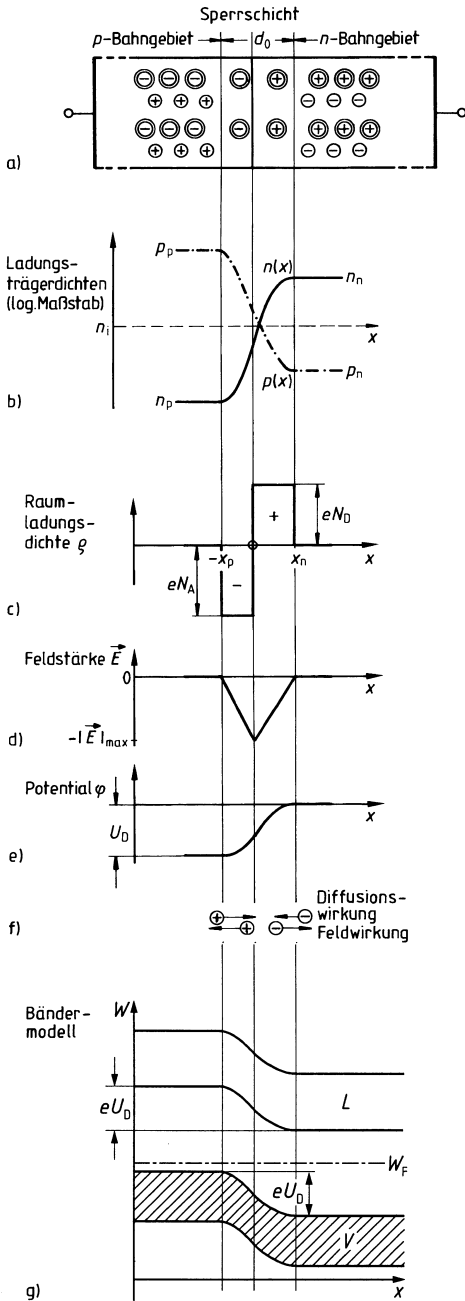


Bild 10.29: pn-Übergang im stromlosen Zustand (Legende für Teilbilder a) bis g) im Text)

L Leitungsband

V Valenzband

\ominus Elektron

\oplus Defektelektron

\ominus ionisierter Akzeptor

\oplus ionisierter Donator

W_F Fermi-Niveau

Im stromlosen Zustand ist die Sperrschicht typisch einige Zehntel μm dick. Wegen der entgegengesetzten Polarität beider Ladungsträgerarten addieren sich ihre Diffusionsströme. Das ist kein Widerspruch zu der vorausgesetzten Stromlosigkeit des pn-Übergangs, denn die beiden Diffusionsströme werden durch je einen Feldstrom von Elektronen bzw. Defektelektronen kompensiert. Diese Feldströme haben folgende Ursache: Durch das Abwandern der frei beweglichen Elektronen aus dem n-Gebiet in das p-Gebiet entsteht im n-Gebiet nahe der Grenzfläche ein Überschuss an positiver Ladung durch die ortsfesten ionisierten Donatorrümpfe. Entsprechend entsteht im p-Gebiet infolge der abgewanderten Defektelektronen ein Überschuss an negativer Ladung durch die ortsfesten ionisierten Akzeptorrümpfe (Bild 10.29c). Die in dieser Raumladungszone vorhandenen Netto-Ladungen sind entgegengesetzt gleich groß (wie bei einem Plattenkondensator), da der Halbleiterkristall insgesamt elektrisch neutral ist. Im Fall des abrupten pn-Übergangs gilt daher

$$x_n N_D = x_p N_A, \quad (10.69)$$

d. h. die Ausdehnung der Raumladungszone ist umso kleiner, je höher die Dotierung ist. Dieses Ergebnis spielt bei vielen Halbleiterbauelementen eine wichtige Rolle (Abschnitt 10.5.3). Mit der dargestellten Raumladungsverteilung ist eine elektrische Feldstärke \vec{E} verknüpft (Bild 10.29d) sowie die in Bild 10.29e skizzierte, auf den n-Halbleiter bezogene Verteilung des elektrischen Potentials φ . Das elektrische Feld ist hier stark inhomogen im Gegensatz zu dem näherungsweise homogenen Feld im Plattenkondensator. Dieser Unterschied rührt daher, dass die beiden entgegengesetzt gleich großen Ladungen dort über je eine *Fläche* verteilt sind, hier aber über den *Raum* zwischen den Grenzen der Raumladungszone.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist so gerichtet, dass auf die beweglichen Ladungsträger eine der Diffusionswirkung entgegengerichtete Kraft ausgeübt wird (Bild 10.29f). Bei dem hier vorausgesetzten Fehlen einer äußeren Spannung kompensieren sich für jede der beiden Ladungsträgerarten der Diffusions- und Feldstrom exakt. Diese Kompensation findet natürlich im mikrokosmischen Bereich statt; es fließen also nicht etwa vier makroskopische elektrische Ströme gegeneinander, die paarweise gleich sind.

Nach Bild 10.29e ist über dem pn-Übergang eine Spannung U_D wirksam, die *Diffusionsspannung*. Dadurch wird das p-Gebiet negativ gegenüber dem n-Gebiet vorgespannt. Die Größe von U_D hängt vom Dotierungsgrad, dem Halbleitermaterial und von der Temperatur ab. Sie liegt bei $T = 300\text{ K}$ für Germanium (Silizium) typisch bei ca. $0,3\text{ V}$ ($0,7\text{ V}$). Die innere maximale elektrische Feldstärke $|\vec{E}_{\text{max}}|$ liegt typisch zwischen einigen kV/cm und einigen 10 kV/cm .

Das Auftreten der Diffusionsspannung ist kein Widerspruch zu der vorausgesetzten Spannungslosigkeit des pn-Übergangs, denn an den Übergängen zwischen dem p- bzw. n-Gebiet und den metallischen Kontakten entstehen ebenfalls Diffusionsspannungen und die Summe der drei Spannungen ist null.

Das Energiebändermodell des pn-Übergangs ist in Bild 10.29g dargestellt. Der Diffusionsspannung entsprechend werden die Bänder auf der p-Seite um den Energiebetrag $e U_D$ gehoben. Das Fermi-Niveau liegt näher an der Oberkante des p-Valenzbandes als an der Unterkante des n-Leitungsbandes, da das p-Gebiet (willkürlich) als stärker dotiert vorausgesetzt worden ist (Bild 10.29b).

Der bisher beschriebene Gleichgewichtszustand wird gestört, wenn von außen an die beiden metallischen Kontakte in Bild 10.29a eine Gleichspannungsquelle U geschaltet wird. Der dann

fließende Strom I hat für positive bzw. negative Werte von U nicht nur entgegengesetztes Vorzeichen, sondern einen ausgeprägt unterschiedlichen Betrag, wie die folgende Überlegung zeigt. Die Halbleiterdiode stellt also ein elektrisches Ventil dar, ähnlich wie die Elektronenröhren-Diode (Bild 10.5a).

Spannung in Sperrrichtung

Wenn die Spannungsquelle gemäß Bild 10.30a angeschlossen wird, d. h. bei vom p- zum n-Gebiet weisenden Spannungszählpfeil $U < 0$ gilt, so wird das Potenzial des p-Gebiets gegenüber dem des n-Gebiets gesenkt (Bild 10.30b). Dadurch wird die Potenzialdifferenz über dem pn-Übergang vom Wert U_D im Gleichgewichtszustand auf den Wert $U_D + |U|$ vergrößert und damit auch die interne elektrische Feldstärke. Das Gleichgewicht zwischen Diffusions- und Feldstrom ist zugunsten des letzteren gestört. Durch die Polarität der angelegten Spannung werden die Majoritätsträger zu den ohmschen Kontakten hingezogen. Dadurch nimmt die Dicke d der an beweglichen Ladungsträgern armen Raumladungszone und damit ihr Widerstand zu. Folglich wächst der Strom langsamer als proportional mit der Spannung. Daher spricht man bei dieser Polung der angeschlossenen Spannungsquelle von der *Sperrrichtung*. Der Strom erreicht schließlich einen von der Spannung unabhängigen Grenzwert, den *Sperrstrom* $-I_S$. Dieser ist proportional zu n_i^2 und wächst daher exponentiell mit der Temperatur an. Bei Raumtemperaturen liegen die Werte von I_S für Germanium typisch im μA -Bereich, für Silizium wegen des größeren Bandabstandes um ein bis zwei Zehnerpotenzen darunter. Dementsprechend ist die zulässige Sperrschichttemperatur bei Germanium niedriger (150°C) als bei Silizium (200°C), sodass letzteres auch für Halbleiterbauelemente der Leistungselektronik verwendet wird.

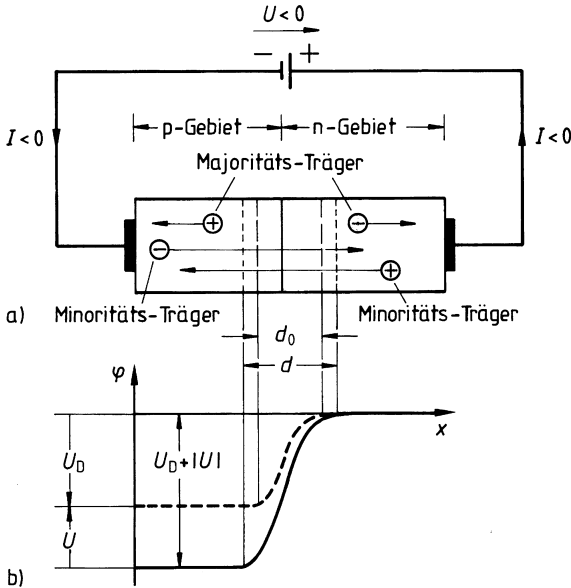


Bild 10.30: pn-Übergang, in Sperrrichtung betrieben
 a) Verbreiterung der Sperrschicht von d_0 (Gleichgewichtszustand ohne angelegte Spannung) auf d .
 \ominus Elektron
 \oplus Defektelektron
 b) Potenzialverteilung $\varphi(x)$
 ... ohne angelegte Spannung
 – in Sperrrichtung angelegte Spannung ($U < 0$)

Die oben beschriebene Dickenänderung der Raumladungszone hat ihr Analogon in einem Kondensator, dessen Plattenabstand mit wachsendem $|U|$ zu- und dessen Kapazität dementsprechend abnimmt. Der pn-Übergang stellt also eine *elektronisch steuerbare Kapazität* dar, die

Sperrschicht-Kapazität

$$C_s = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{x_n + x_p} = C_s(U) \quad (10.70)$$

(vgl. Gl. (3.90)). Diese Eigenschaft spielt in vielen Halbleiterbauelementen eine wichtige Rolle (Abschnitt 10.5.2.5 und [Mös92]).

Spannung in Durchlassrichtung

Der Gleichgewichtszustand des pn-Übergangs soll jetzt dadurch geändert werden, dass der p-Halbleiter mit dem positiven Pol, der n-Halbleiter mit dem negativen Pol der Spannungsquelle verbunden wird, d. h. $U > 0$ gilt (Bild 10.31a).

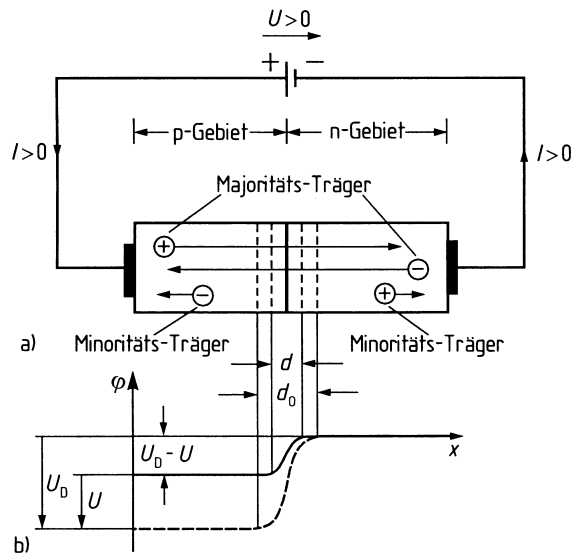


Bild 10.31: pn-Übergang, in Durchlassrichtung betrieben
 a) Verkleinerung der Sperrschicht von d_0 auf d ,
 b) Potenzialverteilung $\varphi(x)$
 ... ohne angelegte Spannung
 – in Durchlassrichtung angelegte Spannung ($U > 0$)

Dadurch verringert sich die Potentialstufe über dem pn-Übergang von U_D auf $U_D - U$ (Bild 10.31b) und entsprechend auch die interne elektrische Feldstärke. Das Gleichgewicht zwischen Diffusions- und Feldstrom in der Raumladungszone ist also jetzt zugunsten des ersteren gestört. Entsprechend der Polarität der angelegten Spannung U werden Majoritätsträger aus den Bahngebieten in Richtung auf die Raumladungszone getrieben und verringern dadurch die Dicke d der Sperrschicht gegenüber dem Gleichgewichtswert d_0 . Damit nimmt auch der Widerstand dieser Zone ab, sodass der Strom I mit wachsender Spannung U stärker als proportional und (theoretisch) unbegrenzt zunimmt. Diese Betriebsart wird daher als die *Durchlassrichtung* des pn-Übergangs bezeichnet.

Die in die Raumladungszone eingedrungenen Majoritätsträger können durch Diffusion auf die andere Halbleiterseite gelangen, wo sie Minoritätsträger sind, und erhöhen dort die Konzentration (n_p bzw. p_n) der schon vorhandenen Minoritätsträger – und zwar um je eine Dekade gegenüber n_p bzw. p_n , wenn die Spannung U um je ca. 60 mV erhöht wird. Dieser Vorgang wird als *Injektion von Minoritätsträgern* bezeichnet. Die Injektionswirkung ist umso größer, je höher die

Dotierung des die Majoritätsträger liefernden Bereiches ist. Technisch genutzt wird die Injektion z. B. zur Erzielung der guten Durchlasseigenschaften von Halbleiter-Starkstromgleichrichtern sowie zur Steuerung von pn-Übergängen in Bipolartransistoren (Abschnitt 10.5.3.2).

Die Injektion hat einen Diffusionsstrom von Minoritätsträgern in die Bahngebiete hinein zur Folge, der durch Rekombination mit den Majoritätsträgern räumlich exponentiell auf den Wert null abnimmt. Der statistische Mittelwert der Wegstrecke bis zur Rekombination, die *Diffusionslänge*, liegt je nach Material, Dotierung und Kristallperfektion im Bereich von einigen μm bis zu einigen $100 \mu\text{m}$. Schließlich wird der Strom als Majoritätsträger-Feldstrom zu den Kontakten weitergeführt.

Die mathematische Formulierung der vorstehenden Überlegungen hat W. Shockley auf die folgende Charakteristik $I(U)$ der Halbleiterdiode bei Verbraucher-Zählpfeilsystem geführt

$$I = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right). \quad (10.71)$$

Hierin ist $U_T = kT/e$ die *Temperaturspannung* mit der *Boltzmann-Konstanten*

$$k = 1,380\,6488 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K.}$$

Für 27°C (300 K) folgt somit $U_T = 25,9 \text{ mV}$.

Die Gl. (10.71) lässt die praktisch unipolare Leitfähigkeit des pn-Übergangs erkennen: Für negative Spannungen $U < 0$ nähert sich der Wert des Stroms I bereits für wenige Vielfache der Temperaturspannung dem konstanten kleinen Wert $-I_S$, für positive Spannungen dagegen nimmt I exponentiell zu. Bild 10.32 zeigt die Kennlinie eines pn-Übergangs gemäß Gl. (10.71).

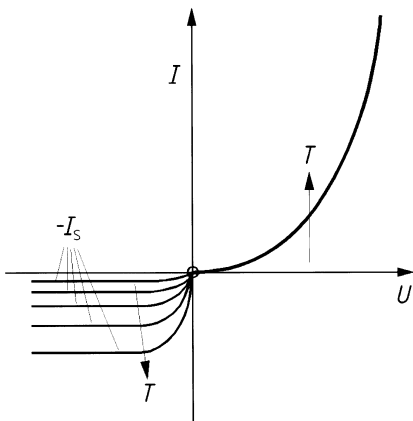


Bild 10.32: Idealisierte Kennlinie $I(U)$ eines pn-Übergangs (mit verschiedenen Strommaßstäben in Sperr- und Durchlassrichtung)

Da sich die Ströme in Sperr- und Durchlassrichtung um mehrere Größenordnungen unterscheiden, ist es bei der Darstellung üblich, verschiedene Strommaßstäbe vorzusehen. Dadurch entsteht im Nullpunkt ein Knick, der bei gleichen Maßstäben natürlich nicht vorhanden ist.

Am durch Gl. (10.71) beschriebenen Modell sind für große Durchlass- und Sperrspannungen Korrekturen anzubringen. Diese sowie die daraus folgenden technischen Anwendungen werden in Abschnitt 10.5.2.1 beschrieben.

Der pn-Übergang wirkt im Durchlassbetrieb als Ladungsspeicher, denn die in das Gebiet entgegengesetzter Dotierung injizierten Ladungsträger (Defektelektronen im n-Gebiet bzw. Elektronen im p-Gebiet) sind dort bis zu ihrer Rekombination mit Majoritätsträgern (Elektronen bzw. Defektelektronen) gespeichert. Ihre *Lebensdauer* τ beträgt im statistischen Mittel je nach Material, Dotierung und Kristallperfektion 10^{-3} s ... 10^{-6} s (und darunter). Wegen dieses Speichereffekts wirkt der pn-Übergang im Flussgebiet wie eine Kapazität, die sogenannte *Diffusionskapazität*. Sie addiert sich zu der bereits erläuterten Sperrschichtkapazität.

Beispiel 10.13: Sperrschichtkapazität eines pn-Übergangs

Für einen pn-Übergang in Germanium mit $N_A = 4,2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $N_D = 9,9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $x_p = 0,053 \text{ } \mu\text{m}$, $A = 10^{-4} \text{ cm}^2$ folgt aus Gl. (10.69) die Ausdehnung der Raumladungszone im n-Gebiet

$$x_n = \frac{N_A}{N_D} x_p = 0,225 \text{ } \mu\text{m}$$

und nach Gl. (10.70) die Sperrschichtkapazität mit $\epsilon_r = 16,2$ und ϵ_0 gemäß Gl. (3.87) $C_s = 5,16 \text{ pF}$.

Mit einer parallel geschalteten Festkapazität $C = 25 \text{ pF}$ und einer Induktivität $L = 20 \text{ nH}$ entsteht bei Vernachlässigung aller Widerstände ein Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz nach Gl. (7.13)

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_s + C)}} = 204,9 \text{ MHz.}$$

10.5.2 Halbleiterdioden

Halbleiterdioden haben zwei metallische Anschlüsse, zwischen denen Halbleiterzonen verschiedenen Dotierungscharakters liegen. Das einfachste Beispiel ist bereits in Abschnitt 10.5.1 beschrieben worden. Diese Bauelemente ermöglichen je nach Arbeitspunkt sowie Dotierungsgrad und -profil in den einzelnen Zonen eine Vielzahl von Anwendungen. Eine Auswahl typischer Beispiele ist im Folgenden zusammengestellt, wobei verschiedenartige physikalische Effekte genutzt werden. Vorab werden einige Abweichungen der Charakteristik $I(U)$ eines realen pn-Übergangs vom Modell nach Abschnitt 10.5.1 erläutert.

10.5.2.1 Strom-Spannungs-Charakteristik eines realen pn-Übergangs

Die Gl. (10.71) für die Charakteristik $I(U)$ eines pn-Übergangs gilt unter idealisierten Annahmen. Für die Beschreibung realer pn-Übergänge sind an dieser Gleichung sowohl für die Durchlassrichtung als auch für die Sperrichtung Korrekturen anzubringen, welche wiederum zusätzliche Anwendungsmöglichkeiten aufzeigen.

Durchlassrichtung

Bei der Herleitung der Gl. (10.71) ist unterstellt worden, dass die zwischen den äußeren Anschlüssen angelegte Spannung U vollständig über der Sperrschicht zwischen p- und n-Gebiet abfällt.

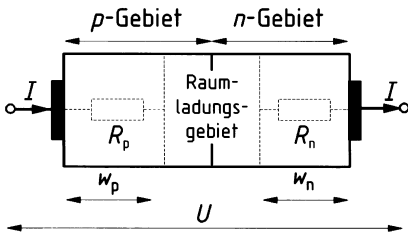


Bild 10.33: Reale pn-Diode, schematisch
 ohmsche Kontakte

Tatsächlich verursacht der fließende Strom I aber auch je einen Spannungsabfall zwischen ohmschem Kontakt und Grenze der Raumladungszone (Bild 10.33), da diese *Bahngebiete* w_p, w_n einen ohmschen Widerstand haben ($A =$ Querschnitt; κ_n bzw. κ_p ist die Leitfähigkeit des n- bzw. p-Bahngebiets, die von einer Dotierung gemäß Gl. (10.61) bzw. (10.65) abhängt). Demnach verbleibt für die Spannung über dem pn-Übergang der Anteil $U - R_B I$ (mit dem *Bahnwiderstand* $R_B = R_p + R_n$) und Gl. (10.71) ist zu erweitern in

$$I = I_S \left(e^{\frac{U - R_B I}{U_T}} - 1 \right). \tag{10.72}$$

Dieser Effekt macht sich praktisch nur in Durchlassrichtung bemerkbar und führt dort zu einer deutlichen Scherung (Linearisierung) gegenüber der idealisierten Kennlinie (Bild 10.34a).

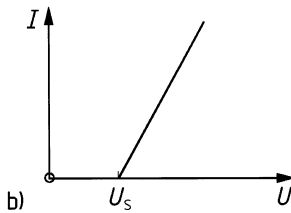
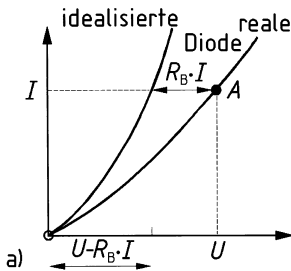


Bild 10.34: Idealisierte bzw. durch den Bahnwiderstand $R_B = R_p + R_n$ gescherte reale Kennlinie $I(U)$ einer pn-Diode, schematisch (a) und Annäherung durch eine geknickte Gerade (b)

Mitunter wird die gescherte Kennlinie vereinfachend durch eine geknickte Gerade ersetzt (Bild 10.34b). Ihr Fußpunkt bei der *Schleusenspannung* U_s ist etwa gleich der Diffusionsspannung U_D .

Sperrrichtung

Der Sperrstrom einer realen pn-Diode steigt jenseits einer von ihrem Aufbau und ihrer Dotierung abhängigen Spannung $-U_{z0}$ (*Zener-Spannung*) steil an (Z-Diode, Bild 10.35).

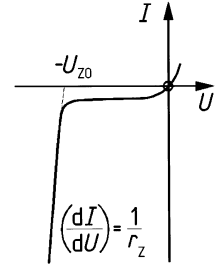


Bild 10.35: Strom-Spannungs-Kennlinie einer Z-Diode, schematisch

Für diesen *Durchbruch* gibt es im Wesentlichen zwei Ursachen:

- 1) Mit betragsmäßig wachsender Sperrspannung $-U$ nimmt die Feldstärke E in der Raumladungszone betragsmäßig so stark zu, dass ab etwa 10^6 V/cm Valenzelektronen aus ihren Bindungen herausgerissen werden und zum Strom beitragen. Dieser *Zener-Durchbruch* überwiegt in hochdotierten und daher schmalen pn-Übergängen.
- 2) Elektronen und Defektelektronen werden in der Raumladungszone zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen mit Gitterbausteinen so stark beschleunigt und dadurch energiereicher, dass sie durch Stoß andere Bindungen aufbrechen (*Stoßionisation*), dadurch neue Elektron-Loch-Paare bilden, welche ihrerseits wieder Stoßionisation bewirken. Dieser *Lawinen-Durchbruch*, welcher der Townsend-Entladung in Gasen ähnlich ist (Abschnitt 10.2.3.1), überwiegt in schwach dotierten und daher breiten pn-Übergängen.

Die Kennlinie $I(U)$ kann im Bereich des Durchbruchs in sehr guter Näherung durch eine Gerade beschrieben werden. Deren Steigung $1/r_z$ definiert den *dynamischen Widerstand* r_z .

Zwischen den beiden metallischen Zuleitungen an die Diode und den äußeren Endflächen des jeweiligen p- bzw. n-Gebiets entstehen *Metall-Halbleiter-Übergänge*. Damit diese die Richtwirkung der Diode nicht beeinflussen, d. h. den Strom in beiden Richtungen in gleichem Maße durchlassen (*Ohmsche Kontakte*), ist bei einem p-(n-)Halbleiter ein Metall erforderlich, dessen Austrittsarbeit größer (kleiner) als die des Halbleiters ist, sodass im Halbleiter eine Anreicherung von Majoritätsträgern zum Metall hin entsteht. Anderenfalls entsteht ein gleichrichtender *Schottky-Kontakt* (Abschnitt 10.5.2.2).

10.5.2.2 Gleichrichter- und Misch-Dioden

Unter *Gleichrichtung* versteht man die Erzeugung eines Stroms bzw. einer Spannung einheitlichen Vorzeichens aus einer Spannung wechselnden Vorzeichens. Hierzu ist eine Halbleiterdiode wegen der ausgeprägten Richtungsabhängigkeit ihrer Charakteristik $I(U)$ geeignet. Wenn sie z. B. gemäß Bild 10.36 in der Umgebung des Arbeitspunktes A mit einer Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$ angesteuert wird, erzeugt der (impulsförmige) Strom $i(t)$ an einem ohmschen Widerstand eine Spannung einheitlichen Vorzeichens. Daraus kann auf die Größe der Sinusspannungsamplitude \hat{u} geschlossen werden. In realen Gleichrichter-Schaltungen wird die

impulsförmige Spannung durch Verwendung mehrerer Dioden und/oder zusätzlicher Kondensatoren geglättet (Abschnitt 9.2.2).

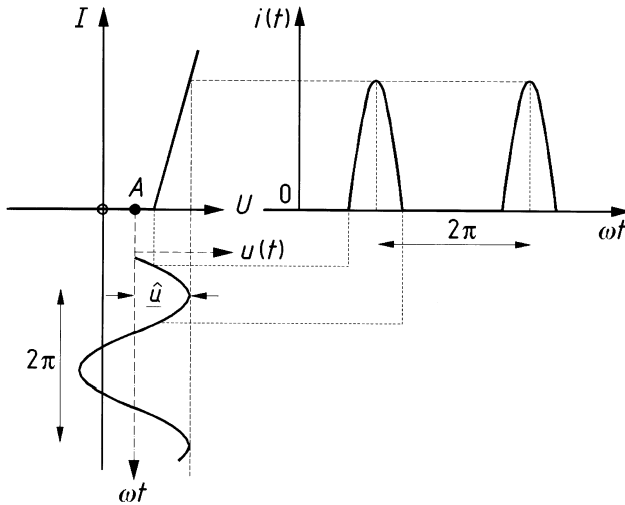


Bild 10.36: Gleichrichtung mit pn-Diode

Das Wort „Gleichrichtung“ wird mitunter auch benutzt, wenn es sich eigentlich um eine Amplituden-Demodulation handelt, d. h. um die Wiedergewinnung eines NF-Signals aus einer damit amplitudenmodulierten Trägerschwingung (z. B. AM-Hörrundfunk, analoges Fernsehbildsignal).

Unter *Mischung* versteht man die Erzeugung von Sinusströmen mit *Kombinationsfrequenzen* $m \cdot f_1 + n \cdot f_2$ (m, n ganzzahlig) bei Durchsteuerung einer nichtlinearen Charakteristik $I(U)$ mit zwei Sinusspannungen der Frequenzen f_1 und f_2 .

Wenn z. B. die Kennlinie der Halbleiterdiode in Bild 10.34a in der Umgebung des Arbeitspunktes A durch eine quadratische Parabel angenähert wird

$$I = I_A + a(U - U_A) + b(U - U_A)^2$$

und die Spannung

$$u(t) = U_A + \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

anliegt, so erzeugt der quadratische Term u. a. die Anteile

$$\frac{b}{2} \hat{u}_1 \hat{u}_2 \cos[(\omega_1 \pm \omega_2)t + \varphi_1 \pm \varphi_2],$$

d. h. Ströme der beiden Kombinationsfrequenzen mit $m = 1, n = \pm 1$. Hiervon wird z. B. beim *Überlagerungsempfang* in der HF-Technik Gebrauch gemacht. Bei Zugrundelegung einer exponentiellen Charakteristik $I(U)$ entstehen Stromanteile bei sämtlichen Kombinationsfrequenzen.

Zu den Gleichrichter- und Mischdioden gehören auch die *Rückwärtsdiode* (die im Zusammenhang mit der *Tunnel diode* in Abschnitt 10.5.2.7 behandelt wird) und die *Schottky-Diode*. Letztere ist ein Metall-Halbleiterübergang, bei dem die Elektronen-Austrittsarbeit im Metall größer

(kleiner) als im n- (p-) Halbleiter ist, sodass im Halbleiter eine Verarmung an Majoritätsträgern zum Metall hin entsteht. Die Charakteristik $I(U)$ einer Schottky-Diode stimmt formal mit Gl. (10.72) für einen realen pn-Übergang überein, allerdings mit dem wesentlichen Unterschied, dass es sich hier um einen *Majoritätsträgerstrom* handelt. Dies spielt für den Einsatz von Schottky-Dioden als elektronische Schalter eine wichtige Rolle (Abschnitt 10.5.2.4). Außerdem ist der Bahnwiderstand geringer, da das Metall hierzu nur einen unbedeutenden Anteil beiträgt. Das ist besonders für den Einsatz als Mischdiode bei extrem kleinen Nutzsignalen von Bedeutung, wie sie z. B. bei radioastronomischen Empfängern vorliegen.

10.5.2.3 Z-Dioden

Eine Z-Diode ist eine kontaktierter pn-Übergang, der im Sperrgebiet im Bereich des *Zener-* bzw. *Lawinen-Durchbruchs* betrieben wird. Sofern einer der beiden Durchbruchmechanismen dominiert, spricht man speziell von einer Zener- bzw. Lawinen-Diode; im Allgemeinen sind beide Effekte zu berücksichtigen. Die *Zener-Spannung* U_{z0} , bei welcher der Steilanstieg des Stroms einsetzt, liegt je nach Bauart und Dotierung der Diode zwischen einigen Volt und einigen Hundert Volt. Wenn die Zener-Spannung insbesondere den Wert 5,6 V hat, kompensieren sich die gegenläufigen Temperaturabhängigkeiten des Zener- und des Lawinen-Durchbruchs, sodass der resultierende Temperaturkoeffizient von U_{z0} null ist.

Derartige Dioden werden bevorzugt zur *Spannungsstabilisierung* und *Begrenzung* eingesetzt. Außerdem finden Z-Dioden weit verbreitete Anwendung in der Messtechnik (zur Nullpunktunterdrückung, Messbereichsbegrenzung und -Dehnung), als Begrenzer und Clipper, in der Leistungselektronik als Schutzdioden, in Verbindung mit Transistoren und Thyristoren zur Triggereung sowie zur Potenzialverschiebung in integrierten Schaltungen. In der optischen Nachrichtentechnik wird der Lawinen-Effekt in den *Lawinen-Photodioden* zur Steigerung der Empfindlichkeit von Empfängern genutzt (Abschnitt 10.5.6.1).

Der vom Zener- bzw. Lawinen-Effekt verursachte plötzlich einsetzende elektrische Durchbruch der Sperrschicht ist reversibel, d. h. beim Verkleinern der Sperrspannung unter die Zener-Spannung U_{z0} verarmt die Übergangszone wieder an Ladungsträgern, die Sperrwirkung ist wiederhergestellt und es fließt wieder der Sättigungssperrstrom der idealisierten Diode. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn die beim plötzlichen Anwachsen des Stroms entstehende Wärmemenge so rasch abgeführt wird, dass die Sperrschicht nicht auf thermischem Weg strukturell zerstört wird. Der *Wärmedurchbruch* ist in der Regel irreversibel. Der durch die Z-Diode fließende Strom $I = -I_z$ darf also den durch die zulässige Verlustleistung P_v bestimmten Höchstwert $I_{z\max} = P_v/U_{z0}$ nicht überschreiten. Dies wird in der Regel durch Vorschalten eines Vorwiderstandes R_v sichergestellt.

Bild 10.37 zeigt als Anwendungsbeispiel eine Schaltung mit Z-Diode zur Spannungsstabilisierung. Schaltet man nach Bild 10.37a die Z-Diode in Reihe mit dem Strombegrenzungswiderstand R_v und liegt die zu stabilisierende Spannung U_e in einem solchen Wertebereich, dass die Z-Diode jenseits des Knicks der Kennlinie betrieben wird, so ist die Ausgangs-Spannung U_a am Lastwiderstand R_a der Schaltung von Änderungen der Spannung U_e praktisch unabhängig. Geändert werden im Wesentlichen der Strom I_z und der Spannungsabfall am Vorwiderstand R_v .

Bild 10.37b zeigt die Lage der Arbeitspunkte A_1, A_2, A_3 auf der Kennlinie $I_z = I_z(U)$ der Z-Diode für die unterschiedlichen Eingangsspannungen $U_e = U_1, U_2, U_3$. Jeder Arbeitspunkt ergibt sich als Schnittpunkt der Diodenkennlinie mit der jeweiligen Arbeitsgeraden. Deren Lage

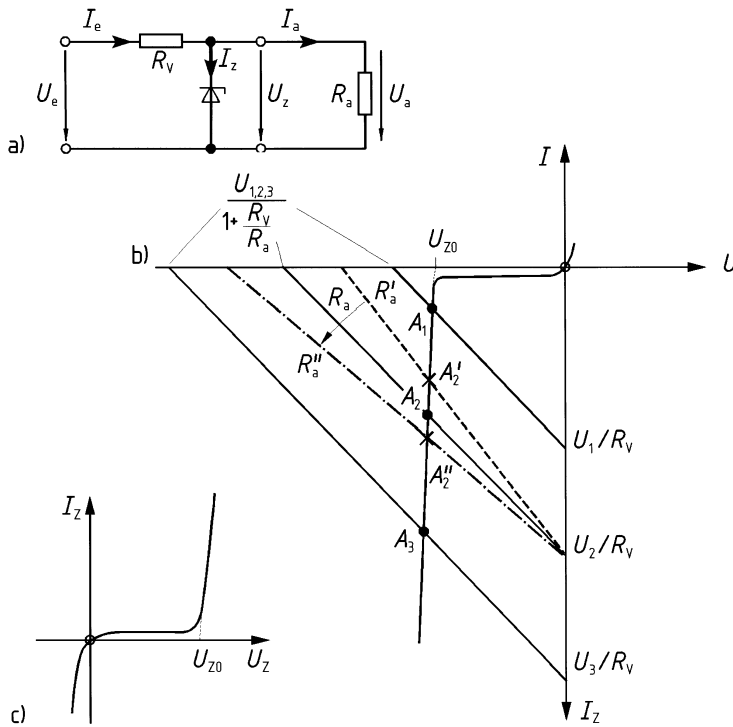


Bild 10.37: Spannungsstabilisierung mit Z-Diode
 a) Schaltung
 b) Grafische Darstellung der Stabilisierung
 c) Kennlinie $I_z(U_z)$ einer Z-Diode

ist bestimmt durch ihre Steigung und durch den Abschnitt auf der Spannungsachse ($I = 0$). Für $I_z = 0$ verteilt sich die Spannung U_e gemäß Bild 10.37a auf die Serienschaltung aus R_v und R_a . Auf die Diode entfällt also der Anteil (= Achsenabschnitt) $U_e R_a / (R_a + R_v)$. Die Steigung der Arbeitsgeraden ist gemäß Bild 10.37a durch die Parallelschaltung aus R_v und R_a gegeben. Sie ist also für die drei Arbeitsgeraden in Bild 10.37b dieselbe. Die (geringen) Änderungen der Ausgangsspannung ΔU_a ergeben sich aus der Stromänderung und dem durch die Neigung der Zener-Kennlinie festgelegten dynamischen (= differentiellen) Widerstand r_z (vgl. Bild 10.35). Für $r_z \rightarrow 0$ gilt auch $\Delta U_a \rightarrow 0$.

Die Ausgangsspannung U_a der in Bild 10.37a angegebenen Schaltung lässt sich nicht nur bei Schwankungen der Eingangsspannung U_e stabilisieren, sondern in entsprechender Weise auch bei Änderungen des Lastwiderstandes R_a , wie Bild 10.37b für das Beispiel $U_e = U_2$ und $R'_a < R_a < R''_a$ zeigt, wobei sich der Arbeitspunkt lediglich in dem kleinen Spannungsbereich gemäß $A'_2 \dots A_2$ bewegt.

Somit ergibt sich mit der Z-Diode die Möglichkeit, eine genaue Bezugs- oder Referenzspannung festzulegen. Man bezeichnet dann die Z-Diode als *Referenz-Diode* oder Spannungs-Referenzelement. Mit ihr können Referenz-Spannungsquellen aufgebaut werden.

Vielfach wird das Verhalten der Z-Dioden auch gemäß Bild 10.37c beschrieben: Das Geschehen ist gegenüber Bild 10.35 formal aus dem 3. Quadranten in den 1. verlagert worden, indem $-U$ durch U_z und $-I$ durch I_z ersetzt ist. Dadurch erspart man sich bei der Beschreibung und Berechnung von Schaltungen mit Z-Dioden viele Minuszeichen.

Beispiel 10.14: Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode

Eine Z-Diode mit der Zener-Spannung $U_{z0} = 5,6\text{ V}$ und dem dynamischen Widerstand $r_z = 10\ \Omega$ soll nach der in Bild 10.37a angegebenen Schaltung bei der Eingangsspannung $U_e = 30\text{ V}$ auf den Lastwiderstand $R_a = 2200\ \Omega$ arbeiten.

- a) Wie groß muss der Vorwiderstand R_v sein, um den Zener-Strom auf $I_z = 3,5\text{ mA}$ zu begrenzen?

An dem vom Strom $I_z + I_a$ durchflossenen Vorwiderstand R_v liegt die Teilspannung $U_e - U_z$. Mit $U_z \approx U_{z0}$ gilt daher

$$R_v = \frac{U_e - U_z}{I_z + I_a} \approx \frac{U_e - U_{z0}}{I_z + I_a}.$$

Mit dem Strom $I_a = U_{z0}/R_a = 5,6\text{ V}/(2200\ \Omega) = 2,55\text{ mA}$ wird der Vorwiderstand

$$R_v \approx \frac{(30 - 5,6)\text{ V}}{(3,5 + 2,55)\text{ mA}} \approx 4\text{ k}\Omega.$$

- b) Wie groß ist die relative Änderung $\Delta U_a/U_a$ der Ausgangsspannung bei relativer Zunahme der Eingangsspannung U_e bzw. des Lastwiderstandes R_a um 10%?

Der Zusammenhang zwischen $\Delta U_a = \Delta U_z$ und ΔU_e ergibt sich aus der Verschiebung des Schnittpunktes der Arbeitsgeraden

$$U_e = R_v I_e + U_z \quad \text{mit} \quad I_e = I_z + U_z/R_a$$

mit der Diodenkennlinie

$$U_z = r_z I_z + U_{z0}.$$

Durch Elimination von I_z aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$U_z = \frac{\frac{U_e}{R_v} + \frac{U_{z0}}{r_z}}{\frac{1}{R_v} + \frac{1}{r_z} + \frac{1}{R_a}} \quad (10.73)$$

und hieraus für $R_a = \text{const}$ bei Änderungen von U_e

$$\Delta U_z = \frac{\Delta U_e}{1 + R_v \left(\frac{1}{r_z} + \frac{1}{R_a} \right)}. \quad (10.74)$$

Aus den Gln. (10.73) und (10.74) folgt

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{r_z} \cdot \frac{U_{z0}}{U_e}} \cdot \frac{\Delta U_e}{U_e} \quad (10.75)$$

Mit den vorgegebenen Zahlenwerten erhält man

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = 0,13 \%$$

Die relative Schwankung der Eingangsspannung ist also annähernd um das 76-fache herabgesetzt. Durch Hintereinanderschalten zweier Z-Dioden mit Vorwiderständen (Kaskadenschaltung) lässt sich die Spannungskonstanz weiter annähern.

Entsprechend zu den Gln. (10.74) und (10.75) erhält man aus Gl. (10.73) bei $U_e = \text{const}$ und Änderungen von R_a nach Zwischenrechnung

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = \frac{\frac{\Delta R_a}{R_a}}{1 + R_a \left(\frac{1}{R_v} + \frac{1}{r_z} \right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta R_a}{R_a} \right)} \quad (10.76)$$

Da $r_z \ll R_a$, R_v ist, gilt in guter Näherung

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = \frac{r_z}{R_a} \cdot \frac{\frac{\Delta R_a}{R_a}}{1 + \frac{\Delta R_a}{R_a}} \quad (10.77)$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten gilt

$$\frac{\Delta U_z}{U_z} = \begin{cases} 0,0411 \% \text{ nach Gl. (10.76)} \\ 0,0413 \% \text{ nach Gl. (10.77)} \end{cases} ,$$

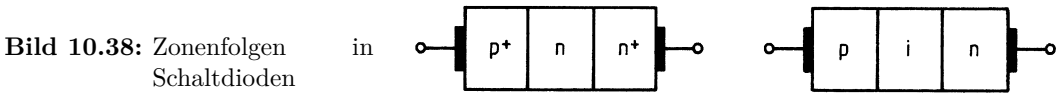
d. h. eine Verringerung der Schwankung um etwa den Faktor 240.

10.5.2.4 Schaltdioden

Im Gegensatz zur zeitlich harmonischen Aussteuerung von Gleichrichter- und Mischdioden wird nun die Reaktion von Dioden auf steilflankige Änderungen von Strom bzw. Spannung betrachtet. Derartige *impulsförmige Zeitverläufe* sind z. B. für logische Schaltungen und für die Leistungselektronik charakteristisch.

Aufgabe einer Schaltdiode ist es, möglichst sprunghaft aus dem leitenden in den sperrenden Zustand zu schalten. Dies wird dadurch ermöglicht, dass zwischen p- und n-Gebiet eine schwach leitende Zone eingefügt wird (p^+n^+ - oder *pin-Struktur* mit kurzem Mittelgebiet, Bild 10.38).

Beim Anlegen einer Spannung in *Durchlassrichtung* wird die schwach leitende Mittel-Zone von Löchern und Elektronen überschwemmt. Da durch den großen Dotierungsunterschied zu den benachbarten Schichten ein rekombinationsarmes Gebiet vorliegt, haben die injizierten Löcher als Minoritätsträger eine Lebensdauer bis zu einigen 100 ms und führen somit zu einer Ladungsspeicherung.



Beim Anlegen einer Spannung in *Sperrrichtung* werden die in der Mittel-Schicht gespeicherten Ladungsträger zunächst mit konstantem Strom entgegengesetzter Richtung so lange abgebaut, bis beim Erreichen der Gleichgewichtskonzentration an den Rändern der Raumladungszone der Strom innerhalb der *Übergangs-* bzw. *Abfallzeit* um einige Größenordnungen auf seinen stationären Wert hin abnimmt.

Das Ausräumen der injizierten Ladung aus den Bahngebieten kann auch dadurch beschleunigt werden, dass die dortige Dotierung zum pn-Übergang hin abnimmt. Durch einen derartigen Gradienten in der Konzentration der ionisierten Dotierungsatome wird ein elektrisches Feld in die Bahngebiete eingebaut. Es hält den gesamten injizierten Minoritätsträgerüberschuss in der Nähe des pn-Übergangs, sodass die Abfallzeit in der Größenordnung von ns liegt. Solche Dioden werden *Speicher-Varaktoren*, *Speicherschalt-* oder *Ladungsspeicher-Dioden* genannt (im Englischen *step recovery diodes* bzw. *snap off diodes*).

Auch Schottky-Dioden sind für die Realisierung schneller Schaltvorgänge sehr gut geeignet. Da der Stromtransport durch dieses Bauelement ein Majoritätsträgerereffekt ist (Abschnitt 10.5.2.2), gibt es hier keine gespeicherte Minoritätsladung, die nach dem Umschalten von Fluss- in Sperrrichtung abgebaut werden muss. Daher stellt sich die Sperrwirkung nach dem Umschalten extrem schnell (typisch 1 ns) ein.

10.5.2.5 Varaktordioden

Varaktordioden nutzen die Spannungsabhängigkeit der Kapazitäten einer Halbleiterdiode (Abschnitt 10.5.1).

Sperrschicht-Varaktoren werden in Sperrrichtung betrieben und nutzen die veränderliche Sperrschichtkapazität (Gl. (10.70)). Sie werden eingesetzt zur Abstimmung von Schwingkreisen, zur Frequenz-Modulation und -Vervielfachung sowie zur Mischung. Diese Funktionen erfüllen außer pn-Dioden auch Schottky-Dioden.

Speicher-Varaktoren (mit einer pin-ähnlichen Struktur) werden in Sperr- und Durchlassrichtung angesteuert und vorzugsweise als Frequenz-Vervielfacher für hohe Leistungen und große Vervielfacherzahlen eingesetzt.

Beispiel 10.15: Schwingkreis mit Varaktordiode

Zur Durchstimmung eines LC-Schwingkreises über den Frequenzbereich von $f_{\text{res},1} = 180$ MHz bis $f_{\text{res},2} = 220$ MHz wird zu der Festkapazität C und der Induktivität L eine Varaktordiode parallelgeschaltet, deren Kapazitätswert durch Änderung der Vorspannung zwischen $C_1 = 35$ pF und $C_2 = 15$ pF variiert.

Wie sind C und L zu dimensionieren?

Aus den Beziehungen

$$f_{\text{res},1} = \frac{1}{2\pi \sqrt{(C + C_1)L}}, \quad f_{\text{res},2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{(C + C_2)L}},$$

folgt durch Division und Auflösen nach C

$$C = \frac{f_{\text{res},1}^2 C_1 - f_{\text{res},2}^2 C_2}{f_{\text{res},2}^2 - f_{\text{res},1}^2} = \frac{(180 \text{ MHz})^2 35 \text{ pF} - (220 \text{ MHz})^2 15 \text{ pF}}{(220 \text{ MHz})^2 - (180 \text{ MHz})^2} = 25,5 \text{ pF}$$

und damit aus jeder der beiden Frequenz-Gleichungen

$$L = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{f_{\text{res},1}^{-2} - f_{\text{res},2}^{-2}}{C_1 - C_2} = 12,9 \text{ nH}$$

10.5.2.6 pin-Dioden

Bei pin-Dioden befindet sich zwischen p- und n-Schicht eine schwach dotierte, also hochohmige eigenleitende i-Schicht (intrinsic), (Bild 10.38).

Bei *Polung in Durchlassrichtung* wird die i-Schicht durch den Durchlassstrom mit Ladungsträgern überschwemmt und damit niederohmig, also leitend. In der i-Schicht baut sich eine Ladung auf, die dadurch zu einem Gleichgewichtszustand gelangt, dass Löcher und Elektronen nach der von Dotierung und Aufbau abhängigen Lebensdauer τ (typisch 30 ns bis 3 μ s) rekombinieren. Die innerhalb dieser Zeit gespeicherte Ladung ist ein Maß für die über den Durchlassstrom steuerbare Leitfähigkeit der i-Schicht. Der Verlauf der Durchlasskennlinie entspricht dem der pn-Diode.

Bei *Polung in Sperrrichtung* verarmt die i-Schicht an Ladungsträgern und wird sehr hochohmig. Sie stellt dann annähernd eine spannungsunabhängige Kapazität dar.

Anwendungsbereiche von pin-Dioden sind, je nach Ausführungsform,

- tiefe Frequenzen: Leistungsgleichrichter mit zulässigen Sperrspannungen bis in den kV-Bereich
- Hochfrequenztechnik: Speicher-Varaktoren, Frequenzvervielfacher, steuerbare ohmsche Widerstände (z. B. für elektronische Dämpfungsglieder), Amplitudenmodulatoren, spannungsabhängige impuls-gesteuerte Schaltdioden (z. B. in Radaranlagen zum Umschalten der Antenne zwischen Senden und Empfangen), Realisierung digitaler Phasenschieber zur elektronischen Strahlschwenkung von Antennen
- optische Nachrichtentechnik: Photodiode (Abschnitt 10.5.6.1).

10.5.2.7 Aktive Mikrowellendioden

Aktive Mikrowellendioden werden – vorzugsweise im Mikrowellengebiet – zur *Schwingungserzeugung* (als Oszillatoren) und/oder zur *Verstärkung* verwendet. In beiden Fällen wird von den Dioden HF-Leistung an eine angeschlossene Schaltung abgegeben, sie wirken also für diese wie ein *negativer dynamischer Widerstand*. Das ist nur möglich, wenn die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom der betreffenden Frequenz bei Zugrundelegung des Verbraucher-Zählpfeilsystems zwischen 90° und 270° liegt, vorzugsweise bei 180° . Zur Erzeugung dieser

Phasendifferenz gibt es verschiedene Möglichkeiten und dementsprechende Bauelemente. Deren Wirkungsweise und Eigenschaften werden im Folgenden beschrieben.

Lawinen-Laufzeitdiode

Bei Lawinen-Laufzeitdioden wird der negative dynamische Widerstand durch eine Kombination von Lawinen-Durchbruch und anschließender Driftbewegung der erzeugten Ladungsträger in einem Laufraum erreicht. Das kommt auch im Kunstwort

Impatt (Impact Ionization Avalanche and Transit Time)-Diode

für dieses Bauelement zum Ausdruck. Es werden also ähnliche Effekte genutzt wie in den seit über 80 Jahren bekannten Laufzeit-Elektronenröhren.

In Bild 10.39a ist die Zonenfolge einer Impattdiode und in Bild 10.39b ihr Dotierungsprofil qualitativ dargestellt. Am p^+n -Übergang zwischen den Zonen 1 und 2 liegt eine solche Sperrspannung U_{BR} , dass in der Raumladungszone die für den *Lawinen-Durchbruch* erforderliche Feldstärke E_{BR} (in Si typisch 300 kV/cm) erreicht wird (Bild 10.39c). Wenn der Gleichspannung U_{BR} eine Sinusspannung $\Delta u(t)$ der Frequenz $f = \omega/2\pi$ überlagert wird, entsteht in der Halbschwingung $\Delta u(t) > 0$ wegen des Überschreitens der Durchbruch-Feldstärke eine Ladungsträgerlawine $i_a(t)$ (Bild 10.39d). Diese ist am stärksten am Ende der Halbschwingung ausgebildet, wenn $\Delta u(t) = 0$ ist. Die Lawinenbildung hinkt also der verursachenden Spannung $\Delta u(t)$ um 90° nach. Während der anschließenden Halbschwingung mit $\Delta u(t) < 0$ wird die Durchbruchfeldstärke unterschritten, sodass keine Lawinenbildung stattfindet. Die erzeugten Elektronen werden also impulsförmig in die Zone 3 injiziert. Dort gibt es wegen der fehlenden Dotierung keine Raumladung, sodass das elektrische Feld E_i konstant ist, und zwar so groß, dass sich die Elektronen mit ihrer Sättigungsgeschwindigkeit $v_s \approx 10^7$ cm/s bewegen (in Si ist typisch $E_i = 10$ kV/cm). Sie erzeugen während dieser Driftbewegung durch den Laufraum 3 der Länge w_i in der an die Diode angeschlossenen Schaltung einen *Influenzstrom* $i_{in}(t)$, welcher gegenüber dem injizierten *Lawinen-Strom* $i_a(t)$ in der Phase abermals nachhinkt, und zwar um $\Delta\varphi_i = 1/2(\omega w_i/v_s)$. Abkürzend setzt man $\omega w_i/v_s = \Theta_i$ (Bild 10.39e). Für $\Theta_i = 180^\circ$ hat der Influenzstrom gegenüber der erzeugenden Sinusspannung $\Delta u(t)$ die für eine Leistungsabgabe optimale Phasenverschiebung von 180° .

Impatt-Dioden werden aus Si bzw. GaAs hergestellt und hauptsächlich als *Oszillatoren* (bis zu einigen wenigen 100 GHz) eingesetzt, z. B. in Überlagerungsempfängern, Radaranlagen und für phasengesteuerte Antennen, aber auch als *Reflexions-Leistungsverstärker*. Für HF-Vorverstärker sind sie dagegen ungeeignet, da der Lawinen-Effekt neben dem Nutzsignal einen höheren Störpegel verursacht als z. B. der GaAs-Feldeffekttransistor (Abschnitt 10.5.3.1).

Gunn-Element

Manche Halbleitermaterialien, z. B. n-GaAs, besitzen aufgrund ihres Kristallaufbaus ein *zweigeteiltes Leitungsband*. In den beiden Teilbändern unterliegen die Elektronen unterschiedlichen Wechselwirkungskräften mit den Gitterbausteinen, sodass sie sich unter der Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, und zwar im energetisch tiefer gelegenen Teilband mit wesentlich höherer Geschwindigkeit. Da sich die Besetzung der beiden Teilbänder mit Ladungsträgern mit zunehmender Feldstärke (bzw. Spannung am Halbleiter) zugunsten des oberen Bandes ändert, nimmt die über die Elektronengesamtheit gemittelte Geschwindigkeit und damit der Strom mit wachsender Probenspannung zunächst rasch zu, bei großen Spannungen dagegen wesentlich langsamer, sodass sich ein Übergangsgebiet mit

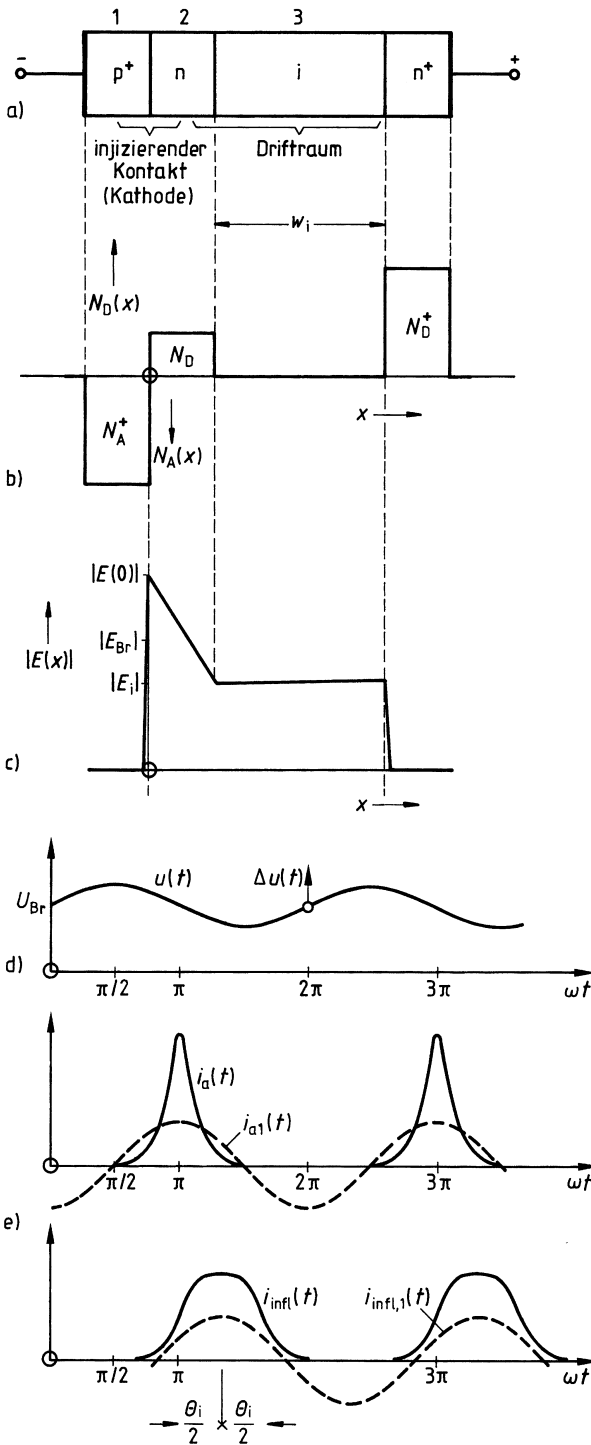
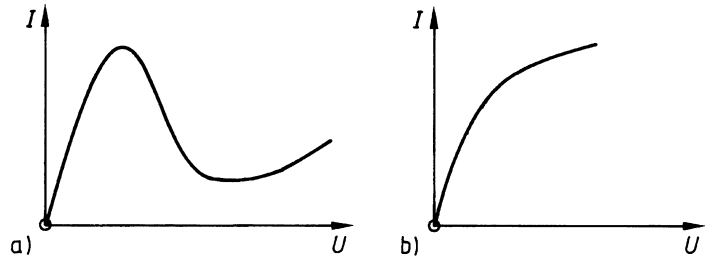


Bild 10.39: Zur Wirkungsweise der Impattdiode
 a) Zonenfolge
 b) Dotierungsprofil
 c) Feldstärkeprofil
 d) Spannung $u(t)$ an der Lawinenzone und Konvektionsstrom $i_a(t)$ in der Lawinenzone und zugehöriger Grundschwingungsanteil $i_{a,1}(t)$
 e) Influenzstrom $i_{infl}(t)$ allgemein und zugehöriger Grundschwingungsanteil $i_{infl,1}(t)$

fallender Kennlinie $I(U)$ ergeben kann (Bild 10.40a). Dies ist ein Hinweis auf einen negativen dynamischen Leitwert des Halbleiters. Aber auch dann, wenn keine stationäre fallende Kennlinie $I(U)$ entsteht (Bild 10.40b), kann sich im dynamischen Verhalten eines solchen Halbleiters eine Strominstabilität ausbilden, welche zu einem negativen Realteil der Impedanz (also einem negativen Wirkwiderstand) führt.

Bild 10.40: Stationäre Kennlinie $I(U)$ eines Gunn-Elements
 a) mit fallendem Ast
 b) ohne fallenden Ast



Der nach seinem Entdecker J. B. Gunn benannte Effekt äußert sich in einer Vielzahl von Schwingungsformen, wegen deren Diskussion auf weiterführende Literatur verwiesen wird [LBL08]. Er ist ein *Volumeneffekt* in einem n bzw. nn^+ bzw. n^+nn^+ Halbleiter. Da keine pn-Übergänge im Spiel sind, spricht man nicht von einer Diode, sondern vom *Gunn-Element*. Dieses ist der Impattdiode bezüglich Leistung und Wirkungsgrad unterlegen, dagegen bezüglich Durchstimmbarkeit und Störpegel überlegen. Gunn-Elemente finden Anwendung in Messgeräten und als Lokoszillatoren in Mischern (bis in den Bereich von 100 GHz).

Tunneldiode

Wenn in einem Halbleitermaterial die Dotierung mit Donatoren bzw. Akzeptoren sehr hoch gewählt wird (typisch $10^{19} \dots 10^{20} \text{ cm}^{-3}$), taucht das Fermi-Niveau in das Leitungs- bzw. Valenzband ein (*Entartung*). Falls in einem pn-Übergang beide Seiten bis zur Entartung dotiert sind, ist die Diffusionsspannung U_D größer als W_G/e (W_G = Bandabstand = Bindungsenergie eines Elektrons; vgl. Bild 10.29g). Daher ist das Energiebänderschema des n-Gebiets gegenüber dem des p-Gebiets soweit abgesenkt, dass sich im stromlosen Fall mit Elektronen besetzte Energiezustände im p-Valenzband und n-Leitungsband gegenüberstehen (Bild 10.41a, wegen $E_{V,p} > E_{C,n}$ spricht man von *Bänderüberlappung*). Da wegen der hohen Dotierung die Raumladungszone sehr dünn ist (einige 10^{-6} mm), ist die dortige Feldstärke größer als der für den Zener-Durchbruch erforderliche Wert. Daher können Elektronen ohne Energieänderung die (nach der klassischen Physik nicht überwindbare) Barriere zwischen p- und n-Gebiet durchdringen (*wellenmechanischer Tunneleffekt*, der dem Bauelement seinen Namen gegeben hat). Allerdings fließt noch kein resultierender Tunnelstrom, da sich im Überlappungsbereich nur besetzte Energieniveaus gegenüberstehen, sodass in beiden Richtungen gleich viel Elektronen durch die Barriere tunneln.

Bei Anlegen einer Spannung $U < 0$, d. h. in *Sperrrichtung*, wird das Bänderschema des n-Gebiets weiter abgesenkt (Bild 10.41b), sodass Elektronen aus Energieniveaus im p-Valenzband in unbesetzte, erlaubte Niveaus im n-Leitungsband tunneln können. Es fließt also in Sperrrichtung ein Strom, der mit wachsendem $|U|$ rasch zunimmt, d. h. es ist keine Sperrwirkung mehr vorhanden (Bild 10.42, Bereich 1). Wenn eine Spannung $U > 0$ angelegt wird, d. h. in *Durchlassrichtung*, wird das Bänderschema des n-Gebiets gegenüber dem stromlosen Fall angehoben (Bild 10.41c). Jetzt können Elektronen aus dem n-Leitungsband in unbesetzte, erlaubte Niveaus

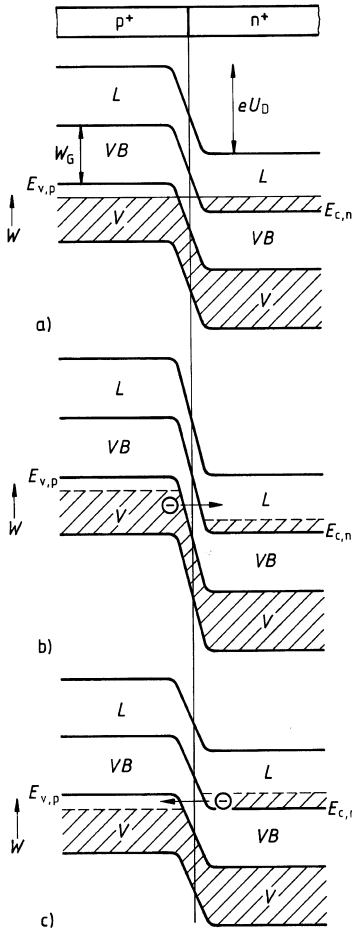


Bild 10.41: Hochdotierter pn-Übergang
 a) Bändermodell ohne Anlegen einer äußeren Spannung
 b) Bändermodell beim Anlegen einer äußeren Spannung in Sperrrichtung
 c) Bändermodell beim Anlegen einer kleinen äußeren Spannung in Durchlassrichtung
 L Leitungsband
 VB verbotenes Band
 V Valenzband

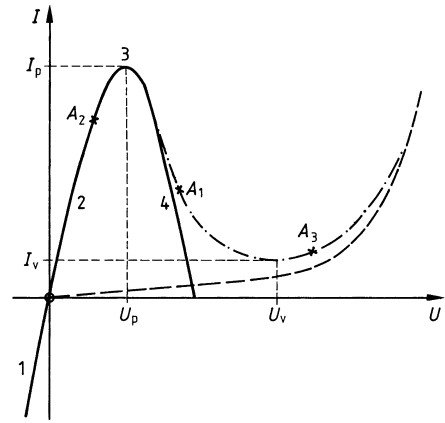


Bild 10.42: Kennlinie $I(U)$ einer Tunneldiode
 — Tunnelstrom
 - - - Diffusionsstrom
 - · - · - Gesamtstrom

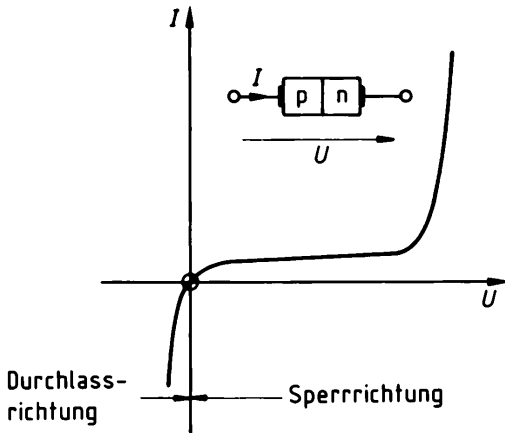
im p-Valenzband tunneln. Dieser Strom wächst mit der Spannung U zunächst an (Bereich 2 in Bild 10.42), erreicht ein Maximum, wenn das Niveau $E_{c,n}$ das Fermi-Niveau $E_{F,p}$ erreicht hat (Punkt 3 in Bild 10.42) und fällt dann wieder auf null (Bereich 4 in Bild 10.42), wenn $E_{c,n}$ die Höhe von $E_{v,p}$ erreicht hat, weil von da an den Elektronen im n-Leitungsband nur verbotene Energieniveaus im p-Gebiet gegenüberstehen. (Diese vereinfachte Darstellung gilt streng nur beim absoluten Nullpunkt der Temperatur $T = 0$.) Der *Tunnelstrom* einschließlich weiterer, hier nicht erklärter Zusatzströme überlagert sich dem von der konventionell dotierten pn-Diode her bekannten Diffusionsstrom, sodass sich die in Bild 10.42 dargestellte gesamte Kennlinie $I(U)$ ergibt. Über die Materialabhängigkeit der Kenngrößen von Tunneldioden-Kennlinien gibt Tabelle 10.7 Auskunft.

Tabelle 10.7: Materialabhängigkeit von Tunneldioden-Kenngrößen (p peak, v valley)

Material	Ge	GaSb	Si	GaAs
W_G/eV	0,66	0,7	1,11	1,43
U_p/mV	50	120	100	150
U_v/mV	300	350	450	650
$I_p/I_v \leq$	10	15	5	60

Da der quantenmechanische Tunnelprozess praktisch trägheitslos ist, können Tunneldioden im Prinzip bis zu sehr hohen Frequenzen als Verstärker (bis zu einigen 10 GHz, eindeutiger Arbeitspunkt A_1), Schalter (zwischen zwei stabilen Zuständen A_2, A_3) und *Oszillatoren* (bis zu 100 GHz, Arbeitspunkt A_1) eingesetzt werden. Wegen der geringen verarbeitbaren Signalleistung, der niedrigen dynamischen Diodenimpedanz sowie wegen technologischer Zuverlässigkeits- und schaltungstechnischer Stabilitäts-Probleme ist die Bedeutung der Tunneldiode in dem Maße stark zurückgegangen wie leistungsfähigere Halbleiterbauelemente für Verstärker (z. B. Feldeffekttransistoren), Oszillatoren (Impattdioden, Gunnelemente) und Schalter zur Verfügung stehen. Der Tunneleffekt selbst spielt jedoch bei zahlreichen neuen Halbleiterbauelementen (quantum-well-Strukturen, resonant tunneling) sowie in der *Nanoelektronik* eine entscheidende Rolle.

Eine Stellung zwischen der konventionell dotierten pn-Diode und der Tunneldiode nimmt die *Rückwärtsdiode* (backward diode) ein. Hier ist die Dotierung so hoch gewählt, dass die Diffusionsspannung U_D genau dem Bandabstand W_G entspricht ($E_{c,n} = E_{v,p}$ in Bild 10.41a). Bei Anlegen einer Spannung $U < 0$ erfolgt dann wie bei der Tunneldiode ein steiler Stromanstieg, während bei einer Polung gemäß $U > 0$ der Überlappungseffekt und damit die fallende Kennlinie $I(U)$ fehlt und nun der (zunächst sehr kleine) Diffusionsstrom fließt (Bild 10.43). Gegenüber der konventionell dotierten Diode sind offenbar Durchlass- und Sperrrichtung vertauscht (vgl. Bild 10.35 bzw. Bild 10.37c), woraus auch die Bezeichnung für dieses Bauelement resultiert. Da die Krümmung im Nullpunkt größer als bei konventionellen Dioden ist, eignen sich Rückwärtsdioden zur Gleichrichtung auch sehr kleiner HF-Spannungen. Da der Strom ein Majoritätsträgerstrom ist, entfallen Minoritätsträger-Speichereffekte; außerdem erfolgt das Tunneln extrem schnell. Daher können Rückwärtsdioden bis in das GHz-Gebiet als *Gleichrichter*, *Dektoren* und *Mischer* eingesetzt werden. Sie sind jedoch den Schottky-Dioden bei gleich guten HF-Eigenschaften bzgl. Sperrwirkung und Störpegel unterlegen.

Bild 10.43: Kennlinie $I(U)$ einer Rückwärtsdiode

10.5.3 Transistoren

In diesem Abschnitt werden Aufbau, Wirkungsweise und Anwendungen von Transistoren beschrieben. Transistoren sind Halbleiterbauelemente mit mehr als zwei (meist drei) Elektroden (Bild 10.44).

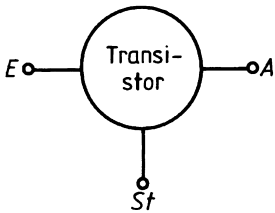


Bild 10.44: Transistor mit Eingangselektrode E, Ausgangselektrode A sowie Steuerelektrode St, schematisch

Dadurch ist es möglich, den Widerstand zwischen den beiden Klemmen E und A der Halbleiterstruktur durch das Potenzial der dritten Klemme St zu steuern. Von dieser Möglichkeit, die durch das Kunstwort Transistor (Transfer Resistor) zum Ausdruck gebracht werden soll, kann vielfältig Gebrauch gemacht werden: Von besonderem Interesse ist die Fähigkeit des Transistors, als Reaktion auf eine am „Eingangs-Klemmenpaar“ St-E angelegte Sinusspannung am „Ausgangs-Klemmenpaar“ A-E eine Sinusspannung (gleicher Frequenz) mit vergrößerter Amplitude abzugeben: Transistoren sind also *typische analoge Verstärker-Bauelemente* für Frequenzen vom Hz- bis in den GHz-Bereich [ZB99]. Außerdem lassen sich Transistoren durch Spannungs- bzw. Strom-Steuerimpulse zwischen einem hochohmigen und einem niederohmigen stabilen Zustand schalten. Derartige *Schalttransistoren* spielen z. B. in der Impulstechnik [Sch90], zur Realisierung logischer Schaltungen in digitalen nachrichtenverarbeitenden Systemen [SS07] und in der Leistungselektronik [Heu96] eine wichtige Rolle.

Weite Verbreitung in der linearen Schaltungstechnik findet der Transistor im *Operationsverstärker*, der ursprünglich aus der Analogrechner-Technik zur Durchführung von Rechenoperationen wie z. B. Addition, Multiplikation und Integration hervorgegangen ist und dessen jeweilige Eigenschaften durch entsprechend gestaltete Gegenkopplungs-Netzwerke bestimmt werden [Süß05].

Gemäß den verschiedenen zugrundeliegenden physikalischen Prinzipien unterscheidet man Feldeffekt- und Bipolartransistoren. Entgegen der historischen Entwicklung wird hier aus didaktischen Gründen mit dem Feldeffekttransistor begonnen.

10.5.3.1 Feldeffekttransistoren

Das Funktionsprinzip eines *Feldeffekttransistors* (FET) ist folgendes: In einem n- oder p-leitenden Stück einkristallinen Halbleitermaterial, das mit zwei sperrschichtfreien Anschlüssen unterschiedlichen Potentials versehen ist (E und A in Bild 10.44) fließt ein Strom. Dieser wird durch ein zur Stromrichtung senkrecht elektrisches Feld gesteuert, welches den Querschnitt bzw. die Ladungsträgerkonzentration des Strompfades (Kanal) verändert. Die Steuerung erfolgt mittels der dritten Elektrode (St in Bild 10.44). Über diese fließt im Idealfall kein Strom (leistungslose Steuerung, wie bei der gittergesteuerten Elektronenröhre gemäß Abschnitt 10.1.3.2).

Da in einem FET der Stromfluss in einem Halbleitermaterial einheitlichen Leitungstyps erfolgt, d. h. ohne Überschreitung von pn-Übergängen, vollzieht er sich wie in einem ohmschen Widerstand; er wird praktisch ausschließlich von *Majoritätsträgern* getragen. Während also in der Halbleiterdiode und auch beim Bipolartransistor (Abschnitt 10.5.3.2) Elektronen und Defektelektronen für den Betrieb des Bauelements unverzichtbar sind, spielen beim FET die Majoritätsträger die entscheidende Rolle, d. h. eine Ladungsträgerart. Man nennt ihn daher auch *Unipolar-Transistor*. Die Minoritätsträger sind natürlich auch vorhanden, aber für den Wirkungsmechanismus des FET uninteressant. Damit hängt die viel geringere Temperaturempfindlichkeit seiner Strom-Spannungs-Charakteristik zusammen. Ferner spielen Rekombinationsvorgänge nur eine untergeordnete Rolle.

Die drei Anschlüsse eines FET werden mit den Buchstaben S, D und G bezeichnet entsprechend den englischen Wörtern

<i>Source</i> (Quelle)	Eingang des stromführenden Kanals
<i>Drain</i> (Abfluss, Senke)	Ausgang des stromführenden Kanals
<i>Gate</i> (Gatter, Tor)	Elektrode zur Steuerung des Kanals

Es werden zwei Grundformen von FETs unterschieden:

- Nicht-Isolierendes Gate (NIGFET), realisiert als Sperrschicht-Feldeffekttransistor
- Isolierendes Gate (IGFET), realisiert als MOS-Feldeffekttransistor.

Sperrschicht-Feldeffekttransistor

Bei dieser Ausführungsform wird zur Steuerung des Stroms im n- oder p-leitenden Halbleiter (Kanal) das elektrische Feld eines in Sperrrichtung vorgespannten pn-Übergangs genutzt. Daher ist für diesen Transistor-Typ die Kurzbezeichnung *pn-FET* (bzw. *Junction FET* oder *JFET*) üblich.

Bild 10.45 zeigt seinen prinzipiellen Aufbau in Planartechnik. In dem hier n-leitenden Halbleiter sind am Anfang und Ende über eindiffundierte stark n-dotierte Inseln und damit verbundene Metallschichten sperrschichtfreie Elektroden S und D realisiert. Entsprechendes gilt für die über einer p⁺-Insel angebrachte Steuerelektrode G.

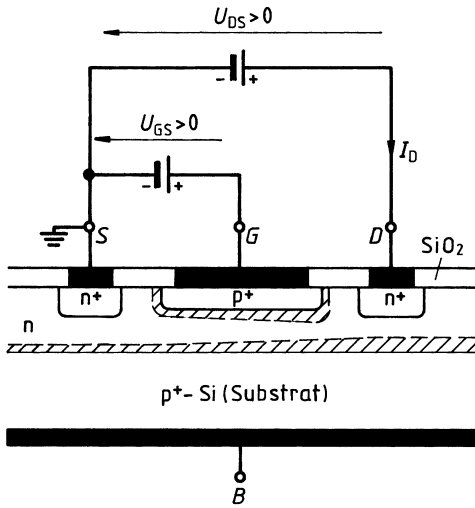


Bild 10.45: Beispiel eines n-Kanal Si-pn-FET in Planartechnik

/// Raumladungszonen,
 ■ aufgebracht Metall

Durch die Spannung $U_{DS} > 0$ wird die Elektrode D positiv gegenüber der Elektrode S vorgespannt, sodass ein von der Leitfähigkeit des Halbleiterwerkstoffes und der Kanalgeometrie abhängiger Strom I_D durch den Kanal fließt. Der Querschnitt des Kanals wird durch die Raumladungszonen unterhalb des p⁺-Gate und oberhalb des p⁺-Substrats begrenzt; in das Substrat ragt die Raumladungszone praktisch nicht hinein (Gl. (10.69)). Das Substrat ist elektrisch von außen über den Anschluss B (bulk) zugänglich. Allerdings sind die Elektroden B und S meistens untereinander verbunden. Die Ausdehnung der schraffiert eingezeichneten Raumladungszonen wird durch die Spannung $U_{GS} < 0$ beeinflusst. Sie nimmt mit wachsendem $|U_{GS}|$ zu, wodurch der Widerstand des Kanals vergrößert wird und der Strom I_D abnimmt. Der über die in Sperrrichtung gepolten p⁺n-Übergänge fließende Strom (typisch 1 nA) kann bei Einzelhalbleitern vernachlässigt werden. Der pn-FET hat also einen sehr hohen Widerstand zwischen S und G (typisch $10^8 \dots 10^{11} \Omega$). Somit ist eine praktisch *leistungslose Steuerung des Stroms* I_D möglich.

Nach Bild 10.45 ist der für den Stromfluss verfügbare Kanal-Querschnitt innerhalb der Halbleiterprobe nicht konstant, sondern verringert sich in Richtung auf die Elektrode D. Diese Veränderung wird hervorgerufen durch Überlagerung des durch den Strom I_D im widerstandsbehafteten Halbleitermaterial selbst hervorgerufenen Spannungsabfalls mit des vom pn-Übergang herrührenden Spannungsabfalls. Die ortsabhängige Potenzialdifferenz beträgt am Source-seitigen Ende des Kanals $-(U_{GS} + U_D)$ und am Drain-seitigen Ende $U_{DS} - (U_{GS} + U_D) = U_{DS} + |U_{GS} + U_D|$. Für sehr kleine Spannungen U_{DS} kann dieser Unterschied vernachlässigt werden, sodass sich der Kanal wie ein ohmscher Widerstand verhält und der Strom I_D proportional der Spannung U_{DS} zunimmt. Der FET stellt in diesem *Anlaufgebiet* einen (durch U_{GS}) *elektronisch steuerbaren Ohmschen Widerstand* dar. Davon wird in der Schaltungstechnik vielfach Gebrauch gemacht.

Die Spannung U_{DS} kann nun so weit vergrößert werden, dass sich die beiden in den Kanal hineinragenden Raumladungszonen am Drain-seitigen Ende berühren. Man spricht dann von der *Abschnür- oder pinch-off-Spannung* $U_{DS,p}$. Die Spannung $U_{DS,p} + |U_{GS} + U_D|$ heißt *Schwellspannung* U_{th} . Eine Vergrößerung der Spannung U_{DS} über den Wert $U_{DS,p}$ hinaus bringt praktisch keine Erhöhung des Stroms I_D mehr; es tritt also Sättigung ein. Die Abschnürspannung wird um so eher erreicht, je größer U_{GS} ist.

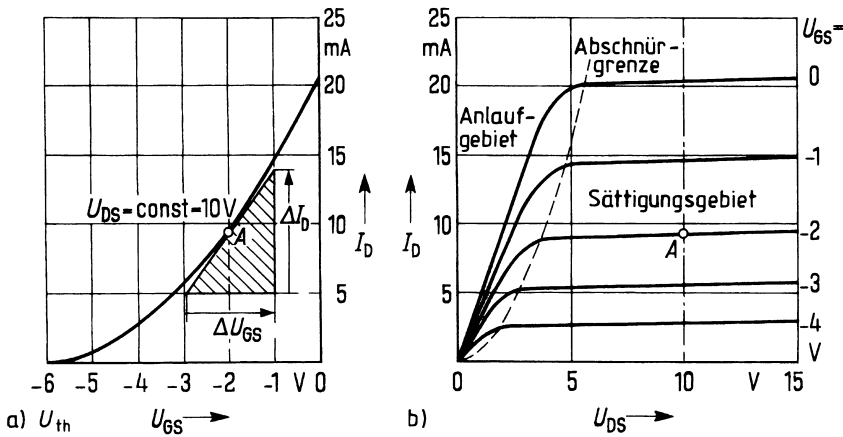


Bild 10.46: Kennlinienfelder eines n-Kanal-Sperrschicht-Feldeffekttransistors

a) Steuerkennlinienfeld $I_D(U_{GS})$ mit U_{DS} als Parameter

b) Ausgangskennlinienfeld $I_D(U_{DS})$ mit U_{GS} als Parameter

Bild 10.46 zeigt die an einem pn-FET gemessene Abhängigkeit des Stroms I_D von den Spannungen U_{GS} und U_{DS} in der Form $I_D(U_{GS})$ für $U_{DS} = \text{const}$ (*Steuerkennlinienfeld*, Bild 10.46a) bzw. $I_D(U_{DS})$ für $U_{GS} = \text{const}$ (*Ausgangskennlinienfeld*, Bild 10.46b). Die Schwellspannung beträgt hier $U_{th} = -6$ V. Der Strom I_D ist in der Umgebung des Nullpunktes proportional zu U_{DS} (Ohmsches Verhalten) mit einem von U_{GS} abhängigen Proportionalitätsfaktor und nach Überschreiten der Abschnürspannung (Ende des *Anlaufgebiets*) praktisch von U_{DS} unabhängig und nur noch durch Änderung der negativen Spannung U_{GS} zu beeinflussen. Dies ist der übliche Arbeitsbereich des Feldeffekttransistors (Abschnür-, *pinch-off*- oder *Sättigungsgebiet*). Die Spannung U_{DS} darf Werte zwischen 20 V bis 30 V nicht überschreiten, um einen Durchbruch zwischen Drain und Gate zu vermeiden.

Es bereitet natürlich Verständnisschwierigkeiten, dass bei Drain-seitig abgeschnürtem Kanal noch ein Strom fließt und sogar der maximal mögliche. Dieser Widerspruch hat seine Ursache in dem hier benutzten zu einfachen Modell: In Wirklichkeit wird der Kanal zum Drain hin nur so weit eingengt, dass die Elektronen den Strom mit der physikalisch bedingten Maximalgeschwindigkeit $v_s \approx 10^7$ cm/s durch die engste Stelle des Kanals transportieren können.

Die Steigung der Steuerkennlinie in einem *Arbeitspunkt* A, d. h.

$$\left(\frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}} \right)_{U_{DS}=\text{const}}$$

nennt man *Steilheit* und bezeichnet sie mit dem Buchstaben S . Sie ist für den Betrieb des FET als (analoger) Verstärker maßgebend. Ihren Zahlenwert kann man näherungsweise aus der Steuerkennlinie als Verhältnis einer (kleinen) Drain-Strom-Änderung ΔI_D zur (kleinen) Änderung der Steuerspannung ΔU_{GS} entnehmen.

In Bild 10.46a ist der Arbeitspunkt A festgelegt durch $U_{DS} = 10$ V und $U_{GS} = -2$ V. Aus dem Kennlinienfeld lassen sich die Werte ablesen $I_D = 9,3$ mA, $\Delta I_D = 8,6$ mA, $\Delta U_{GS} =$

2 V, sodass im Arbeitspunkt A die Steilheit näherungsweise $\Delta I_D / \Delta U_{GS} = 8,6 \text{ mA} / (2 \text{ V}) = 4,3 \text{ mA/V}$ beträgt.

Beispiel 10.16: Spannungsverstärkung eines Feldeffekttransistors

Wenn der Gleichspannung $U_{GS} = -2 \text{ V}$ eine Sinusspannung mit der Amplitude $\hat{u}_{GS} = \frac{1}{2} \Delta U_{GS}$ überlagert wird, bewirkt diese nach Bild 10.46a eine harmonische Stromänderung mit der Amplitude

$$\hat{i}_D = \frac{1}{2} \Delta I_D = S \frac{1}{2} \Delta U_{GS} = S \hat{u}_{GS} = 4,3 \text{ mA}.$$

Dieser Sinusstrom verursacht an einem zwischen Drain und Source geschalteten Lastwiderstand R_L eine Sinusspannung mit der Amplitude

$$\hat{u}_{DS} = R_L \hat{i}_D = R_L S \hat{u}_{GS}.$$

Der Transistor bewirkt also die Spannungsverstärkung $R_L S$, das ist 43 für $R_L = 10 \text{ k}\Omega$. Dabei besteht zwischen den beiden Zeitfunktionen $u_{DS}(t)$ und $u_{GS}(t)$ eine Phasendrehung von 180° .

Ist die Halbleiterprobe p -leitend und Gate sowie Substrat vom n -Typ (p -Kanal pn -FET), so ändern die in Bild 10.45 angegebenen Ströme und Spannungen ihr Vorzeichen.

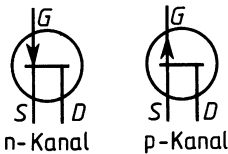


Bild 10.47: Schaltzeichen des Sperrschicht-FET

Bild 10.47 zeigt die Schaltzeichen für n - und p -Kanal Sperrschicht-FET. Sie unterscheiden sich durch die Richtung des am Gate-Anschluss angebrachten Pfeils. Im Gegensatz zu Bild 10.44 ist hier die Umrahmung nicht erforderlich; sie fortzulassen ist zulässig und bei integrierten Schaltungen (Abschnitt 10.5.6) generell üblich. Ansonsten wird die Einrahmung in der Praxis dort angegeben, wo sie die Übersichtlichkeit des Schaltplans erhöht. Grundsätzlich ist es auch nicht erforderlich (wie hier zum besseren Verständnis noch geschehen), die Anschlusselektroden durch die Buchstaben D , G , S zu kennzeichnen. Der im Schaltzeichen enthaltene Strich stellt immer die Halbleiterzone dar und die dazu senkrechten Linien geben die Anschlüsse an. Der Source-Anschluss S ist durch die unmittelbare Verlängerung des Gate-Anschlusses G gegeben. Der einseitige Anschluss ist somit der Drain-Anschluss D .

In einigen Ausführungsformen von NIGFETs werden Schottky-Kontakte als Gate-Elektroden (und semiisolierende Substrate) verwendet. Diese auf GaAs -Basis aufgebauten MES (= Metal Semiconductor) FETs haben Bedeutung besonders für die Mikrowellentechnik, aber auch für sehr schnelle Logikschaltungen und Leistungsverstärker. Für sehr hohe Frequenzen von einigen 10 GHz bis etwa 100 GHz werden *Hetero-FETs* eingesetzt. Diese enthalten einen aus mehreren Halbleitermaterialien mit unterschiedlichen Bandabständen geschichteten Kanal. Auf ihre guten Höchsfrequenzeigenschaften weist auch die Bezeichnung *HEMT* (High Electron Mobility Transistor) hin.

Isolierschicht-Feldeffekttransistor

Das zur Stromsteuerung im n- bzw. p-Kanal erforderliche elektrische Feld bildet sich bei diesem FET-Typ über einer Schichtstruktur Metall-Gate-Kontakt/Isolator (z. B. Oxid) Semiconductor aus, woraus sich die Kurzbezeichnung *MISFET* bzw. *MOSFET* herleitet. Von den vielen Realisierungen hat der in einkristallinem Silizium hergestellte Typ mit einer Isolierschicht aus SiO_2 die größte praktische Bedeutung erlangt. Er wird als diskretes Bauelement z. B. als *Leistungs-Schalttransistor* eingesetzt, überragende Bedeutung aber hat er als Komponente *integrierter Analog- und Digitalschaltungen* (Abschnitt 10.5.6).

Bild 10.48: Selbstsperrender MOS-FET in Planartechnik mit n-leitendem Kanal K (Inversionsschicht)
 I_S = Isolierschicht (meist SiO_2)
 ■ aufgedampftes Metall

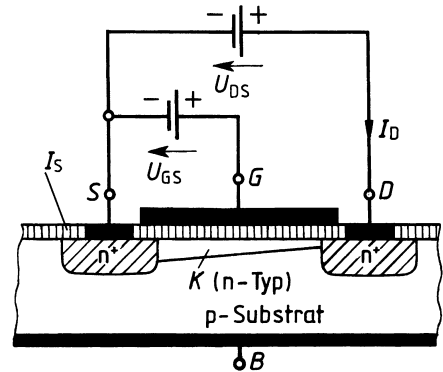


Bild 10.48 zeigt den Aufbau eines MOSFET mit n-leitendem Kanal in Planartechnik. In das einkristalline p-leitende Substrat sind stark n-leitende Source- und Drain-Zonen eindotiert, die über sperrschichtfreie Kontakte zu den Anschlüssen S und D geführt sind. Außerhalb dieser Kontaktflächen ist die Halbleiteroberfläche mit einer isolierenden SiO_2 -Schicht abgedeckt, welche die Transistorstruktur vor Umwelteinflüssen schützt. Zwischen S und D ist die metallische Steuerelektrode G auf die Oxidschicht aufgebracht. Auf der Unterseite ist das Substrat über einen sperrschichtfreien Kontakt mit dem Bulk-Anschluss B versehen, der in den meisten Fällen mit S verbunden ist.

Bei dem in Bild 10.48 dargestellten n-Kanal-Transistor hat die Gate-Elektrode gegenüber der Source-Elektrode eine so große positive Spannung, dass (unterhalb des Oxids) durch *Influenzwirkung* so viele Elektronen aus dem Substrat angezogen worden sind, dass in einer dünnen Schicht dieses Halbleiters der p-Typ in n-Typ umgeschlagen ist. Durch diese *Inversionsschicht* ist ein n-leitender Kanal K zwischen den n-Typ Inseln S und D entstanden. Durch diesen kann bei Anlegen der Spannung $U_{DS} > 0$ der Drain-Strom I_D fließen.

Es hängt von der Beschaffenheit des Oxids und der Grenzfläche zwischen Oxid und Halbleiter ab, ob auch schon ohne angelegte Spannung U_{GS} ein *Inversionskanal* vorhanden ist oder nicht.

Im ersten Fall spricht man von einem *selbstleitenden* (oder *normally on*) MOSFET. Der Strom nimmt dann für $U_{GS} > 0$ zu, für $U_{GS} < 0$ ab (daher rührt die Bezeichnung *Verarmungstyp*), bis schließlich für eine bestimmte Spannung $U_{GS} = U_{th} < 0$ die Inversionsschicht verschwunden und der Strom I_D auf null abgefallen ist. U_{th} wird wie beim pn-FET als *Schwelspannung* bezeichnet.

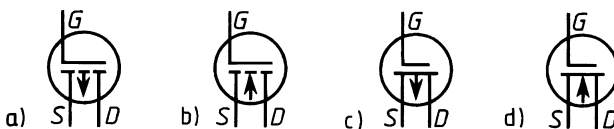
Im zweiten Fall spricht man von einem *selbstsperrenden* (oder *normally off*) MOSFET. Jetzt wird erst ab einer Spannung $U_{GS} = U_{th} > 0$ ein Inversionskanal gebildet (daher rührt die Bezeichnung *Anreicherungstyp*).

Beim pn-FET gibt es offenbar nur den *Verarmungstyp*; abgesehen davon stimmen die Kennlinienfelder beider FET-Typen weitgehend überein: Der Strom I_D wächst von $U_{DS} = 0$ aus zunächst proportional zu U_{DS} , da die Inversionsschicht eine nahezu konstante Dicke hat und der Kanal wie ein konstanter Ohmscher Widerstand wirkt. Der Proportionalitätsfaktor hängt von U_{GS} ab. Mit wachsendem U_{DS} macht sich die Verschmälerung der Inversionsschicht nach dem Drain zu bemerkbar, da dort die influenzierende Spannung $U_{GS} - U_D - U_{DS}$ kleiner als am Source-seitigen Ende ist ($U_{GS} - U_D$). Dadurch wächst der Widerstand der Inversionsschicht, wodurch der Strom I_D immer langsamer zunimmt. Schließlich tritt eine Sättigung des Stroms ein, wenn nämlich die Inversionsschicht am Drain-seitigen Ende abgeschnürt ist.

Da die Stromsteuerung beim MOSFET über eine Oxidschicht erfolgt, ist der Widerstand zwischen G und S noch höher als beim pn-FET (bis $10^{14} \Omega$). Die Steuerung ist ebenfalls praktisch leistungslos. Lediglich zur Aufladung der Gate-Kapazität von $0,2 \dots 0,5 \text{ pF}$ ist ein Strom erforderlich. Für p-Kanal-Typen ändern sich gegenüber dem n-Typ wie beim pn-FET die Vorzeichen von Strom und Spannung. Bild 10.49 zeigt die Schaltzeichen beider MOSFET-Typen (vgl. die entsprechenden Bilder 10.47 für pn-FETs). Der zu steuernde Kanal zwischen Source und Drain ist (als Symbol für die Isolatorschicht) vom Gate-Anschluss getrennt gezeichnet und wird beim selbstleitenden (-sperrenden) Typ durchgehend (unterbrochen) gezeichnet. Die Unterscheidung zwischen n- und p-Kanal-Typen erfolgt wie beim pn-FET durch einen Pfeil. Dieser deutet den möglichen Bulk-Anschluss an und zeigt beim n-Typ auf den Kanal hin, beim p-Typ von ihm weg.

Bild 10.49: Schaltzeichen des MOS-FET

- a) selbstsperrender MOS-FET mit p-Kanal
- b) selbstsperrender MOS-FET mit n-Kanal
- c) selbstleitender MOS-FET mit p-Kanal
- d) selbstleitender MOS-FET mit n-Kanal



Für die Anwendung im Hochfrequenzbereich, beispielsweise zur multiplikativen Mischung von zwei Hochfrequenzspannungen, werden häufig MOS-Feldeffekttransistoren eingesetzt, bei denen im Bereich des FET-Kanals zwei Gates angebracht sind. Der Drain-Strom kann bei diesem Doppel-Gate- (*dual gate*) MOSFET von zwei unabhängigen Spannungen gesteuert werden.

10.5.3.2 Bipolartransistoren

Bei diesen Halbleiterbauelementen wird – wie bei den Feldeffekttransistoren – der Stromfluss zwischen zwei Anschlüssen unterschiedlichen Potentials (A und E) durch eine Steuerelektrode St beeinflusst (Bild 10.44). Die Bipolartransistoren sind also wie die meisten Feldeffekttransistoren Dreipole und entsprechend einsetzbar, d. h. vorzugsweise als *Klein-* und *Großsignalverstärker* sowie als Schalter. Die gelegentlich benutzte Bezeichnung Injektionstransistor weist darauf hin, dass der Stromfluss hier, wie bei der pn-Diode, von Ladungen getragen wird, die aus einem p (n)- in ein n (p)-Gebiet injiziert werden, wobei sie ihren Charakter von Majoritäts- zu Minoritätsträgern ändern. Der Zusatz „Bipolar“ kennzeichnet die Tatsache, dass für die Wirkungsweise dieser Bauelemente beide Arten von Ladungsträgern (Elektronen und Defektelektronen) von Bedeutung sind, also die Majoritäts- und *Minoritätsträger*. Die letzteren sind *trotz ihrer geringen Anzahl für das Betriebsverhalten sogar quantitativ entscheidend*. Das hat wie bei der pn-Diode u. a. eine wesentlich stärkere Temperaturabhängigkeit der Strom-Spannungs-Charakteristiken als beim FET zur Folge.

nnp- und pnp-Typ

Ein Bipolartransistor besteht aus einer Folge von drei Halbleiterzonen aus (in der Regel) gleichem Grundmaterial, aber abwechselndem Leitungstyp, also nnp oder pnp, die jeweils mit einem Ohmschen Kontakt versehen sind (Bild 10.50).

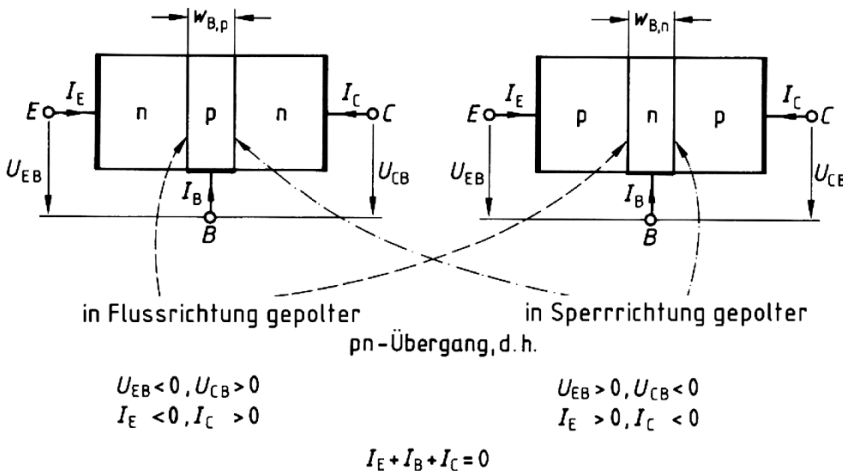


Bild 10.50: Prinzipskizze eines Bipolartransistors mit den Gleichspannungen für den aktivnormalen (Verstärker-)Betrieb

Der eine pn-Übergang (z. B. in Bild 10.50 der linke) ist in Flussrichtung gepolter, der andere in Sperrrichtung. Da die Mittelzone (bei Verwendung einheitlichen Grundmaterials) viel schwächer dotiert wird als äußeren Zonen, werden über den in Flussrichtung gepolten pn-Übergang überwiegend Elektronen bzw. Defektelektronen in die Mittelzone der Weite w_B injiziert. Bei Niederfrequenz-Einzeltransistoren beträgt w_B typisch etwa $10 \mu\text{m}$, bei Transistoren für das Mikrowellengebiet und Transistoren in höchstintegrierten Logikschaltungen einige 10 nm bis einige 100 nm. Auf dieser kurzen Strecke gehen von den injizierten Ladungsträgern nur wenige

durch Rekombination mit Majoritätsträgern verloren, sodass nahezu alle vom sperrgepolten pn-Übergang aufgesammelt werden.

Dieser Wirkungsweise entsprechend heißt die linke Zone *Emitter*, die rechte *Kollektor*, die Mittelzone wird *Basis* genannt. Die zugehörigen 3 Elektroden werden mit den Buchstaben E, B, C bezeichnet. Sie entsprechen den Elektroden Source, Gate und Drain beim FET (Bild 10.45).

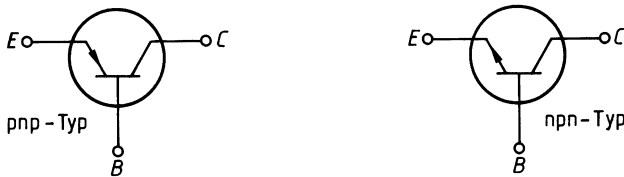


Bild 10.51: Schaltzeichen für Bipolartransistoren

Die Schaltzeichen für Bipolartransistoren sind in Bild 10.51 dargestellt. Der Pfeil am Emitter gibt jeweils die Richtung des elektrischen Stroms an, der über den in Flussrichtung gepolten pn-Übergang als Folge der injizierten Ladungsträger fließt. Die Pfeilrichtung ist gleich (entgegengesetzt) der Bewegungsrichtung der injizierten Defektelektronen (Elektronen). Die angegebene Umrahmung wird in einem Schaltplan nur eingezeichnet, wenn die Übersichtlichkeit dadurch erhöht wird. Bei integrierten Schaltungen wird sie prinzipiell weggelassen, um anzudeuten, dass es sich dort nicht um diskrete Halbleiterbauelemente handelt. Auch die Elektrodenkennzeichnung E, B, C kann weggelassen werden, da die Charakterisierung durch den Pfeil ausreicht.

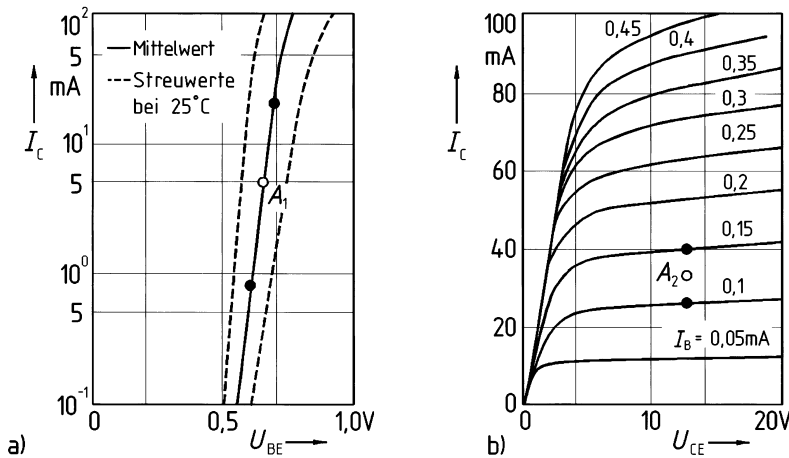


Bild 10.52: Steuerkennlinie $I_C(U_{BE})_{U_{CE}=\text{const}}$ (a) und Ausgangs-Kennlinienfeld $I_C(U_{CE})_{I_B=\text{const}}$ (b) eines typischen Si-Niederfrequenz-Transistors

Die Kennlinien der Bipolartransistoren (Bild 10.52) sind stark temperaturabhängig, da ihre Funktionsweise entscheidend von den Minoritätsträgern abhängt, deren Konzentration sich mit der Temperatur stark verändert.

IGBTs

Der IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*) ist eine monolithisch integrierte Kombination aus einem Leistungs-MOSFET und einem Bipolartransistor mit der Struktur einer Darlington-Schaltung. Er kombiniert die Vorteile beider Komponenten: geringe Ansteuerleistung und elektrische Robustheit von MOSFETs mit dem geringen Einschaltwiderstand von Bipolartransistoren. IGBTs spielen in der Leistungselektronik als schnelle Schalter, z. B. in Wechselrichtern und Frequenzumrichtern, eine große Rolle, da sie für Sperrspannungen bis zu einigen kV und Ströme bis zu einigen kA erhältlich sind. *IGBT-Module* enthalten auf einem Chip eine Parallelschaltung von Tausenden von Einzel-IGBTs.

10.5.4 Thyristoren

Ein Thyristor ist ein bistabiles Halbleiter-Bauelement mit mindestens drei Zonenübergängen (von denen einer durch einen geeigneten Metall-Halbleiterkontakt ersetzt sein kann), das von einem Sperrzustand zu einem Durchlass-Zustand (oder umgekehrt) umgeschaltet werden kann. Je nachdem ob zwei, drei oder alle vier Halbleiterzonen mit Anschlüssen versehen sind, unterscheidet man Vierschicht-Dioden, -Trioden und -Tetroden.

10.5.4.1 Thyristor-Dioden

Der Aufbau einer (rückwärtssperrenden) *Thyristor-Diode* und ihr Schaltzeichen sind in Bild 10.53a dargestellt.

Ihre Kennlinie $I_A(U_A)$ in Bild 10.53b kommt folgendermaßen zustande: Im *negativen Sperrbereich* ($U_A < 0$) sind die beiden äußeren pn-Übergänge in Sperrrichtung gepolt, der mittlere in Flussrichtung. Daher verhält sich die Thyristor-Diode wie eine konventionelle Gleichrichterdiode im Sperrbereich (vgl. Bild 10.36). Im *positiven Sperrbereich* $0 < U_A < U_{(BO)}$ sind die beiden äußeren pn-Übergänge in Flussrichtung gepolt, der mittlere in Sperrrichtung. Die Thyristor-Diode verhält sich also wieder wie eine sperrgepolte konventionelle Gleichrichterdiode. Mit zunehmender Spannung $U_A > 0$ setzt in dem zunehmend in Sperrrichtung gepolten Übergang 2 – 3 Ladungsträger-Multiplikation ein (Zener-Strom, Abschnitt 10.5.2.1), die einen Stromanstieg und damit eine Zunahme der Stromverstärkungsfaktoren der „Transistoren“ 1 – 2 – 3 bzw. 2 – 3 – 4 zur Folge hat. Dadurch kann der Strom ohne Multiplikationseffekt aufrecht erhalten werden, d. h. bei Spannungen $U_A \ll U_{(BO)}$. Die beiden äußeren pn-Übergänge wirken dabei als Emitter, die mittlere Sperrschicht wird mit Ladungsträgern überschwemmt und die Spannung an der Thyristor-Diode bricht auf einen sehr kleinen Wert zusammen (ca. 1 V).

Der bei $U_{(BO)}$ einsetzende Übergang vom Bereich 2 in den Bereich 3 (fallende Strom-Spannungskennlinie) wird als *Zünden* bezeichnet (in Anlehnung an Gasentladungsröhren, Abschnitt 10.2.3), mitunter auch als *Durchschalten*. $U_{(BO)}$ (einige 10 V bis einige wenige 100 V) heißt *Nullkippspannung* (Index BO von engl. break over).

Im anschließenden *Durchlassbereich* ist der Übergang 2 – 3 infolge der Ladungsträgerüberschwemmung ebenfalls in Durchlassrichtung gepolt und die Vierschichtdiode verhält sich wie eine konventionelle Gleichrichterdiode in Durchlassrichtung.

Das Zurückschalten in den sperrenden Zustand (*Löschen*) geschieht durch Absenken des Stroms unter den *Haltestrom* I_H (1 ... 100 mA).

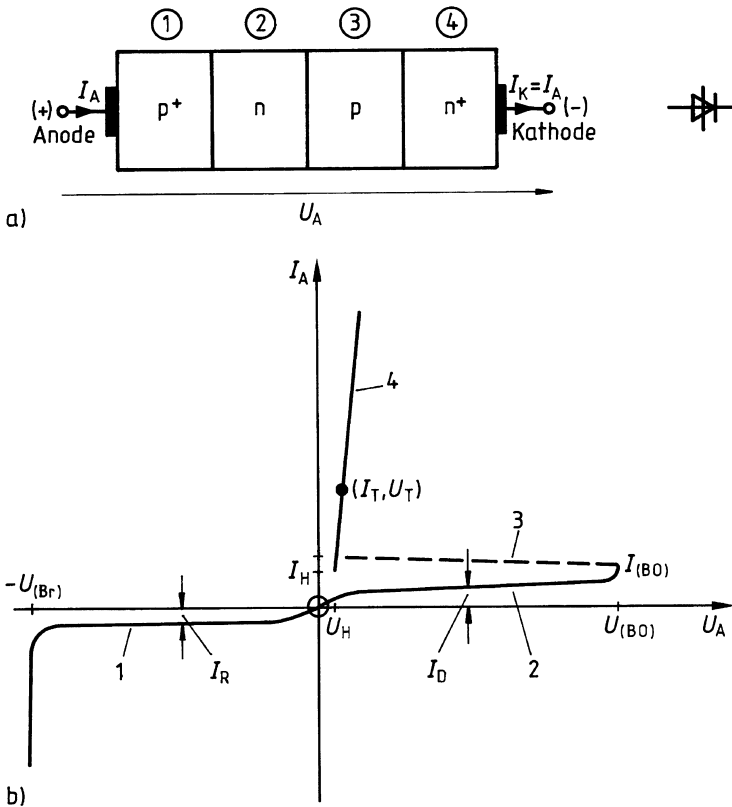


Bild 10.53: Rückwärtssperrende Thyristor-Diode a) Aufbau (schematisch) und Schaltzeichen b) Strom-Spannungs-Kennlinie, schematisch

- 1 Sperrkennlinie in Rückwärtsrichtung
- 2 Sperrkennlinie in Vorwärtsrichtung
- 3 Fallende Kennlinie (vereinfacht)
- 4 Durchlasskennlinie in Vorwärtsrichtung

Beispielhafte Zahlenwerte:

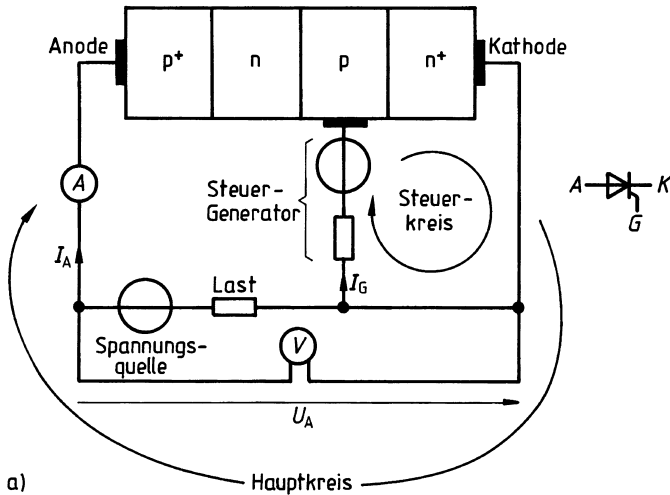
$$U_{(BO)} = 200 \text{ V}, U_{BR} = U_{(BO)}, I_D = \text{einige } \mu\text{A}, U_H < 1 \text{ V}, I_H = \text{einige mA}$$

Die *Kippdiode* kann z. B. zur Stellung des Phasenwinkels in einer *Phasenanschnitt-Schaltung* eingesetzt werden. Durch Antiparallelschaltung zweier Kippdioden kann für beide Stromrichtungen eine Schaltcharakteristik erreicht werden (*Diode for Alternating Current, DIAC*). Diese Bauteile werden vor allem zum Zünden von TRIACs verwendet (Abschnitt 10.5.4.3).

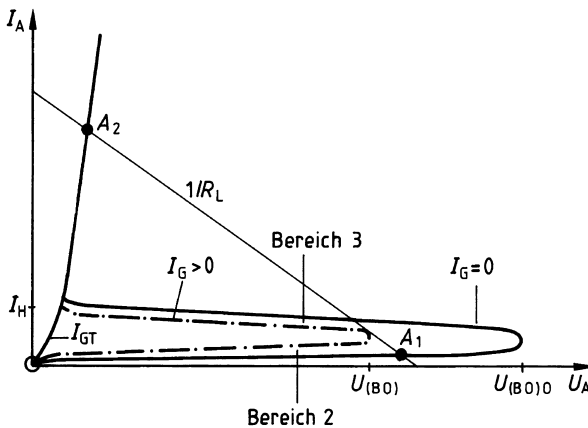
10.5.4.2 Thyristor

Wenn man von „dem Thyristor“ spricht, meint man speziell die *rückwärtssperrende Thyristor-Triode*. Der Thyristor hat heute in der Leistungselektronik eine ebenso große Bedeutung wie der Transistor in der Nachrichtentechnik. Seine Anwendungsgebiete sind das Schalten, Steuern und Umformen großer elektrischer Leistungen. In Anlagen zur Übertragung elektrischer Energie

mittels höchster Gleichspannungen (HGÜ = Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung, engl. HVDC = High Voltage Direct Current) werden Thyristoren mit Sperrspannungen von bis zu 10 kV und für Stoßströme von bis zu 100 kA eingesetzt. Diese Thyristoren haben meist Scheibenform. Ihr Durchmesser kann größer als 15 cm sein.



a)



b)

Bild 10.54: Thyristor

- a) Aufbau (schematisch), Grundstromkreis und Schaltzeichen
b) Strom-Spannungs-Kennlinie und Schaltverhalten

Bild 10.54a zeigt schematisch den Aufbau und die Grundschaltung eines Thyristors mit kathodenseitiger Steuerelektrode G sowie sein Schaltungssymbol. Die Kennlinie $I_A(U_A)$ zeigt Bild 10.54b. Ohne Steuerstrom ($I_G = 0$) zündet die Triode – wie eine Diode – bei $U_{(BO)0}$. Durch einen Strom I_G kann die Kippspannung auf Werte $U_{(BO)} < U_{(BO)0}$ reduziert werden, da dieser einen Teil des zur Zündung erforderlichen „Zener-Stroms“ ersetzt. Bei hinreichend großem Gate-Strom ($I_G \geq I_{GT}$) ist die Sperrwirkung ganz verschwunden.

Zum *Auslösen des Zündvorgangs* wird dem Thyristor ein kurzer Steuerstromimpuls zugeführt, sodass die Kennlinie im Übergangsbereich zwischen den Bereichen 2 und 3 links von der Arbeitsgeraden zu liegen kommt (strichpunktierte Kurve in Bild 10.54b); dann springt der Arbeitspunkt von A_1 nach A_2 . Bei Thyristoren für höchste Spannungen erfolgt die Zündung kontaktlos mittels eines Laserimpulses, der über einen Lichtwellenleiter an das Gate geführt wird (engl. LTT = Light Triggered Thyristor).

Die zum Löschen erforderliche Unterschreitung des Haltestroms I_H kann entweder durch einen Hilfsstrom im Anodenkreis oder (bei Wechselspannungsbetrieb) automatisch durch den Nulldurchgang des Anodenstroms bewirkt werden (Abschnitt 10.5.4.3). Die Sperrfähigkeit des Thyristors setzt allerdings erst später wieder ein, wenn die in den Halbleiterzonen gespeicherten Ladungsträgerkonzentrationen weitgehend abgebaut sind. Die Zeit vom Nulldurchgang des Anodenstroms von der Vorwärts- zur Rückwärtsrichtung bis zur frühestmöglichen Wiederkehr positiver (Sperr-)Spannung heißt *Freiwerdezeit* t_q . Sie bestimmt die obere Frequenzgrenze bei Thyristoranwendungen.

Thyristoren können wegen ihrer kurzen Freiwerdezeit auch in Gleichstrom-Verbraucherkreisen durch kurze, dem Arbeitsstrom entgegengesetzt gerichtete Stromimpulse gelöscht werden, die durch Entladung eines Kondensators erzeugt werden. Auf diesem Prinzip beruht die Steuerung von modernen Computerblitzgeräten für die Fotografie.

10.5.4.3 Vom Thyristor abgeleitete Bauelemente

Gate-Turn-Off Thyristor (GTO)

GTOs sind Thyristoren, die über den Gate-Anschluss nicht nur eingeschaltet, sondern mit einem Steuerimpuls entgegengesetzter Polarität auch abgeschaltet werden können. Obwohl diese Löschmethode im Prinzip für jeden Thyristor gilt, ist sie aus technologischen Gründen lange Zeit auf Typen mit Abschaltströmen unter 1 A beschränkt geblieben.

Inzwischen gibt es GTO-Typen für Abschaltströme bis über 2 kA und Sperrspannungen von einigen kV. Die Abschaltzeiten liegen bei einigen 10 μ s.

Hauptanwendungsbereiche für GTOs sind *Frequenzumrichter* für Wechsel- und Drehstrommotoren (z. B. für Stell- und Regelantriebe) sowie unterbrechungsfreie Stromversorgungen und Schaltnetzteile.

Integrated Gate-Commutated Thyristor (IGCT)

Der IGCT ist eine Weiterentwicklung des GTO. Er zeichnet sich u. a. durch einfachere Ansteuerung, weniger erforderliche Schutzschaltung, höhere mögliche Schaltfrequenzen und geringere Schaltverluste aus. IGCTs erfordern große Steuerströme mit hohem di_G/dt . Um dies zu erreichen, muss der Steuerstromkreis sehr induktivitätsarm aufgebaut sein.

TRIAC

Als TRIAC (Triode for Alternating Current) werden bidirektionale Thyristoren bezeichnet. Sie sind von besonderer praktischer Bedeutung für das Schalten von Wechselstrom, da sie auch bei Umkehren der Stromrichtung von einer einzigen Steuerelektrode aus geschaltet werden können. Sie bestehen im Prinzip nach Bild 10.55a aus zwei zwischen den Anschlussklemmen A_1 und A_2 (Hauptanschlüsse) entgegengesetzt parallelgeschalteten pnpn-Thyristoren mit einer gemeinsamen Steuerelektrode G.

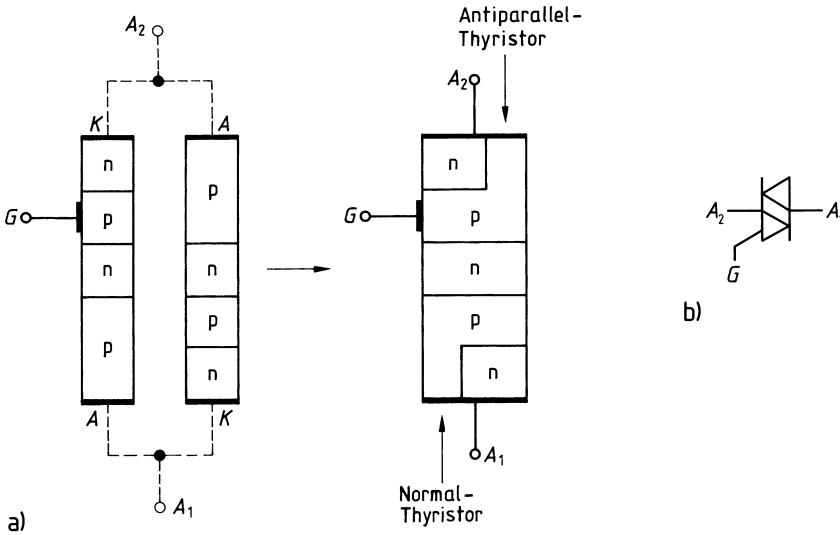


Bild 10.55: TRIAC Aufbau (a) eines TRIAC aus zwei antiparallelen pnpn-Strukturen mit gemeinsamem Gate (schematisch) und Schaltzeichen (b)

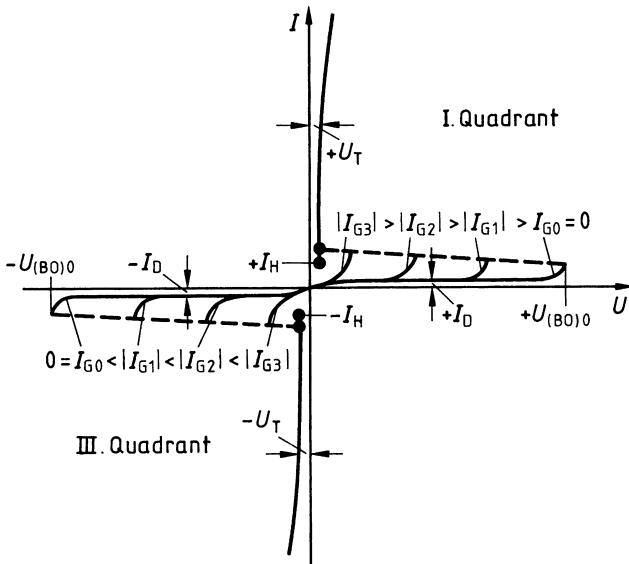


Bild 10.56: Kennlinienfeld $I(U)$ des TRIAC mit dem Gate-Strom I_G als Parameter. $U_{(BO)0}$ Nullkippspannung bei $I_G = I_{G0} = 0$, U_T = Durchlassspannung, I_D = Sperrstrom

Bild 10.55b zeigt das Schaltzeichen des TRIAC, Bild 10.56 das Strom-Spannungs-Kennlinienfeld $I(U)$ mit dem Gate-Strom I_G als Parameter. In Erweiterung von Bild 10.54b ist jetzt im ersten und dritten Quadranten Schaltverhalten möglich.

Als niedrigster Durchlassstromwert, bei dem der niederohmige Zustand noch aufrechterhalten bleibt, ist wieder der *Haltestrom* I_H definiert. Solange er nicht unterschritten wird, bleibt der TRIAC in der Richtung durchlässig, in der er, ausgehend von einem Arbeitspunkt auf den Sperrkennlinien im negativen oder im positiven Spannungsbereich, durch einen Steuerstrom I_G beliebiger Richtung (Zündimpuls) geschaltet worden ist. Spannungen bis zu 1000 V und Ströme bis 100 A können geschaltet werden.

Der TRIAC findet verbreitete Anwendung in *Phasenanschnitt-Schaltungen* für Wechselströme zum Einstellen der Wirkleistungsabgabe an Wechselstromverbraucher (*Dimmer*). Zur Zündung werden DIACs werden (Abschnitt 10.5.4.1).

10.5.5 Stromleitung bei Lichteinwirkung

10.5.5.1 Lichtdetektoren

Wenn die Lichtabsorption in Halbleitern und die dadurch bewirkte Freisetzung von Ladungsträgern in der Raumladungszone eines pn-Übergangs erfolgt, spricht man vom *Sperrschicht-Photoeffekt*.

Dieser wird in der *Photodiode* und im *Photoelement* genutzt. Die (quasi-)freien Elektronen (Defektelektronen) werden durch das in der Raumladungszone herrschende elektrische Feld in das Innere des n- (p-)Gebiets getrieben (Bild 10.57a, vgl. Bild 10.30d) und erzeugen einen zusätzlichen Strom I_{Ph} in Sperrrichtung, der zur *Lichtleistung* P proportional ist. Die Charakteristik $I(U)$ lautet also – bei Vernachlässigung der Bahnwiderstände – (vgl. Gl. (10.71))

$$I = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) - I_{Ph} \quad (10.78)$$

Das Kennlinienfeld $I(U)$ mit dem *Photostrom* I_{Ph} als Parameter ist in Bild 10.57b dargestellt.

Photodioden

In der Schaltung nach Bild 10.57c wird bei der Lichtleistung P_1 durch die Betriebsspannung $U_B < 0$ und den Lastwiderstand R der Arbeitspunkt A_1 festgelegt. Die Photodiode stellt in diesem Arbeitspunkt einen Gleichstromwiderstand der Größe

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_1}{-(I_S + I_{Ph,1})} \approx \frac{U_1}{-I_{Ph,1}} > 0$$

dar. Bei dieser Betriebsart spricht man von einer *Photodiode*. Die Stromausbeute einer Photodiode lässt sich wesentlich dadurch steigern, dass anstelle eines einfachen pn-Übergangs eine Struktur $n^+p\pi p^+$ (π = schwach p-dotiertes Gebiet) verwendet wird, wobei der n^+p -Übergang im Bereich des Lawinen-Durchbruchs betrieben wird. Derartige *Avalanche-Photodioden* (APD) werden in der optischen Nachrichtentechnik zur Optimierung der Systemempfindlichkeit eingesetzt.

Photoelemente

Wenn die Schaltung ohne Spannungsquelle betrieben wird (Bild 10.57d), stellt sich (bei derselben Lichtleistung) der Arbeitspunkt A_2 ein. Da in diesem Punkt bei Verbraucher-Zählpeilsystem Strom und Spannung an der Photodiode entgegengesetztes Vorzeichen haben, ist das

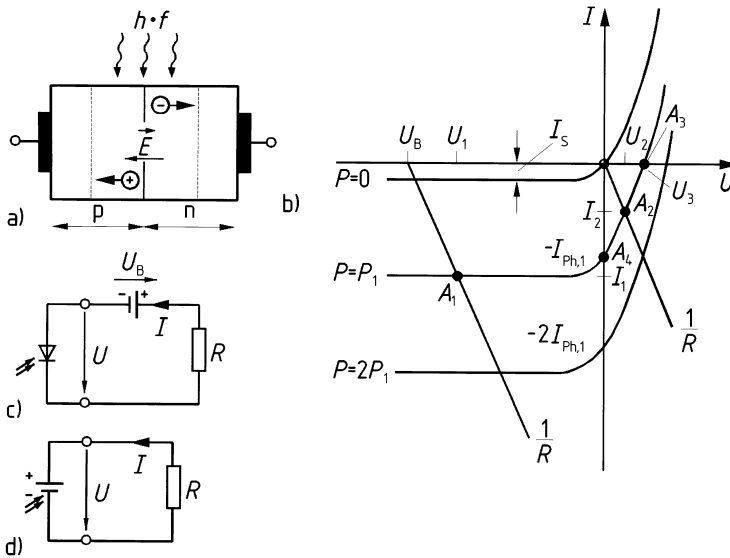


Bild 10.57: Zum Sperrschicht-Photoeffekt

- Trennung der durch Lichteinfall erzeugten Elektron-Loch-Paare
- Strom-Spannungs-Kennlinienfeld $I(U)$ einer beleuchteten pn-Diode mit Lichtleistung P als Parameter
- Betrieb als Photodiode
- Betrieb als Photoelement

Produkt $U_2 \cdot I_2 < 0$, d. h. die mit Licht bestrahlte Diode gibt an den Lastwiderstand R elektrische Leistung ab: Die Photodiode arbeitet als *Photoelement*.

Für sehr große Werte des Lastwiderstandes $R \rightarrow \infty$ liefert das Photoelement die Leerlaufspannung U_3 (Arbeitspunkt A_3), d. h. nach Gl. (10.78) $U_3 = U_T \ln(1 + I_{Ph,1}/I_S) \approx U_T \ln I_{Ph,1}/I_S$ (z. B. 0,5 V). Für Werte $R \rightarrow 0$ (Arbeitspunkt A_4) fließt durch das Photoelement der Kurzschlussstrom $I_k = -I_{Ph,1}$ (z. B. 5 mA). Da in diesen beiden Grenzfällen keine Wirkleistung an den Lastwiderstand abgegeben wird, gibt es dazwischen einen optimalen Widerstand R_{opt} , für den die abgegebene Leistung maximal ist. In diesem Zustand unterscheiden sich die Steigungen der Arbeitsgeraden und der Tangente im Arbeitspunkt lediglich im Vorzeichen.

Solarzellen

Speziell für das Sonnenlicht ausgelegte Photoelemente werden als *Solarzellen* bezeichnet [Wag10]. Als Halbleiter wird aus technologischen Gründen und hinsichtlich der spektralen Empfindlichkeit bevorzugt kristallines Silizium verwendet, womit sich ein Wirkungsgrad der Energieumwandlung von ca. 10 % (bei polykristallinem Si) bis über 20 % (bei monokristallinem Si) erreichen lässt. Solarzellen liefern Leerlaufspannungen von 0,5 ... 0,6 V sowie – je nach Größe – Kurzschlussströme von wenigen mA bis zu etlichen A. Gruppenweise zusammengefasste Solarzellen werden als *Solarmodule* zur Stromversorgung eingesetzt, und zwar sowohl in terrestrischen Projekten als auch im Weltall. So liefern z. B. Solarzellen bei der Internationalen Raumstation (International Space Station, ISS) eine Leistung von über 100 kW. Solarzellen aus dem (viel bil-

ligeren und hinsichtlich des Wirkungsgrades erheblich schlechteren) amorphen Si haben starken Eingang gefunden in Produkte der *Konsumelektronik* wie Uhren, Taschenrechner etc.

Photo-Transistoren

Größere Photoströme als die Photodioden liefern Photo-Transistoren. Beim *Photo-Bipolartransistor* wird der Basis-Kollektor-Übergang als Photodiode ausgeführt. Er liefert den „Basisstrom“, der den um den Faktor der Stromverstärkung größeren Kollektorstrom steuert. Die Grenzfrequenz liegt im Bereich 10 bis einige 100 kHz. Beim *Photo-pn-FET* wird die Strecke Gate-Kanal als Photodiode ausgelegt. Beim *Photo-MOSFET* beeinflusst der innere Photoeffekt sowohl die Kanalleitfähigkeit als auch die Sperrschichtweite unter dem Kanal und damit die Schwellspannung.

Photo-Thyristoren

Photo-Thyristoren sind rückwärtssperrende Thyristortrioden (oder -tetroden). Durch die bei Lichteinfall erhöhte Trägerdichte in den beiden Mittelgebieten wird die Zündung eingeleitet. Das Löschen erfolgt durch Abschalten der Anodenspannung.

10.5.5.2 Lichtemitter

Beim Übergang eines (quasi-)freien Ladungsträgers in einen gebundenen Zustand kann elektromagnetische Strahlung abgegeben werden. Dieser *inverse innere Photoeffekt* wird in *Photoemittern* (Lichtemittern, Photosendern) genutzt. Hierunter versteht man pn-Dioden, die elektrischen Strom in Licht umwandeln. Dies geschieht dadurch, dass die Diode in Flussrichtung oberhalb der Diffusionsspannung (Bilder 10.30e, g) betrieben wird. Dann findet eine kräftige Injektion von Minoritätsträgern statt, wodurch die Zahl der Rekombinationsprozesse und damit die Erzeugung elektromagnetischer Strahlung stark erhöht wird.

LEDs

Da diese Rekombinationsprozesse spontan stattfinden, hat die erzeugte (Lumineszenz-) Strahlung stochastischen Charakter (Rauschen), sie ist *inkohärent*. Die ein solches Licht emittierende Diode (Light Emitting Diode) wird *Lumineszenzdiode* genannt (abgekürzt LED bzw. IRED, sofern das Licht im Sichtbaren bzw. im Infraroten liegt). Die räumliche Verteilung der emittierten Strahlung einer LED mit ebener Lichtaustrittsfläche gehorcht dem *Lambertschen Kosinusetz*. Durch geeignete Formgebung des die Diode einbettenden Kunststoffes oder durch zusätzliche Linsen lässt sich eine Vielzahl von Strahlungs-Charakteristiken erzeugen.

Klassische Anwendungsbereiche für LEDs sind Ziffern- und Buchstabendisplays, lineare LED-Arrays als Skala zur Analoganzeige von Betriebswerten etc., LED-Bildschirme als Hinweistafeln sowie als elektronische Leinwände bei Großveranstaltungen. Da LEDs mit sehr hoher Lichtausbeute sehr günstig in Großserie gefertigt werden, haben sie sowohl die Glühlampen als auch die Kompakt-Leuchtstofflampen weitgehend abgelöst. Das gilt sowohl für stationäre (Raum- und Objektbeleuchtung) als auch für mobile (Fahrzeugbeleuchtung) Anwendungen.

Bei Herstellung aus Gallium-Arsenid-Phosphid GaAsP ergibt sich je nach dem Phosphorgehalt rotes, bernsteinfarbenes oder grünes Licht (mit den Wellenlängen 690, 610, 550 nm). Eine LED mit n-GaP-Mittelschicht zwischen zwei angrenzenden p-GaP Zonen liefert bei getrennter Ansteuerung über einen gemeinsamen Kontakt auf der Mittelschicht grünes (rotes) Licht bei Ansteuerung der mit Stickstoff (ZnO) dotierten p-Zone. Bei gleichzeitiger Ansteuerung beider pn-Übergänge wird gelbes Licht emittiert. Aus Siliziumcarbid (SiC) oder einer Kombination

aus Indiumgalliumnitrid (InGaN) und Galliumnitrid (GaN) lassen sich blau leuchtende LEDs herstellen. Durch geeignete Kombination mehrerer verschiedenfarbiger LEDs lässt sich der Eindruck von weißem Licht erzeugen.

Für den speziellen Einsatz als *Sendeelemente in der optischen Nachrichtentechnik* [VP02] sind die Wellenlängenbereiche um $0,85\ \mu\text{m}$ (erstes relatives Dämpfungsminimum der als Übertragungsmedium benutzten Glasfaser), $1,3\ \mu\text{m}$ (drittes relatives Dämpfungsminimum bei gleichzeitig verschwindender Dispersion) und $1,55\ \mu\text{m}$ (absolutes Dämpfungsminimum) von Interesse. Als Halbleitermaterial wird im ersten Bereich GaAs und AlGaAs verwendet, im zweiten und dritten Bereich InGaAsP mit unterschiedlicher Zusammensetzung. Sofern dabei die aktive Schicht zwischen Halbleiterschichten mit unterschiedlichen Bandabständen eingebettet ist, spricht man von *Heterostrukturen*. Diese bewirken eine bessere räumliche Konzentration der emittierten Strahlung, was besonders wichtig ist für deren Einkopplung in eine Glasfaser. LEDs können bis zu Frequenzen von typisch einigen 100 MHz (über den Strom) moduliert werden.

Laser-Dioden

Laser-Dioden emittieren im Gegensatz zur Strahlung von Lumineszenzdioden *kohärentes Licht*, welches wesentlich spektralreiner ist (vergleichbar mit der Schwingung eines elektrischen Oszillators mit extrem hoher Güte). Das Kunstwort Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation weist darauf hin, dass die Wirkungsweise des Lasers auf der induzierten (= stimulierten) Emission beruht, die 1917 von Einstein theoretisch begründet worden ist: Dabei regt ein Photon aus einer den Halbleiter durchlaufenden Welle der Frequenz $f = W_G/h$ ein Elektron im Leitungsband zum Übergang in das Valenzband an. Das dabei emittierte Photon besitzt die gleiche Frequenz wie das primäre und – bei Betrachtung im Wellenbild – dieselbe Phase, es ist also *kohärent*. Sofern die induzierten Emissionsprozesse häufiger stattfinden als die außerdem ablaufenden Absorptionsprozesse, kommt es zu einer Netto-Photonenvermehrung. Hierzu ist es erforderlich, dass wenigstens eine der beiden Halbleiterzonen so hoch dotiert ist, dass dort *Entartung* vorliegt. Die Netto-Photonenvermehrung führt in Verbindung mit einer optischen Rückkopplung (Spiegelsystem) zur Selbsterregung, dem eigentlichen Laser-Betrieb.

Als Lasermaterialien für die optische Nachrichtentechnik (bei $1,3\ \mu\text{m}$ und $1,5\ \mu\text{m}$) werden ternäre und quaternäre Verbindungshalbleiter benutzt und die Dioden zur besseren Fokussierung der Strahlung als Heterostrukturen ausgeführt. Laserdioden können bis zu Frequenzen von typisch einigen GHz (über den Strom) moduliert werden.

Die Eigenschaften der Laserstrahlung haben ihr zahlreiche weitere Anwendungsbereiche eröffnet: Hochauflösende Spektroskopie, Entfernungs- und Geschwindigkeits-Messung, Abtasten von Oberflächen zum Lesen oder Schreiben von Information (CDs, DVDs, BRDs). Die Dauerstrichleistung eines Dioden-Lasers lässt sich durch Vergrößerung der Spiegelfläche wesentlich über die in der optischen Nachrichtentechnik üblichen Werte steigern. So erreichen Laserarrays Dauerstrichleistungen von über 1 kW über eine Apertur von 1 cm. Das entspricht einer Leistungsdichte von $12,7 \cdot 10^6\ \text{W/m}^2$ (Sonnenlicht $100\ \text{W/m}^2$). Derartige Leistungsdichten finden Anwendung bei der Materialbearbeitung (Schweißen, Bohren, Laserabgleich von Widerständen), in der Medizin (z. B. Photostrahlungstherapie zur Krebsbekämpfung, „Laserskalpell“) und zu militärischen Zwecken (Laserwaffen).

10.5.5.3 Optoelektronische Koppler

Ein optoelektronischer Koppler (Optokoppler) besteht aus je einem Strahlungssender (LED, IRED) und einem der ausgesandten Strahlung angepassten Empfänger (Photo-Diode, -Transistor, -Thyristor), welche durch Glas, einen Lichtleiter oder Luft optisch verbunden und galvanisch getrennt sind.

Das in Prozent angegebene Verhältnis von Ausgangsstrom I_C des Strahlungsempfängers zu Eingangsstrom I_{Ph} des Strahlungssenders wird *Übertragungsverhältnis* genannt, der Zusammenhang $I_C(I_{Ph})$ heißt *Übertragungskennlinie*.

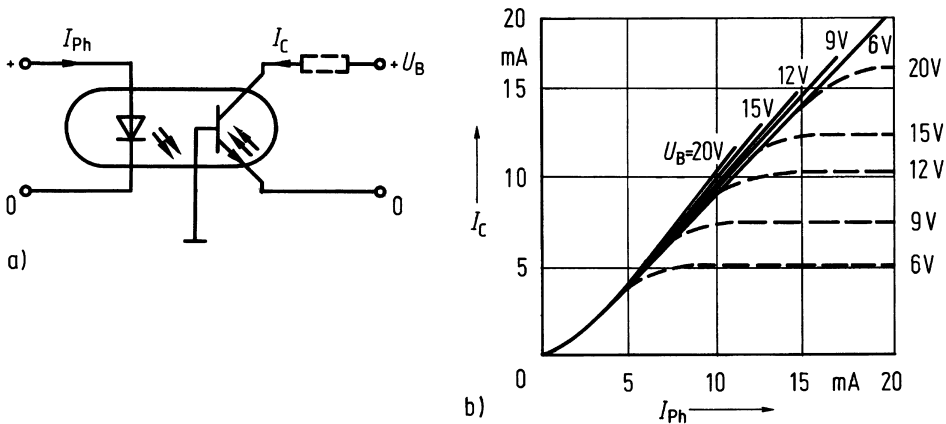


Bild 10.58: Optoelektronischer Koppler

a) Kombination LED/Phototransistor

b) Übertragungskennlinie $I_{Aus} = I_C(I_{Ph})$

(Gestrichelte Kurven beim Einschalten eines Widerstandes in die Kollektorleitung)

Bild 10.58a zeigt am Beispiel eines Optokopplers die schematisch angegebene Kombination LED/Photo-Bipolartransistor und Bild 10.58b den typischen Verlauf der Übertragungskennlinie für einige Betriebsspannungen U_B als Parameter. Wie durch den gestrichelt gezeichneten Kurvenverlauf angedeutet, geht der Kollektorstrom I_C schon frühzeitig in die Sättigung über, wenn ein Widerstand (beispielsweise $1\text{ k}\Omega$) in die Kollektorleitung des Phototransistors geschaltet wird. Optoelektronische Koppler ermöglichen eine Fülle von Anwendungen in der Analog- und Digital-Technik. Diese beruhen auf folgenden Eigenschaften:

- Die elektrische Isolation zwischen Eingangs- und Ausgangskreis (bis in den Hochspannungsbereich) erlaubt eine Signalübertragung zwischen zwei Kreisen auf unterschiedlichem Potenzial.
- Elektromagnetische Störfelder haben auf den Fluss der (ungeladenen) Photonen keine Wirkung.
- Das Signal wird nur in einer Richtung übertragen; Änderungen im Ausgangskreis wirken nicht auf den Eingangskreis zurück.

10.5.6 Integrierte Schaltungen

10.5.6.1 Allgemeine Gesichtspunkte

Unter einer *integrierten Schaltung* (*Integrated Circuit, IC*) versteht man eine Halbleiterschaltung, deren passive und aktive Komponenten (Widerstände, Kondensatoren, Dioden, Transistoren) und elektrische Verbindungen in einem Fertigungsprozess auf einem einzigen Halbleiterplättchen (Chip) realisiert werden. Die größte wirtschaftliche Bedeutung haben ICs aus Silizium, da dieses Material nicht nur eine relativ große Elektronenbeweglichkeit, eine gute Wärmeleitfähigkeit und eine gute Temperaturstabilität hat, sondern weil die einfach erzeugbaren Schichten aus *Siliziumdioxid* SiO_2 hervorragende Isolationseigenschaften aufweisen. Für sehr schnelle ICs werden auch andere Dielektrika mit kleinerer Permittivität (englisch: low k) eingesetzt, durch die die *parasitären Kapazitäten* zwischen den Verbindungsleitungen oberhalb des Siliziums verringert werden. Die ausgereifteste Fertigungstechnik ist die *monolithische Planartechnik*, bei der die ursprüngliche Si-Oberfläche im Wesentlichen erhalten bleibt und sich darunter, geschützt durch die SiO_2 -Schicht, die für die Funktion der Schaltung wesentlichen Bereiche befinden.

Die Ziele der Integration sind die *Erhöhung der Zuverlässigkeit* durch

- gleichzeitige Herstellung einer großen Zahl identischer Schaltungen (einige 100 ... 10000 Chips pro Halbleiterscheibe (*Wafer*) unter gleichen technologischen Bedingungen,
- Reduzierung der Anzahl der Löt- und Steck-Verbindungen zwischen den Bauelementen einer Schaltung

und die *Miniaturisierung* der Schaltungen durch Verkleinern der Abmessungen und des Gewichtes. Dadurch werden u. a. die Arbeitsgeschwindigkeit erhöht und die Kosten gesenkt.

Die Entwicklung der minimalen lateralen Abmessungen δ und der Chip-Fläche A_C geht aus Tabelle 10.8 hervor. Die Größe δ entspricht etwa der *minimalen Gate-Länge* der FETs.

Tabelle 10.8: Zeitliche Entwicklung der minimalen lateralen Abmessungen δ und der maximalen Chip-Fläche A_C bei industriell gefertigten integrierten Schaltungen (bis 1995 aus [Mös92])

	$\delta/\mu\text{m}$	A_C/mm^2
1965	10	4
1975	5	25
1985	1	100
1995	0,4	400
2005	0,04	400
2015	0,01	400
2020	0,005	400

Sind mehr als 1000 Bauelemente auf einem Chip angeordnet, spricht man von Großintegration LSI (Large Scale Integration), von VLSI (Very Large Scale Integration) bei Schaltungen mit 10^4 ... 10^6 Bauelementen und ULSI (Ultra Large Scale Integration) bei über 10^6 Bauelementen.

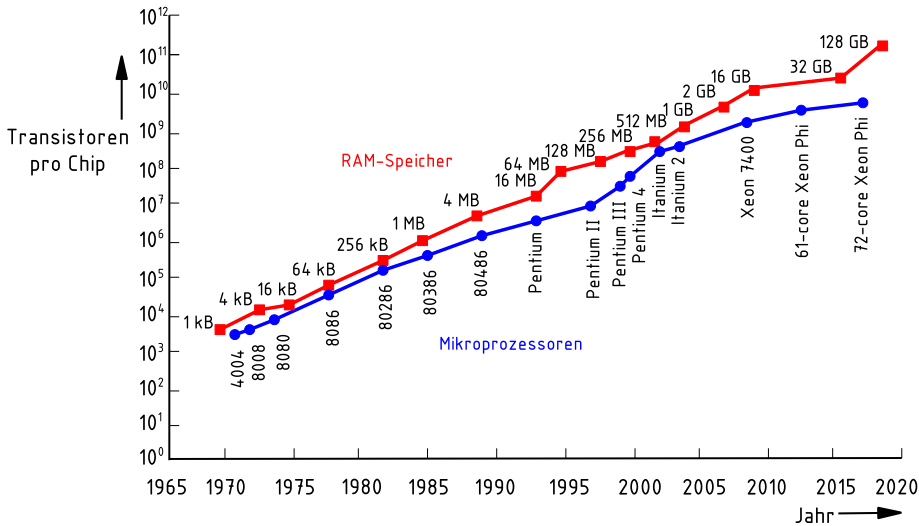


Bild 10.59: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der Funktionselemente pro integrierter Schaltung bei Mikroprozessoren und DRAM-Speicherchips (Quelle: Intel, Samsung)

Bild 10.59 gibt einen Überblick über die zeitliche Entwicklung des Integrationsgrades und der damit realisierten MOS-Schaltungen. Manche neuen Systemkonzepte, z. B. bei der digitalen Verarbeitung von Audio- und Videosignalen in Echtzeit, sind erst bei sehr hohem Integrationsgrad zu verwirklichen. Nicht nur Gatter oder Register werden als IC realisiert, sondern auch Mikroprozessoren, Halbleiterspeicher – insbesondere RAMs (Random Access Memory) – und zunehmend ganze Systeme auf einem Chip (System on Chip, SoC), die außer einer Energiequelle und Ein-/Ausgabemedien alle funktionalen Komponenten zur Bewältigung komplizierter Aufgaben enthalten, z. B. für Herzschrittmacher, Hörgeräte und „Single-Chip“-Mobiltelefone.

Demgegenüber werden bei III-V-Verbindungen, z. B. GaAs, wegen der komplexeren Technologie nur die Bereiche SSI (Small Scale Integration) mit weniger als 100 Bauelementen, z. B. für optoelektronische ICs, MSI (Medium Scale Integration) mit 100 ... 1000 Bauelementen und darüber Integrationsgrade bis etwa 10^5 Bauelementen realisiert.

10.5.6.2 Schaltungsfamilien

Die gewünschten Betriebseigenschaften integrierter Schaltungen erfordern unterschiedliche Herstellungsverfahren.

Bipolare Technologien

in bipolaren ICs werden Bipolartransistoren als aktive Bauelemente eingesetzt. Diese sind prinzipiell *stromgesteuert*.

Beispiele für analoge ICs sind Operations-, NF- und HF-Verstärker, komplette analoge Rundfunk- oder Fernsehempfangs-Schaltungen (Einchip-Empfänger), AD-Wandler, Phasenregelkreise (PLL = Phase Locked Loop) und Messschaltungen.

Da immer mehr ehemals analoge Schaltungskonzepte durch digitale Schaltungen mit AD- und DA-Wandlern ersetzt werden, gewinnen ICs, in denen sowohl analoge als auch digitale Signale verarbeitet werden (*Mixed Signal ICs*) stark an Bedeutung.

Auch für digitale ICs werden Bipolartransistoren eingesetzt. Man unterscheidet dabei folgende Schaltungskonzepte (*Schaltkreisfamilien*) [Mös92], [Sch90], [SS07]:

Bei den *TTL* (Transistor Transistor Logic)-*Schaltungen* wird der Transistor bis in den Sättigungsbereich angesteuert. Vorteilhaft sind die geringen Signallaufzeiten durch ein logisches Gatter in der Größenordnung von 10 ns. Diese lassen sich durch eine zusätzliche Schottky-Diode parallel zum Kollektor-Basis-Übergang (Schottky-TTL) auf 3 ... 4 ns reduzieren, weil der überschüssige Basisstrom bei der Übersteuerung abgeleitet und so eine zusätzliche Ladungsträgerspeicherung im Transistor vermieden wird. Nachteilig ist die geringe Störsicherheit und der relativ große Stromverbrauch (typisch 10 mW). Obwohl in den letzten Jahrzehnten kontinuierlich neue TTL-Schaltkreisfamilien entwickelt wurden, die höhere Geschwindigkeit mit geringerem Stromverbrauch kombinieren, haben die TTL-ICs gegenüber den CMOS-ICs erheblich an Bedeutung eingebüßt.

(C)MOS-Technologien

Hier werden MOS-FETs zur Realisierung von Schaltungskonzepten eingesetzt [Gie02]. FETs sind prinzipiell *spannungsgesteuert*. Speziell in der Digitaltechnik haben MOS-Schaltungen die Bedeutung der bipolaren ICs wegen folgender Vorteile stark zurückgedrängt:

- Einfachere und kostengünstigere Fertigungstechnik. So entfällt z. B. der Prozessschritt zur gegenseitigen Isolierung der Bauelemente durch sog. *Wannen*, da die Source-, Gate- und Drain-Bereiche durch Raumladungszonen vom Substrat getrennt sind. Hierdurch wird eine große Packungsdichte erreicht, die logische Schaltungen mit mehreren 10^9 Transistoren pro Chip ermöglicht.
- Geringerer Platzbedarf pro Transistor bzw. Widerstand (der durch einen MOS-Transistor realisiert wird).
- Größere Flexibilität der Schaltungstechnik durch Einsatz von n- bzw. p-Kanal Verarmungs- und Anreicherungsstypen.

Der Leistungsbedarf beträgt maximal einige mW, die Signallaufzeiten betragen typisch ca. 15 (100) ns bei einfachen Gattern aus n (p)-Typ MOSFETs.

Den geringsten Leistungsbedarf haben integrierte Schaltungen in der *CMOS-Technologie* (Complementary MOS), bei der p- und n-Kanal-MOSFETs auf einem einzigen Substrat nebeneinander angeordnet sind. Die Reihenschaltung eines leitenden und eines gesperrten MOSFET ergibt minimalen *Ruhestrom* (der sich bei ULSI-Schaltungen allerdings zu etlichen Ampere pro Chip summieren kann). CMOS-Schaltungen sind außerdem störsicher und benötigen nur sehr geringe Leistungen, die linear mit der Betriebsfrequenz ansteigen.

Als Nachteil der CMOS-Technik sind der prinzipiell größere Flächenbedarf gegenüber einfachen MOS-Technologien und die gegenüber bipolaren Technologien prinzipiell längere Signallaufzeit zu nennen. Allerdings haben die enormen Fortschritte in der Fertigungstechnologie dazu geführt, dass hochintegrierte Logik-ICs (z. B. Mikroprozessoren) mit Betriebsfrequenzen von einigen GHz als Massenprodukte preiswert erhältlich sind.

Bei MOS-Transistoren ist die isolierende Oxidschicht zwischen Gate und Substrat zwar extrem hochohmig, aber auch sehr dünn ($0,1\ \mu\text{m}$ bis herunter zu einigen nm). Daher führt bereits eine Gate-Substrat-Spannung von $50\ \text{V}$ zu einer Feldstärke von mindestens $500\ \text{V}/\mu\text{m}$ und damit zum *Durchbruch*, der den Transistor zerstört. Spannungen dieser Größe können leicht infolge statischer Aufladung (Electrostatic Discharge, ESD) entstehen. Als Gegenmaßnahme werden zwischen die von außen zugänglichen Anschlusspunkte Schutzdioden oder komplexere *ESD-Schutzschaltungen* eingesetzt, die ggf. Überspannungen ableiten.

Literaturverzeichnis

- [BDHG06] BRAUCH, Wolfgang ; DREYER, Hans-Joachim ; HAACKE, Wolfhart ; GENTZSCH, Wolfgang: *Mathematik für Ingenieure*. 11. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2006
- [Bee08] BEETZ, Bernhard: *Elektroniksimulation mit PSPICE*. 3. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [Ber96] BERGMANN, Kurt: *Elektrische Meßtechnik*. 6. Aufl. Wiesbaden : Vieweg, 1996
- [BSR06] BERGMANN, Ludwig ; SCHAEFER, Clemens ; RAITH, Wilhelm: *Bergmann Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik*. Bd. 2. 9. Aufl. Berlin : de Gruyter, 2006
- [CA12] CORINTO, Fernando ; ASCOLI, Alon: Memristive Diode Bridge with LCR Filter. In: *Electronic Letters* 14 (2012), S. 824–825
- [CHSW11] CLAUSERT, H. ; HINRICHSSEN, V. ; STENZEL, J. ; WIESEMANN, G.: *Grundgebiete der Elektrotechnik 1*. 11. Aufl. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2011
- [Chu71] CHUA, Leon O.: Memristor - The Missing Circuit Element. In: *IEEE Transactions on Circuit Theory* 18 (1971), Nr. 5, S. 507–519
- [Chu14] CHUA, Leon O.: If It's Pinched It's A Memristor. In: *Semiconductor Science and Technology* 29 (2014), 09, S. 104001. – DOI 10.1088/0268-1242/29/10/104001
- [dina] *DIN 1301-1:2002, Einheiten - Teil 1 : Einheitenamen, Einheitenzeichen*
- [dinb] *DIN 1304-1:1994, Formelzeichen; Allgemeine Formelzeichen*
- [dinc] *DIN 1313:1998, Größen und Gleichungen : Begriffe, Schreibweisen*
- [dind] *DIN 40110-1:1994, Wechselstromgrößen; Zweileiter-Stromkreise*
- [dine] *DIN 5483-3:1994, Zeitabhängige Größen - Teil 3 : Komplexe Darstellung sinusförmig zeitabhängiger Größen*
- [dinf] *DIN EN 60375:2004, Vereinbarungen für Stromkreise und magnetische Kreise*
- [ding] *DIN EN 60617-2:1997, Graphische Symbole für Schaltpläne - Teil 2: Symbolelemente, Kennzeichen und andere Schaltzeichen für allgemeine Anwendungen*
- [dinh] *DIN EN 60617-4:1997, Graphische Symbole für Schaltpläne - Teil 4 : Schaltzeichen für passive Bauelemente*
- [dini] *DIN EN 60617-6:1997, Graphische Symbole für Schaltpläne - Teil 6 : Schaltzeichen für die Erzeugung und Umwandlung elektrischer Energie*
- [DKV10] DOBRINSKI, Paul ; KRAKAU, Gunter ; VOGEL, Anselm: *Physik für Ingenieure*. 12. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2010
- [DS12] DETLEFSEN, Jürgen ; SIART, Uwe: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München : Oldenbourg, 2012

- [EH89] EICHMEIER, Joseph ; HEYNISCH, Hinrich: *Handbuch der Vakuumelektronik*. München : Oldenbourg, 1989
- [Eic81] EICHMEIER, Joseph: *Moderne Vakuumelektronik*. Berlin : Springer, 1981
- [Fet73] FETZER, Viktor: *Ortskurven und Kreisdiagramme*. Heidelberg : Hüthig, 1973
- [FF12] FETZER, Albert ; FRÄNKEL, Heiner: *Mathematik*. Bd. 1 und 2. 11./7. Aufl. Berlin : Springer, 2012
- [FH05] FLOSDORFF, René ; HILGARTH, Günther: *Elektrische Energieverteilung*. 9. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2005
- [Fis11] FISCHER, Rolf: *Elektrische Maschinen*. 15. Aufl. München : Hanser, 2011
- [Fra13] FRANZ, Joachim: *EMV*. 5. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013
- [Fro94] FROHNE, Heinrich: *Elektrische und magnetische Felder*. Stuttgart : Teubner, 1994
- [FU84] FROHNE, Heinrich ; UECKERT, Erwin: *Grundlagen der elektrischen Messtechnik*. Stuttgart : Teubner, 1984
- [FV82] FRICKE, Hans ; VASKE, Paul: *Elektrische Netzwerke*. 17. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1982
- [GF83] GAD, Horst ; FRICKE, Hans: *Grundlagen der Verstärker*. Stuttgart : Teubner, 1983
- [Gie94] GIESEKE, Peter: *Dehnungsmessstreifentechnik*. Wiesbaden : Vieweg, 1994
- [Gie02] GIEBEL, Thomas: *Grundlagen der CMOS-Technologie*. Stuttgart : Teubner, 2002
- [Hei11] HEINEMANN, Robert: *PSPICE, Einführung in die Elektroniksimulation*. 7. Aufl. München : Hanser, 2011
- [Heu96] HEUMANN, Klemens: *Grundlagen der Leistungselektronik*. 6. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1996
- [HH93] HAUG, Albert ; HAUG, Franz: *Angewandte elektrische Meßtechnik*. 2. Aufl. Wiesbaden : Vieweg, 1993
- [Hil08] HILLERINGMANN, Ulrich: *Silizium-Halbleitertechnologie*. 5. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [ITM07] IVERS-TIFFÉE, Ellen ; MÜNCH, Waldemar von: *Werkstoffe der Elektrotechnik*. 10. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2007
- [Jak93] JAKSCH, Hans-Dieter: *Batterie-Lexikon*. München : Pflaum, 1993
- [Jan01] JANSEN, Dirk (Hrsg.): *Handbuch der Electronic Design Automation*. München : Hanser, 2001
- [Kie03] KIEHNE, Heinz-Albert: *Kontakt & Studium*. Bd. 57: *Batterien: Grundlagen und Theorie, aktueller technischer Stand und Entwicklungstendenzen*. 5. Aufl. expert verlag, 2003
- [KMR08] KÜPFMÜLLER, K. ; MATHIS, W. ; REIBIGER., A.: *Theoretische Elektrotechnik*. 18. Aufl. Berlin : Springer, 2008

- [Kor13] KORTHAUER, Reiner: *Handbuch Lithium-Ionen-Batterien*. Springer, 2013
- [Kur00] KURZ, Günter: *Elektronische Schaltungen simulieren und verstehen mit PSPICE*. Würzburg : Vogel, 2000
- [LBL08] LINDNER, Helmut ; BRAUER, Harry ; LEHMANN, Constans: *Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik*. 9. Aufl. München : Hanser, 2008
- [Lun91] LUNZE, Klaus: *Einführung in die Elektrotechnik, Lehrbuch*. 13. Aufl. Berlin : Verlag Technik, 1991
- [Mey11] MEYER, Martin: *Signalverarbeitung*. 6. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011
- [Moo11] MOOSBAUER, Dominik J.: *Die Lithium-Ionen-Batterie - Energiespeicher der Zukunft*. Suedwestdeutscher Verlag fuer Hochschulschriften, 2011
- [Mös92] MÖSCHWITZER, Albrecht: *Grundlagen der Halbleiter- und Mikroelektronik*. Bd. 1: Elektronische Halbleiterbauelemente. Bd. 2: Integrierte Schaltkreise. München : Hanser, 1992
- [Müh08] MÜHL, Thomas: *Einführung in die elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Geräte*. 3., neu bearbeitete Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [Mün87] MÜNCH, Waldemar von: *Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie*. Stuttgart : Teubner, 1987
- [Mün93] MÜNCH, Waldemar von: *Einführung in die Halbleitertechnologie*. Stuttgart : Teubner, 1993
- [NP73] NAGEL, Laurence W. ; PEDERSON, Don O.: *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis / Berkeley : University of California, Electronics Research Laboratory. 1973 (Memo ERL-M382). – Forschungsbericht*
- [NT98] NELLES, Dieter ; TUTTAS, Christian: *Elektrische Energietechnik*. Stuttgart : Teubner, 1998
- [Phi00] PHILIPPOW, Eugen: *Grundlagen der Elektrotechnik*. 10. Aufl. Berlin : Verlag Technik, 2000
- [Rin01] RINDELHARDT, Udo: *Photovoltaische Stromversorgung*. 1. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2001
- [Sch90] SCHAUMBURG, Hanno: *Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik*. Bd. 1: Werkstoffe. Stuttgart : Teubner, 1990
- [Sch91] SCHAUMBURG, Hanno: *Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik*. Bd. 2: Halbleiter. Stuttgart : Teubner, 1991
- [SE88] SAAL, Rudolf ; ENTENMANN, Walter: *Handbuch zum Filterentwurf*. 2. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1988
- [Sim89] SIMONYI, Károly: *Theoretische Elektrotechnik*. 9. Aufl. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1989
- [SS07] SIEMERS, Christian (Hrsg.) ; SIKORA, Axel (Hrsg.): *Taschenbuch Digitaltechnik*. 2. Aufl. Leipzig : Fachbuchverlag Leipzig, 2007

- [ST18] STANDARDS, National I. ; TECHNOLOGY: *CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants*. <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>. Version: 2018
- [Süß05] SÜSSE, Roland (Hrsg.): *Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik*. Bd. 1. 1. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2005
- [Tet14] TETZLAFF, Ronald: *Memristors and Memristive Systems*. New York : Springer, 2014
- [TR97] TRUEB, Lucien F. ; RÜETSCHI, Paul: *Batterien und Akkumulatoren. Mobile Energiequellen für heute und morgen*. Berlin : Springer, 1997
- [VP02] VOGES, Edgar (Hrsg.) ; PETERMANN, Klaus (Hrsg.): *Optische Kommunikationstechnik*. Berlin : Springer, 2002
- [Wag10] WAGNER, Andreas: *Photovoltaic Engineering*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 2010
- [WMF96] WIDMANN, Dietrich D. ; MADER, Hermann ; FRIEDRICH, Hans: *Technologie hochintegrierter Schaltungen*. 2. Aufl. Berlin : Springer, 1996
- [WU12] WEBER, Hubert ; ULRICH, Helmut: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. 9. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2012
- [ZB99] ZINKE, Otto ; BRUNSWIG, Heinrich: *Hochfrequenztechnik*. Bd. 2. 5. Aufl. Berlin : Springer, 1999

A Anhang

A.1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	I	ι	Jota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Y	υ	Ypsilon
E	ε	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

A.2 SI-Einheiten

Tabelle A.1: SI-Einheiten nach [dina]; die Basiseinheiten sind fett gedruckt

Größe	Formelzeichen	SI-Einheit	Einheitenzeichen	Definitionsgleichung
Mechanik				
Länge	l	Meter	m	
Zeit	t	Sekunde	s	
Frequenz	f	Hertz	Hz	1 Hz = 1/s
Kreisfrequenz	ω	reziproke Sekunde	1/s = s ⁻¹	
Drehzahl	n	reziproke Sekunde	1/s, (1/min)	
Geschwindigkeit	v	Meter durch Sekunde	m/s	
Beschleunigung	a	Meter durch Sekunde hoch zwei	m/s ²	
Masse	m	Kilogramm	kg	
Kraft	F	Newton	N	1 N = 1 kg m/s ²
Gewichtskraft	G	Newton	N	1 N = 1 kg m/s ²
Energie, Leistung				
Energie, Arbeit	W	Joule	J	1 J = 1 Nm = 1 Ws = 1 kg m ² /s ²
Energiedichte	w	Joule durch Kubikmeter	J/m ³	
Leistung (Energiestrom)	P	Watt	W	1 W = 1 J/s = 1 VA = 1 Nm/s

Größe	Formelzeichen	SI-Einheit	Einheitenzeichen	Definitionsgleichung
Temperatur, Wärme				
Temperatur	T	Kelvin	K	
Celsius-Temperatur	ϑ	Grad Celsius	°C	
Wärmemenge	Q	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$ $= 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$
Elektrische Größen				
el. Stromstärke	I	Ampere	A	
el. Stromdichte	J	Ampere durch Quadratmeter	A/m^2	
el. Ladung	Q	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
el. Flussdichte	D	Coulomb durch Quadratmeter	C/m^2	
el. Spannung	U	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W}/\text{A}$
el. Feldstärke	E	Volt durch Meter	V/m	
Scheinleistung	S	Voltampere	VA	
Blindleistung	Q	Var	var	
el. Widerstand	R	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V}/\text{A}$
el. Leitwert	G	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \text{ A}/\text{V}$
spez. Widerstand	ϱ	Ohmmeter	Ωm	
el. Leitfähigkeit	κ	Siemens durch Meter	S/m	
el. Kapazität	C	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ As}/\text{V} = 1 \text{ s}/\Omega$
Permittivität	ε	Farad durch Meter	F/m	$1 \text{ F}/\text{m} = 1 \text{ As}/\text{Vm}$
Magnetische Größen				
mag. Fluss	Φ	Weber, Voltsekunde	Wb, Vs	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$
mag. Flussdichte	B	Tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Vs}/\text{m}^2$
mag. Spannung	V	Ampere	A	
mag. Feldstärke	H	Ampere durch Meter	A/m	
mag. Leitwert	Λ	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Vs}/\text{A} = 1 \Omega\text{s}$
Induktivität	L	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Vs}/\text{A} = 1 \Omega\text{s}$
Permeabilität	μ	Henry durch Meter	H/m	$1 \text{ H}/\text{m} = 1 \text{ Vs}/\text{Am}$

Tabelle A.2: Vorsätze zur Bezeichnung von Zehnerpotenzen von Einheiten nach [dina]

Yotta-	(Y)	für das 10^{24} -fache	Dezi-	(d)	für das 10^{-1} -fache
Zetta-	(Z)	für das 10^{21} -fache	Zenti-	(c)	für das 10^{-2} -fache
Exa-	(E)	für das 10^{18} -fache	Milli-	(m)	für das 10^{-3} -fache
Peta-	(P)	für das 10^{15} -fache	Mikro-	μ	für das 10^{-6} -fache
Tera-	(T)	für das 10^{12} -fache	Nano-	(n)	für das 10^{-9} -fache
Giga-	(G)	für das 10^9 -fache	Piko-	(p)	für das 10^{-12} -fache
Mega-	(M)	für das 10^6 -fache	Femto-	(f)	für das 10^{-15} -fache
Kilo-	(k)	für das 10^3 -fache	Atto-	(a)	für das 10^{-18} -fache
Hekto-	(h)	für das 10^2 -fache	Zepto-	(z)	für das 10^{-21} -fache
Deka-	(da)	für das 10-fache	Yokto-	(y)	für das 10^{-24} -fache

A.3 Elektrische Leitungseigenschaften einiger Werkstoffe

Tabelle A.3: Elektrische Leitfähigkeit κ_{20} sowie Temperaturkoeffizienten α_{20} und β_{20} von ϱ_{20} ; alle Angaben für 20 °C

Werkstoff	$\frac{\kappa_{20}}{\text{Sm/mm}^2}$	$\frac{\alpha_{20}}{10^{-3}\text{K}^{-1}}$	$\frac{\beta_{20}}{10^{-6}\text{K}^{-2}}$
Aluminium, weich	36	3,7 ... 5,0	1,3
hart	33 ... 34		
Bronze, Draht	18 ... 48	0,5	
Chromnickel WM 100	0,9 ... 1,4	0,2	
Eisen, Flusstahl	7 ... 10	4,5 ... 6	6
Gold	45	3,9	0,5
Konstantan WM 50	2	0,01	
Kupfer, weich	57	3,9 ... 4,3	0,6
hart	55 ... 56		
Manganin WM 43	2,32	0,01	
Messing	12 ... 15,9	1,5 ... 4	1,6
Nickel	10 ... 15	3,7 ... 6	9
Platin	10,2	2 ... 4	0,6
Quecksilber	1,063	0,92	1,2
Silber	60 ... 62	3,8	0,7
Wolfram	18,2	4,1	1

Tabelle A.4: Mittelwerte spezifischer Widerstände ϱ in Ωcm bei 20 °C von Isolierstoffen

Aminoplast-Pressmasse	10^{11}	Phenolharz	10^{11}
Bitumen-Vergussmasse	10^{15}	Plexiglas	10^{15}
Epoxydharze	10^{16}	Polystyrol	10^{17}
Glas	10^{14}	Polyvinylchlorid, hart	10^{15}
Hartgummi	10^{16}	weich	10^{13}
Hartpapier	10^{10}	Quarz	10^{16}
Hartporzellan	10^{14}	Silikonöl	10^{14}
Papier, getränkt	10^{15}	Wasser, destilliert	10^{10}

A.4 Schaltzeichen

	Leitung, allgemein		Anschluss (z. B. Klemme)
	Kreuzung von Leitungen ohne Verbindung		feste leitende Verbindung
	Einschalter, Schließer		Ausschalter, Öffner
	Umschalter, Wechsler		mechanische Wirkverbindung
	allgemeiner Zweipol		allgemeines Zweitor
	Widerstand, allgemein		veränderbarer Widerstand
	Wirkwiderstand		Blindwiderstand
	komplexer Widerstand		Induktivität (veraltet)
	Induktivität		Kapazität
	Diode		Lampe, allgemein
	Veränderbarkeit, nicht inhärent		Veränderbarkeit, nicht inhärent, nichtlinear
	Veränderbarkeit, inhärent		Veränderbarkeit, inhärent, nichtlinear
	spannungsabhängiger Widerstand		Widerstand mit Schleifkontakt, Potentiometer
	Transformator mit zwei getrennten Wicklungen		magnetisch gekoppelte Induktivitäten mit gleichem Wicklungssinn
	magnetisch gekoppelte Induktivitäten mit entgegengesetztem Wicklungssinn		ideale Spannungsquelle
	ideale Stromquelle		Akkumulator, Batterie
	Generator, allgemein		rotierender Generator
	Gleichspannungsgenerator		Gleichstrommotor
	Spannungsmesser, Voltmeter		Strommesser, Amperemeter
	Leistungsmesser, Wattmeter		Galvanometer

A.5 Symbole und Schreibweisen

Zusätzliche Auszeichnung eines Größensymbols nach [dine], [dind]

$\{x\}$	Zahlenwert einer Größe $x = \{x\} \cdot [x]$
$[x]$	Einheit einer Größe $x = \{x\} \cdot [x]$
\bar{x}	Linearer Mittelwert
$\overline{ x }$	Linearer Mittelwert der Absolutwerte (Gleichrichtwert)
X	Effektivwert, wenn für die Größe der Groß- (X) und Kleinbuchstabe (x) als Formelzeichen festgelegt sind (siehe Liste der Formelzeichen in Anhang A.7)
x_{\max}	Maximalwert
\hat{x}	Scheitelwert einer Wechselgröße, Amplitude einer Sinusgröße
x_{12}	Zählpfeilgröße, d. h. vorzeichenbehaftete skalare Größe, die eine orientierte Wirkung beschreibt
\underline{X}	Komplexe Größe oder Matrix
\underline{X}^*	Konjugiert komplexe Größe
\vec{x}	Vektor
$y(x)$	Abhängigkeit der Größe y von der Größe x , wenn diese Abhängigkeit betont werden soll

Die Zeitabhängigkeit einer Größe wird herausgestellt durch:

x	Kleinbuchstabe, wenn für die Größe der Klein- (x) und der Großbuchstabe (X) festgelegt sind (siehe Formelzeichenliste in Anhang A.7)
$x(t)$	t in Klammern, wenn für die Größe nur der Groß- (X) oder nur der Kleinbuchstabe (x) als Formelzeichen festgelegt ist
\dot{x}	zeitliche Ableitung einer Größe x ($\dot{} = d/dt$)

A.6 Indizes

Die folgende Aufstellung ist zeilenweise zu lesen.

a	äußerer Wert	a	Anfangswert
Al	Aluminium	B	Blindleitwert
b	Blindkomponente	C	Kapazität
Cu	Kupfer	d	dielektrischer Wert
d, diff	differenziell	dr	Drossel
E, ers	Ersatzgröße	e	Elektron
e, el	elektrischer Wert	eff	effektiver Wert
f	Oberflächenwert	Fe	Eisen, ferromagnetisch
G	Generator	G	Wirkleitwert
g, ges	Gesamtwert	h, hom	homogen
i	innerer Wert	i	Strom
k	Kurzschlusswert	L	Induktivität
M	Messgerät	m, mag	magnetischer Wert
max	Maximalwert	mech	mechanischer Wert
mi	Mittelwert	min	Kleinstwert
N, nom	Nominalwert, Nennwert	n	Normalkomponente
p	Parallelschaltung	p	partikulär

p	Proton	q	Quelleigenschaft (eingepägt)
R	Wirkwiderstand	r	Reihenschaltung; Remanenzwert
r	relativ	rev	reversibel
Str	Strangwert	t	Tangentialkomponente
u	Spannung	ü	Überschwingwert
v	Verbraucher	v	Verschiebung
W	Energie	w	Wirkkomponente
X	Blindwiderstand	Y	komplexer Leitwert, Admittanz
Z	komplexer Widerstand, Impedanz	zul	zulässiger Wert
0	Anfangswert	0	Leerlaufwert
0	ungedämpft	0	leerer Raum
1	primär, Eingang	2	sekundär, Ausgang
∞	Endwert	δ	Luftspalt
res	Resonanzwert	σ	Streuungswert
ν, μ	Zahlenfolge 1, 2, ...	–	Gleichgröße
\sim	Wechselgröße	Δ	Dreieckschaltung
λ	Sternschaltung	\lrcorner	Springerregung

A.7 Formelzeichen

Die folgende Aufstellung ist zeilenweise zu lesen.

A	Fläche, Querschnitt	A_r	relative Atommasse
a	Beschleunigung	a_ν	Fourier-Koeffizient
a_0	Gleichanteil	B	magnetische Flussdichte
B	Blindleitwert	B_r	Remanenzinduktion
b	Beweglichkeit	B	Bandbreite
b_ν	Fourier-Koeffizient	C	elektrische Kapazität
c	Wärmekapazität	c	elektrochemisches Äquivalent
c_ν	Koeffizient der komplexen Fourier-Reihe	C_F	Crest-Faktor, Scheitelfaktor
c_0	Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum	D	Determinante
D	elektrische Flussdichte	d	Durchmesser
d	Dämpfung	E	elektrische Feldstärke
e	Elementarladung	e	Basis des natürlichen Logarithmus ($\approx 2,718$)
F	Fehler, Abweichung	F	Formfaktor
F	Kraft	f	Frequenz
f	Besetzungswahrscheinlichkeit, Fermi-Verteilungsfunktion	G	Wirkleitwert
g	Grundschwingungsgehalt	H	magnetische Feldstärke
H_c	Koerzitivfeldstärke	h	Höhe
I, i	Strom	I_g	Steuerstrom
I_Z	Zener-Strom	J	Stromdichte

J	magnetische Polarisierung	j	$\sqrt{-1}$
k	Anzahl der Knoten	k	Boltzmann-Konstante
k	Kopplungsgrad	k, d	Klirrfaktor
L	Induktivität	l	Länge, Strecke
M_d	Drehmoment	M	Gegeninduktivität
M_r	relative Molekülmasse, Molekulargewicht	m	Masse
m	Anzahl der Maschengleichungen	m	Phasenzahl
m_e	Ruhemasse des Elektrons	N	Windungszahl
n	Anzahl	n	Drehzahl
P, p	Leistung	P	Wirkleistung
p	Pulszahl	p	Parameter
Q	elektrische Ladung	Q	Blindleistung
Q	Güte	R	Wirkwiderstand, Resistanz
R_H	Hallkonstante	R_m	magnetischer Widerstand, Reluktanz
r	Radius	S	Scheinleistung
s	Schwingungsgehalt	T	Thermodynamische Temperatur (in K)
T	Periodendauer	t	Zeit
U, u	elektrische Spannung	\dot{U}, \dot{u}	elektrische Umlaufspannung
\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis	V	Volumen, Rauminhalt
V	magnetische Spannung	\dot{V}	magnetische Umlaufspannung
v	Geschwindigkeit	v	Verstimmung
W	Energie, Arbeit	W_A	Akzeptorenniveau
W_D	Donatorenniveau	W_F	Fermi-Niveau
w	Energiedichte	w	Welligkeit
X	Blindwiderstand, Reaktanz	Y	Scheinleitwert
Z	Scheinwiderstand	z	Anzahl der Zweige
α	linearer Temperaturkoeffizient	β	Blindfaktor
β	quadratischer Temperaturkoeffizient	Δ	Differenz
δ	Verlustwinkel	δ	Abklingkonstante
δ	Luftspaltlänge	ε	Permittivität
ε	Sprungfunktion, Einheitssprung	ε_r	relative Permittivität
ε_0	elektrische Feldkonstante	η	Driftladungsdichte
η	Wirkungsgrad	Θ	elektrische Durchflutung
Θ	Laufwinkel	ϑ	Celsius-Temperatur (in °C)
θ	Dämpfungsgrad	κ	elektrische Leitfähigkeit
Λ	magnetischer Leitwert	Λ	mittlere freie Weglänge
λ	Linienladungsdichte	λ	Wellenlänge
λ	Leistungsfaktor	μ	Permeabilität
μ_0	magnetische Feldkonstante	ν	Teilschwingungszahl
ξ	Scheitelfaktor	ϱ	Dichte
ϱ	Raumladungsdichte	ϱ	spezifischer Widerstand
σ	Flächenladungsdichte	σ	Streuung
σ_{mech}	mechanische Spannung	τ	Zeitkonstante
τ	Lebensdauer	τ	Elektronenlaufzeit
Φ	magnetischer Fluss	φ	elektrisches Potenzial

φ	Phasenverschiebungswinkel, Argument der Impedanz	φ_i	Nullphasenwinkel des Stroms
φ_u	Nullphasenwinkel der Spannung	φ_Y	Argument des komplexen Leitwertes
χ	Suszeptibilität	Ψ	elektrischer Fluss
Ψ	magnetischer Spulenfluss	$\dot{\Psi}$	elektrischer Hüllenfluss
Ω	relative Frequenz	ω	Winkelgeschwindigkeit
ω	Kreisfrequenz		

A.8 Werte der Normreihe E 24

Die Werte der Normreihe E 12 sind fett gedruckt.

1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3,0
3,3	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	9,1

A.9 Werte wichtiger Naturkonstanten

Werte nach [ST18]. Nach der drastischen Korrektur im Jahr 2010 wurden die Werte einiger Naturkonstanten im Jahr 2018 erneut erheblich revidiert. Die Ziffern in Klammern hinter der Mantisse einiger Konstanten geben die Unsicherheit der entsprechend vielen letzten Ziffer an.

c_0	= 299 792 458 m/s (exakt)	Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum
μ_0	= $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m \approx 1,256 637 062 12 μ H/m	magnetische Feldkonstante
ε_0	= $1/(\mu_0 c_0^2) \approx$ 8,854 187 8128 $\cdot 10^{-12}$ As/(Vm)	elektrische Feldkonstante
e	= 1,602 176 634 $\cdot 10^{-19}$ C (exakt)	Elementarladung
F	= 96.485,332 12 C mol ⁻¹ (exakt)	Faraday-Konstante
m_e	\approx 9,109 383 7015(28) $\cdot 10^{-31}$ kg	Ruhemasse des Elektrons
m_p	\approx 1,672 621 923 69(51) $\cdot 10^{-27}$ kg	Ruhemasse des Protons
G	\approx 6,674 30(15) $\cdot 10^{-11}$ m ³ /(kg s ²)	Gravitationskonstante
N_A	= 6,022 140 76 $\cdot 10^{23}$ mol ⁻¹ (exakt)	Avogadro-Konstante, Loschmidt-Zahl
h	= 6,626 070 15 $\cdot 10^{-34}$ Js (exakt)	Plancksches Wirkungsquantum
k	= 1,380 649 $\cdot 10^{-23}$ J/K (exakt)	Boltzmann-Konstante

Stichwortverzeichnis

- II-Schaltung, 389
- ÄPF, 182, 197
- ÄPL, 197
- Äquipotenzialfläche, 182, 185, 197
- Äquipotenziallinie, 187, 197
- Äquivalentgewicht, 608
- Überlagerung
 - skalärer Größen, 107
- Überlagerungssatz, 107
- Überschwingen, 574
- Übersetzungsverhältnis, 289, 415, 419
- Übertrager, 414
- Übertragungsfunktion, 447
- Übertragungsvierpol, 447
- äquivalente Schaltungen, 405
- äquivalente molare Masse, 609
- äußere Selbstinduktivität, 287

- Ableichbedingung, 79, 80
- Ableitungsverluste, 412
- Ablenkempfindlichkeit, 587
- Ablenkoeffizient, 587
- Ablenksystem, 596
- Ablenkung
 - durch ein elektrisches Feld, 587
 - durch ein magnetisches Feld, 589
- Abzweigschaltung, 99
- Additivität, 91
- Admittanz, 342
- Affinität der Reaktion, 611
- Aggregatzustände, 11
- Akkumulator, 19, 615
- aktiver Zweipol, 19, 43
- aktives Gebiet, 16
- Akzeptor, 635
- Alkali-Mangan-Zelle, 613
- allgemeine Lösung, 552
- Allpass, 467
- alternierende Funktion, 525
- amorpher Zustand, 616
- Ampere, 12
- Amperemeter, 85
 - ideales, 85
 - Innenwiderstand, 85
 - reales, 85
- Amplitude, 318
 - komplexe, 339
- Amplitudendiagramm, 444
- Amplitudenfrequenzgang, 448
- Amplitudengang, 448
- Analogien, 388
- Analyse, 21
 - nichtlinearer Netzwerke, 143
- Anfangsbedingung, 552
- Anion, 597
- anisotrop, 190, 205, 227
- Anker, 261
- Anlaufgebiet, 663
- Anode, 582
- Anodenschlamm, 607
- Anpassungsbedingung, 60
 - komplexe, 401
- Anpassungsfall, 61
- Anregungsgröße, 91
- Antikathode, 596
- Anzapfung, 415
- APD, 675
- aperiodischer Fall, 565
- aperiodischer Grenzfall, 566
- Approximation, 518
- Arbeitspunkt, 35, 156
 - Stabilität, 148
- Argument, 332
- arithmetischer Mittelwert, 311
- Aron-Schaltung, 515
- Asynchronmotor, 498
- Atommodell
 - Bohrsches, 10
- Augenblicksleistung, 344
- Ausgangstor, 20, 415
- Aussteuerung, 37
- Austrittsarbeit, 581
- Außenleiter, 499
- Außenleiterspannung, 500
- Avogadro-Konstante, 608, 695

- Bänderüberlappung, 658
- Bändermodell, 619
- Büschelentladung, 604
- backward diode, 660
- Bahnwiderstand, 647
- Band
 - Leitungs-, 623
 - Valenz-, 623
 - verbotenes, 622
- Bandabstand, 623
- Bandbreite, 473
- Bandpass, 463
- Bandsperre, 467
- Basis, 669
- Baumstruktur, 121
- Baumzweig, 94
- Begrenzung, 650
- Bel, 449
- belasteter Spannungsteiler, 75
- Betrag, 332
- Betragsdiagramm, 444
- Betragsfrequenzgang, 448
- Beweglichkeit, 626
- Bewegungsgleichung, 584, 588
- Bezugsknoten, 132, 152
- Bezugspfeil, 22
- Bezugspotenzial, 15, 17
- Bezugspunkt, 189
- Bezugsrichtung, 22
- Bezugstemperatur, 37
- Bezugszeiger, 340
- Bildbereich, 338
- Bipolartransistor, 668
 - nnp-Typ, 668
 - pnp-Typ, 668
- Blindleistung, 346, 546
 - Grundschrwingungs-, 547
 - induktive, 356
 - kapazitive, 361
 - Verzerrungs-, 400, 547
- Blindleistungsgenerator, 396
- Blindleistungskompensation, 395, 506
- Blindleistungsmessung, 402
- Blindleitwert, 343
 - induktiver, 353
 - kapazitiver, 358
- Blindspannung, 405
- Blindstrom, 395, 409
- Blindwiderstand, 342
 - induktiver, 353
 - kapazitiver, 358
- Blitz, 604
- Bode-Diagramm, 450
- Bogenentladung, 602
- Bogenmaß, 6
- Bohrsches Atommodell, 10, 619
- Boltzmann-Konstante, 645
- Brückengleichrichter, 312
- Brückenschaltung, 79, 388
 - Sinusstrom, 389
- Braunstein-Zink-Zelle, 612
- Brechungsgesetz
 - für magnetische Feldlinien, 250
- Brennfleck, 602
- Brennstoffzelle, 615
- charakteristische Gleichung, 553
- Chip, 680
- CMOS, 682
- Coulomb, 10
- Coulombsches Gesetz, 166
- Crest Factor, 315
- Dämpfung, 449, 450, 473
- Dämpfungsgrad, 565
- Dauermagnet, 218, 259, 263
- dB, 449
- deaktivierte Quelle, 50
- Defektelektron, 630, 636
- Dehnungsmessstreifen, 41
- Dekade, 451
- Design Framework, 154
- Design Re-Use, 153
- Dezibel, 449
- DIAC, 671
- diamagnetische Stoffe, 249
- Diamantgitter, 617
- Dielektrikum, 11, 206
 - geschichtetes, 210
- dielektrische
 - Verluste, 215
 - Verlustleistung, 215
- dielektrischer
 - Verlustfaktor, 215
- Differenzialgleichung

- lineare, 550
- differenzielle Feldgrößen
 - magnetisches Feld, 229
- differenzielle Permeabilität, 257
- differenzieller
 - Leitwert, 37
 - Widerstand, 37
- Diffusions
 - kapazität, 646
 - länge, 645
 - spannung, 642
 - strom, 637
- Dimension, 2
- Dimmer, 675
- Diode
 - Vakuum-, 593
- Dipol
 - elektrischer, 159
 - magnetischer, 222
- DMS, 41
- Donator, 633
- Dotieren, 632
- Drain, 662
- Dreheisenmessgerät, 315
- Drehfelderzeugung, 498
- Drehoperator, 339
- Drehspulmesswerk, 316
- Drehstrommotor, 498
- Drehstromsystem, 498
- Drehzeiger, 324
- Dreieck-Stern-Transformation, 81, 388
- Dreieckschaltung, 80, 512
 - äquivalente, 81
 - symmetrische, 502
- Dreieckschwingung
 - symmetrische, 539
- Dreieckspannung, 500
- Dreieckstrom, 502
- Dreiecksungleichung, 337
- Dreieckwiderstand, 82
- Dreileiternetz, 512
- Dreiphasenbelastung
 - unsymmetrische, 507
- Dreiphasengenerator
 - symmetrischer, 493
 - unsymmetrischer, 494
- Dreiphasensystem
 - symmetrisches, 498
- Dreipol, 18, 81
- Driftbewegung, 598
- Driftgeschwindigkeit, 13, 172, 599, 626
- Driftladung, 171
- Driftladungsdichte, 171
- Driftladungsträgerkonzentration, 172
- Drossel, 352
- Drosselspule, 398
- dual gate MOSFET, 667
- duale Schaltung, 390
- dualer Zweipol, 362
- duales Verhalten, 484
- Dunkelzone, 602
- Duo-Schaltung, 400
- Durchbruch-Feldstärke, 212, 604, 656
- Durchbruchskanal, 604
- Durchflutung
 - elektrische, 224
 - Zählpfeil, 226
- Durchflutungssatz, 230
 - verallgemeinerter, 306
- Durchgriff, 594
- Durchlassbereich, 451, 622
- Durchschlag-Feldstärke, 604
- dynamischer Widerstand, 37
- Eckfrequenz, 450
- EDA, 151
- Effektivwert, 313, 322, 527
 - komplexer, 339
 - von Mischgrößen, 314
- Effektivwertzeiger
 - rotierender, 325
 - ruhender, 339
- Eigenfrequenz, 489
- Eigenkreisfrequenz, 567
- Eigenleitung, 629, 630
- Eingangstor, 20, 415
- eingeprägte
 - Größe, 43
 - Kraft, 212
- eingeschwungener Zustand, 309, 430, 468
- Einheiten, 4
 - gesetzliche, 5
 - inkohärente, 4
 - SI-, 4

- SI-Basis-, 5
- einheitenlos, 6
- Einheitensystem
 - kohärentes, 4
- Einheitenzeichen, 4
- Einheitssprungfunktion, 551
- einkristalliner Zustand, 616
- Eintor, 20
- Eisendrossel, 413, 544
- Eisenkreis, 251, 259
 - Berechnung, 259
 - Merkmale, 259
- Eisenverluste, 413
- Electronic Design Automation, 151
- elektrisch neutral, 159
- elektrische
 - Durchflutung, 224
 - Energie, 14
 - Feldenergie, 212, 214
 - Feldkonstante, 166, 695
 - Feldkraft, 212
 - Feldstärke, 168, 180
 - Festigkeit, 604
 - Flussdichte, 169, 199
 - Kapazität, 205
 - Ladung, 10, 158
 - Leitfähigkeit, 626
 - von Gasen, 601
 - Leitung
 - in Gasen, 596
 - in Halbleitern, 629
 - in Isolatoren, 639
 - Polarisation, 216
 - Quellenspannung, 270
 - Spannung, 16, 180
 - Stromdichte, 172, 175
 - Stromstärke, 12
 - Verbindungsleitung, 21
- elektrische Ladung
 - Wirkungen, 166
- elektrische Leistung, 55
- elektrische Quellen, 43
- elektrischer
 - Dipol, 159
 - Fluss, 199, 201
 - Leiter, 11
 - Leitwert, 28
 - Strom, 11
 - Wirkungen, 11
 - Widerstand, 28
- elektrisches
 - Feld
 - Energie, 212
 - Energiedichte, 214
 - inhomogenes, 193
 - Kraft, 212
 - Quellen, 191
 - Verlustleistung, 215
 - Netzwerk, 20
 - Potenzial, 14, 185, 196
 - Potenzialfeld, 158, 194
 - Strömungsfeld, 171
 - Wirbelfeld, 158, 268
- elektrochemische Spannungsreihe, 610
- elektrochemischer Stromerzeuger, 612
- elektrochemisches Äquivalent, 608
- Elektrode, 31, 206
 - ideale, 180, 182
- elektrodynamisches
 - Wattmeter, 315, 402
- Elektrolyse, 606, 615
- Elektrolyt, 606
 - kupfer, 607
- elektrolytische Leitung, 606
- Elektromotor, 302
- Elektromotorische Kraft, 16
- Elektron, 10
 - Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 623
 - Austrittsgeschwindigkeit, 585
 - Geschwindigkeit, 585
 - quasifrei, 629
 - Raumladungsdichte, 163
 - Ruhemasse, 584, 695
- Elektronen
 - emission, 581
 - gas, 11
 - leitung, 607
 - linse, 596
 - optik, 590
 - strahl, 583
 - röhre
 - mit Gitter, 593
 - ohne Gitter, 590
 - strahl

- Ablenkung, 195
 - strahlröhre, 586
- elektrostatischer
 - Spannungsmesser, 204
- elektrostatisches
 - Feld, 158, 166, 191
- Elektrotechnik, 1
- Element-Halbleiter, 617
- elementare
 - Ortskurve, 441
 - Passschaltung, 451
- elementarer
 - Parallelschwingkreis, 482
 - Reihenschwingkreis, 474, 551, 564
 - Schwingkreis, 474
- Elementarladung, 10, 159, 695
- Elementarmasche, 94, 120
- Eloxalverfahren, 616
- Emission, 581
 - induzierte, 605
 - inkohärente, 605
 - kohärente, 605
 - Photo-, 582
 - thermische, 582
- Emitter, 669
- EMK, 16
- energetischer Wirkungsgrad, 58
- Energie
 - elektrische, 14
- Energiebändermodell, 619
- Energieband, 622
- Energiedichte
 - elektrische, 214
 - magnetische, 293
- Energieerhaltungssatz, 62, 585
- Energieniveau, 619
- Energiesparlampe, 606
- Energieterm, 619
- Energieumwandlung, 57
- Entartung, 658
- Entladung
 - selbstständige, 601
 - unselbstständige, 600
- Entladungsformen, 600
- Entladungskanal, 602
- Entladungslampe
 - Hochdruck-, 605
 - Niederdruck-, 605
- Epitaxie
 - Flüssigphasen-, 632
 - Molekularstrahl-, 633
- Erdpotenzial, 187
- Erregerwicklung, 317
- Ersatz-Spannungsquelle, 400
- Ersatz-Stromquelle, 114, 400
- Ersatz-Zweipol, 112
- Ersatzluftspalt, 265
- Ersatzluftspaltfläche, 261
- Ersatzschaltbild, 21
 - magnetisches, 244
- Ersatzschaltung, 21, 152
 - gemischte, 412
- Ersatzstrom, 548
- Erzeuger, 19, 25, 54
- Erzeuger-Zählpfeilsystem, 24, 25
- erzwungene Schwingung, 470
- ESB, 21
- ESD, 683
- Eulersche
 - Form, 333
 - Gleichung, 333, 526
- Exponentialansatz, 553
- Exponentialform, 333
- EZS, 24
- Faraday-Konstante, 609, 695
- Faradaysche Gesetze, 608
- Feld, 158
 - elektrostatisches, 158, 166, 191
 - magnetisches, 218
 - zeitlich veränderliches, 158
- Feldbild, 219
- Feldeffekttransistor, 662
- Feldemission, 583
- Feldenergie
 - elektrische, 212, 214
 - magnetische, 292
 - potenzielle, 186
- Feldgröße, 168
- Feldkonstante
 - elektrische, 166
 - magnetische, 228
- Feldlinie, 173, 219
- Feldlinienbild, 173

- Feldliniendichte, 174
- Feldplatte, 42, 638
- Feldstärke
 - Durchbruch-, 212, 604, 656
 - Durchschlag-, 604
 - elektrische, 168, 180
 - magnetische, 226
 - äußere, 258
 - innere, 258
- Feldstrom, 637
- Feldtheorie, 168
- Feldvektor, 221
- Fensterdurchflutung, 237
- Fermi
 - Energie, 624
 - Niveau, 624
 - Verteilung, 623
- Fernwirkungstheorie, 168
- Ferromagnetika, 218
- ferromagnetische Stoffe, 249
- Festkörper, 11
- Festwertwiderstand, 41
- FET, 662
 - Hetero-, 665
 - IG-, 662
 - Junction-, 662
 - MES-, 665
 - MOS-, 666
 - dual gate, 667
 - selbstleitend, 666
 - selbstsperrend, 667
 - NIG-, 662
 - pn-, 662
 - Spannungsverstärkung, 665
- fiktiver Phasenverschiebungswinkel, 548
- Filterschaltung, 446
 - Ordnung, 448
- Flächenladungsdichte, 161, 199
- Flächenvektor, 202
- Fluid, 11
- Fluss
 - elektrischer, 199, 201
 - magnetischer, 238
- Flussdichte
 - elektrische, 169, 199
 - magnetische, 221
- Form
 - Eulersche, 333
 - Exponential-, 333
 - polare, 333
 - trigonometrische, 333
 - Formelzeichen, 2
 - Formfaktor, 315, 323
 - Fourier
 - Analyse, 516
 - Koeffizienten, 520
 - komplexe, 527
 - Reihe, 517, 520
 - komplexe, 526
 - unendliche, 523
 - freie Schwingung, 469
 - freie Weglänge
 - mittlere, 598
 - Freiheitsgrad, 489
 - Freiwerdzeit, 673
 - Frequenz, 318
 - normierte, 454, 472
 - relative, 472
 - Frequenzgang, 445
 - Betrags-, 448
 - Phasen-, 449
 - Frequenzselektivität, 477
 - Funkendurchbruch, 604
 - Funkenentladung, 604
 - Funktion
 - alternierende, 525
 - gerade, 524
 - ungerade, 525
 - Güte, 405, 473
 - Galvanik, 612, 616
 - galvanisch getrennt, 20, 414
 - galvanische Zelle, 610
 - Galvanometer, 88
 - Galvanoplastik, 616
 - Galvanotechnik, 616
 - Gas-Laser, 605
 - Gasentladung, 600
 - Gasentladungs-Charakteristik, 602
 - Gasentladungslampen, 605
 - Gasentladungsstrecke, 149
 - Gate, 662
 - Gaußsche Zahlenebene, 331
 - Gaußscher Satz der Elektrostatik, 202

- GC-Parallelschaltung, 379
- GCL-Parallelschaltung, 383
- Gebiet
 - aktives, 16
 - passives, 16
- geerdet, 187
- Gegeninduktionsspannung, 288, 290, 421
- Gegeninduktivität, 285, 289, 419
- gemischte
 - Schaltung, 75, 385
- Generation, 600, 631
 - von Ladungsträgern, 597
- Generator, 302
 - Mehrphasen-, 492
- gerade Funktion, 524
- Gesamtadmittanz, 376
- Gesamtimpedanz, 367
- Gesetz von Le Blanc, 611
- gesetzliche Einheiten, 5
- gesteuerte Quelle, 44
- gestrichene Größe, 418
- Gewinn, 450
- Gitter
 - Diamant-, 617
 - Elementarzelle, 616
 - Wurtzit-, 618
 - Zinkblende-, 617
- Gitterschwingung, 12
- GL-Parallelschaltung, 382
- Glättungsrossel, 543
- Gleichanteil, 311, 516, 521
- Gleichrichter
 - idealer, 541
- Gleichrichterschaltung
 - Einweg-, 543
 - Zweiweg-, 543
- Gleichrichterschaltungen, 541
- Gleichrichtung, 648
- Gleichrichtwert, 312, 321
- Gleichstrom, 12
- Gleichstromnetzwerk, 27
 - lineares, 90
- Gleichstromwiderstand, 36
- Gleichung
 - charakteristische, 553
 - Größen-, 7
 - physikalische, 7
 - Zahlenwert-, 7
- Gleitfunke, 604
- Glimmentladung
 - anomale, 602
 - normale, 601
- Größe
 - komplexe, 3
 - wertdiskrete, 11
 - wertkontinuierliche, 11
 - zeitabhängige, 3
- Größen
 - physikalische, 1
- Größengleichung, 7
 - zugeschnittene, 7
- Graph, 93
- Gravitationskonstante, 167
- Grenzflächen
 - Kraft auf, 216
- Grenzfrequenz, 451, 473
- Grenzkreisfrequenz, 451, 473
- Grenzwellenlänge, 637
- Grunddämpfung, 461
- Grundfrequenz, 310, 517
- Grundkreisfrequenz, 310
- Grundschiwingung, 517
- Grundschiwingungs-Blindleistung, 547
- Grundschiwingungsgehalt, 529
- Grundzeichen, 2
- Grundzweipole, 19
- GTO, 673
- GUI, 154
- Gunn-Element, 656
- höhere Harmonische, 517
- Hüllfläche, 164, 202
- Halbkugelelektrode, 187
- Halbkugelerder, 187
- Halbleiter, 624
 - Element-, 617
 - Verbindungs-, 617
- Halbleiterdiode, 646
- Hall
 - Sensor, 223, 638
 - Spannung, 223
 - Winkel, 638
- Haltestrom, 670, 675
- Hardwarebeschreibungssprache, 154

- hartmagnetisch, 253
- hartmagnetische Stoffe, 249
- Hauptfeldspannung, 428
- Hauptinduktivität
 - primäre, 427
- HDL, 154
- HDL-Code, 154
- Heißeiter, 37, 42, 629
- HEMT, 665
- Henry, 228
- Hetero-FET, 665
- Heterostruktur, 678
- HGÜ, 672
- High Level Design, 155
- Hochdruck-Entladungslampe, 605
- Hochpass, 459
- Hochtemperatur-Supraleiter, 628
- Hochvakuum, 581
- homogen, 31
- Homogenität, 91
- Hopkinsonsches Gesetz, 243
- Hummel-Schaltung, 402
- HVDC, 672
- Hystereseschleife, 252, 545
- Hystereseverluste, 294, 413, 428
- Hystereseverlustenergie, 253
- IC, 680
 - Mixed Signal-, 682
- ideale
 - Quelle, 43, 46
 - Spannungsquelle, 44
 - Stromquelle, 45
- idealer
 - Transformator, 415
- ideales
 - Amperemeter, 85
 - Voltmeter, 86
- IGBT, 670
- IGCT, 673
- IGFET, 662
- imaginäre
 - Achse, 331
 - Einheit, 331
- imaginärer
 - Anteil, 331
- Imaginärteil, 331
- Impatt-Diode, 656
- Impedanz, 341
- Impedanztransformation, 416
- indirekte Strommessung, 86
- Induktionsgesetz, 278, 279, 282, 307
- Induktionsmotor, 498
- Induktionswirkung
 - im bewegten Leiter, 269
 - im zeitvarianten Magnetfeld, 274
- induktive
 - Blindleistung, 356
- induktiver
 - Blindleitwert, 353
 - Blindwiderstand, 353
- Induktivität, 285, 352
 - innerere, 294
 - parasitäre, 348
- Influenz, 201, 666
- Influenzstrom, 656
- inkohärente Einheiten, 4
- Innenadmittanz, 400
- Innenimpedanz, 400
- Innenleitwert, 47, 114
- Innenwiderstand, 47, 113
 - Amperemeter, 85
 - Voltmeter, 86
- innerer Leistungsumsatz, 62
- innerere Induktivität, 294
- integrale Feldgrößen
 - magnetisches Feld, 229
- Integrierte Schaltung, 680
- Integro-Differenzialgleichung, 564
- intrinsic
 - Dichte, 631
 - Leitfähigkeit, 632
- Inversion
 - eines Zeigers, 335
- Inversions
 - kanal, 666
 - schicht, 666
- Inversionsdichte, 631
- inzident, 64
- Ion, 597
 - Generation, 600
 - mittlere Lebensdauer, 599
 - Rekombination, 600
- Ionenimplantation, 633

- Ionenkonzentration, 600
- Ionenstrom, 11
- Ionisierung, 597
- Ionisierungsenergie, 597
- Ionisierungsspannung, 597
- IRLED, 677
- Isolator, 11, 625, 639
- isotrop, 181

- JFET, 662
- Junction FET, 662

- Kaltleiter, 37, 42, 629
- Kanal, 662
- Kante, 93
- Kapazität, 205, 357
 - Diffusions-, 646
 - Parallelschaltung, 209
 - parasitäre, 206, 348, 680
 - Reihenschaltung, 209
 - Sperrschicht-, 644
- Kapazitätsbelag, 207
- kapazitive
 - Blindleistung, 361
- kapazitiver
 - Blindwiderstand, 358
- Kathode, 582
- Kation, 597
- Kennfrequenz, 472, 478
- Kennkreisfrequenz, 472
- Kennleitwert, 472
- Kennwiderstand, 472
- Kerbfilter, 467
- Ketten-Zählpeilsystem, 26
- Kettenschaltung, 76
- Kippdiode, 671
- Kirchhoffsche Gesetze, 65, 364
- Klemme, 18
- Klemmenpaar, 20
- Klemmenverhalten, 19
 - identisches, 94
- Klirrfaktor, 529
- Knopfzelle, 613
- Knoten, 64
 - einer Netzliste, 152
 - eines Graphen, 93
 - zentraler, 132
- Knoten- und Maschenanalyse, 100
- Knotenanalyse, 132
- Knotenleitwert, 137
- Knotenpotenzialanalyse, 132
- Knotenpotenzialverfahren, 132
 - Behandlung von Spannungsquellen, 134
 - modifiziertes, 134
- Knotensatz, 65, 165, 364
 - für differenzielle Feldgrößen, 179
- Koaxialkabel
 - Kapazitätsbelag, 207
- Koeffizientenmatrix, 101
- Koerzitivfeldstärke, 253
- kohärentes Einheitensystem, 4
- Kohle-Zink-Zelle, 612
- Kollektor, 669
- Kombinationsfrequenz, 649
- Kombinationsmessung, 87
- Kommutierung, 541
- Kommutierungskurve, 254
- Kompakt-Leuchtstofflampe, 606
- Kompensationskondensator, 396
- Kompensationsmessverfahren, 88
- komplexe
 - Amplitude, 339
 - Anpassungsbedingung, 401
 - Ebene, 331
 - Fourier-Reihe, 526
 - Gleichung, 337
 - Größe, 3
 - Größen
 - Darstellung, 331
 - Rechenregeln, 333
 - Leistung, 345
 - Spannung, 338, 340
 - Strangleistung, 504
- komplexer
 - Drehzeiger, 338
 - Effektivwert, 339
 - Leitwert, 341
 - Scheitelwertzeiger, 338
 - Strom, 338, 340
 - Widerstand, 341
- Kondensator, 206
 - Energie, 213
 - idealer, 357
 - Kompensations-, 396
- konjugiert komplexe Größe, 333

- Konstantan, 38
- Konstantspannungsquelle
 - elektronisch geregelte, 51
- Kontinuitätsgleichung, 64, 164
- konzentrierte Parameter, 309
- Koppelleitwert, 137
- Koppelwiderstand, 127
- Kopplungsgrad, 288, 289, 425
- Korona, 604
- Koronaentladung, 603
- Korrosion, 612, 616
- Kraft
 - auf Grenzflächen, 216, 294
 - auf Polflächen, 295
 - auf stromdurchflossene Leiter, 299
 - zwischen stromdurchflossenen Leitern, 304
- Kreisfrequenz, 318
- kristalliner Zustand, 616
- Kupferverluste, 413
- Kurzschluss, 44, 59, 62
- Kurzschlussstrom, 46, 114

- Längsinduktivität, 423
- Längsreaktanz, 429
- Längswiderstand, 76, 429
- Löcherstrom, 630
- Löschen, 670
- Lösung
 - allgemeine, 552
 - partikuläre, 553
 - spezielle, 552
- Lösungsdruck, 610
- Ladeleistung, 397
- Ladung, 158
 - eines Körpers, 159
 - elektrische, 10
- Ladungserhaltungssatz, 10, 164
- Ladungsschwerpunkt, 159
- Ladungsträger
 - in Gasen, 596
- Ladungsträgererzeugung, 597
- Ladungstrennung, 10
- Ladungsverteilungen, 160
- Laser-Diode, 678
- Last
 - symmetrische, 499
- Lastkennlinie, 50, 59
- Laufzeit, 584, 592
- Laufzeitröhre, 585
- Lawinen-Durchbruch, 656
- Lawinen-Strom, 656
- LDR, 42
- Lebensdauer, 646
- Leclanché-Zelle, 612
- LED, 677
- Leerlauf, 45, 59, 62
- Leerlaufspannung, 46, 113
- Leistung
 - berechnete
 - Interpretation, 56
 - elektrische, 55
 - in Sinusstromnetzwerken, 344, 393
 - komplexe, 345
 - mittlere, 55
 - verfügbare, 61
 - zugeführte, 61
- Leistungsanpassung, 60, 400
- Leistungsbilanz, 62, 394
 - Transformator, 416
- Leistungsdichte, 190
- Leistungsfaktor, 347
- leistungsinvariant, 418
- Leistungsmesser, 88
- Leistungsmessung, 88, 402, 510, 515
- Leistungstransformator, 414
- Leistungsumsatz
 - innerer, 62
- Leistungszählpfeil, 56
- Leiter
 - elektrischer, 11
- Leitfähigkeit
 - intrinsic-, 632
- Leitungsband, 623
- Leitwert
 - Blind-, 343
 - differenzieller, 37
 - elektrischer, 28
 - komplexer, 341
 - magnetischer, 243
 - Ohmscher, 29
 - Schein-, 343
 - statischer, 37
 - Wirk-, 343, 349

- Leitwertmatrix, 135
- Lenzsche Regel, 284
- Leucht
 - elektron, 602
 - schirm, 596
 - stoffröhre, 605
- Leuchtstofflampe, 149, 398, 605
 - Kompakt-, 606
- Licht
 - bogen, 602
 - detektor, 675
 - emitter, 677
 - quant, 637
- linear
 - unabhängig, 100
- lineare
 - Differenzialgleichung, 550
 - Quelle, 44, 46
 - Spannungsquelle, 49
 - Stromquelle, 49
 - Verzerrungen, 533
 - Widerstände, 41
- linearer
 - Mittelwert, 311
 - Temperaturkoeffizient, 37
 - Zweipol, 348
- lineares
 - Gleichstromnetzwerk, 90
 - System, 91
- Linearisierung im Arbeitspunkt, 37, 143
- Linearität, 91
- Linienladungsdichte, 162
- Linienleiter, 162
- Lithium-Zelle, 613
- Loch, 630
- Lorentz-Kraft, 222, 299, 588
- Loschmidt-Zahl, 608, 695
- LSI, 680
- LTI, 447
- LTT, 673
- Luftspalt, 260
 - Ersatz-, 265
- Luftspule, 228, 412
- Lumineszenzdiode, 677
- magnetisch
 - hart, 253
 - neutrale Stoffe, 218
 - weich, 253
- magnetische
 - Energiedichte, 293
 - Erregung, 227
 - Feldenergie, 292
 - Felder
 - Überlagerung, 246
 - Feldkonstante, 228, 695
 - Feldlinien
 - Brechungsgesetz, 250
 - Feldstärke, 226
 - äußere, 258
 - innere, 258
 - Flussdichte, 221
 - Kopplung, 289
 - Polarisation, 258
 - Quellenspannung, 244
 - Spannung, 229, 262
 - Zählpfeil, 230
 - Spannungsteilerregel, 245
 - Streuung, 260
 - Stromteilerregel, 245
 - Umlaufspannung, 229
- magnetischer
 - Dipol, 222
 - Fluss, 238
 - Zählpfeil, 241
 - Kreis, 243, 259
 - Leitwert, 243
 - Nordpol, 220
 - Nutzfluss, 261, 288
 - Südpol, 220
 - Spulenfluss, 282
 - Streufluss, 261, 288
 - Widerstand, 244
- magnetisches
 - Ersatzschaltbild, 244
 - Feld, 218
 - differenzielle Feldgrößen, 229
 - Energie, 291
 - Energieinhalt, 293
 - in Ferromagnetika, 251
 - in Materie, 248
 - integrale Feldgrößen, 229
 - Kräfte, 291
 - Spannungserzeugung, 268

- Ursachen, 218
- Ursachenfeldgröße, 227
- Wirkungen, 218, 268
- Wirkungsfeldgröße, 227
- Magnetisierungskurve, 254
- Magnetisierungsstrom, 413, 422, 544
 - reduzierter, 428
- Majoritätsträger, 634
- makroskopische
 - Sicht, 18
- Mangelleitung, 636
- Masche, 65
 - Elementar-, 94
- Maschenanalyse, 120
- Maschensatz, 66, 199, 365
- Maschenstrom, 120
- Maschenstromanalyse, 120
- Maschenstromverfahren, 120
 - modifiziertes, 125
- Maschenumlauf, 65
- Maschenwiderstand, 127
- Masse, 132
- Materiewelle, 622
- Matrix, 3
- Matrizengleichung, 101
- Maximalwert, 311
- Maxwellsche Doppelplatte, 200
- mechanische Zugspannung, 295
- mechanisches
 - Potenzial, 14
- Mehrphasengenerator, 492
- Mehrphasensystem, 492
 - offenes, 492
 - Schaltungsarten, 492
 - symmetrisches, 492
 - unsymmetrisches, 492
 - verkettetes, 492
- mehrstufiger
 - Spannungsteiler, 76
 - Stromteiler, 77
- Memristanz, 40
- Memristor, 40
- MESFET, 665
- Messen
 - spannungsrichtiges, 87
 - stromrichtiges, 87
- Messfunkenstrecke, 604
- Mikrowellendiode, 655
- Minimalwert, 311
- Minoritätsträger, 634
- Mischgröße, 312
 - Effektivwert, 314
- Mischung, 649
- Mittelwert
 - arithmetischer, 311
 - linearer, 311
 - quadratischer, 314
- Mittenfrequenz, 464
- mittlere
 - freie Weglänge, 581, 598, 626
 - Leistung, 55
- MMK, 244
- Modell, 18, 151, 152
 - Bibliothek, 152
- Modellieren, 18
- MOSFET, 666
- n-Halbleiter, 634
- n-Leitung, 634
- n-Pol, 18
- n-Pole
 - äquivalente, 94
- Näherungsfunktion, 517
- Nahwirkungstheorie, 168
- Nebenzeichen, 2
- Neper, 449
- Netz
 - starres, 508
- Netzliste, 152
- Netzlistenformat, 152
- Netzlistener, 152
- Netzwerk
 - elektrisches, 20
 - zusammenhängendes, 90
- Netzwerkanalyse
 - mit Ersatz-Quellen, 112
 - numerische, 151
- Netzwerkelement, 20
- Netzwerkumformung, 94
 - Regeln, 95
- Neukurve, 253
- Neutralleiter, 498
 - strom, 501
- nichtelementarer

- Parallelschwingkreis, 486
- Schwingkreis, 486
- Nichtleiter, 11
- nichtlineare
 - Verzerrungen, 539
- nichtlinearer
 - Widerstand, 42
 - Zweipol, 546
- nichtlineares
 - Netzwerk
 - Analyse, 143
 - Wechselstromnetzwerk, 539
- Niederdruck-Entladungslampe, 605
- NIGFET, 662
- Nordpol
 - magnetischer, 220
- Normalleitung, 626
- normierte
 - Darstellung, 450
 - Frequenz, 454
- normierte Frequenz, 472
- Normierung, 103
- Normreihe, 41
- Norton's Theorem, 114
- notch filter, 467
- Np, 449
- npn, 668
- NTC-Widerstand, 42
- Nullkippspannung, 670
- Nullphasenwinkel, 318
- Nullverfahren, 88
- Nullzeit, 318
- numerische Netzwerkanalyse, 151
- Nutzfluss, 261, 288
- Nutzleistung, 61

- Oberflächenwiderstand, 215
- Oberschwingungen, 517
- Oberschwingungsgehalt, 529
- Ohm, 28
- Ohmscher
 - Kontakt, 640
 - Leitwert, 29
 - Widerstand, 29, 348
- Ohmsches Gesetz, 27, 29, 626
 - des magnetischen Kreises, 243
- Oktave, 451

- Operationsverstärker, 661
- Optokoppler, 679
 - Übertragungsverhältnis, 679
- Ortskurve, 431
 - elementare, 441
 - Inversion, 440
 - Parametrieren, 431
 - qualitative, 432
 - quantitative, 431
- osmotische Druck, 610
- Oszilloskop-Röhre, 594

- p-Halbleiter, 636
- p-Leitung, 636
- Parallel-Ersatzschaltung, 409
- Parallelschaltung, 376
 - von Kondensatoren, 209
 - von magnetischen Widerständen, 245
 - von Widerständen, 68
 - Gesamtwiderstand, 68
- Parallelschwingkreis
 - elementarer, 482
- paramagnetische Stoffe, 249
- Parameter, 19, 430
- Parametrieren
 - einer Ortskurve, 431
- parasitäre
 - Induktivität, 348, 408
 - Kapazität, 206, 348, 680
 - Wicklungskapazität, 407
- parasitäre Effekte, 151, 490
- parasitärer
 - Widerstand, 348
- partikuläre Lösung, 553
- Paschen-Kurven, 601
- passiver
 - Grundzweipol, 348
 - Zweipol, 19
- passives Gebiet, 16
- Pegel, 449
- Periodendauer, 310, 318
- periodische Größen
 - Kennwerte, 527
- periodischer Fall, 567
- Periodizität, 310
- Permanentmagnet, 259
- Permeabilität, 225, 227, 257

- differenzielle, 257
- relative, 228
- reversible, 257
- Permittivität, 170, 205
 - relative, 170, 205
- Phänomen, 18
- Phase, 332
- Phasendrehung, 325
- Phasenfrequenzgang, 449
- Phasenlagen, 320
- Phasenschieber, 396, 507
- Phasenverschiebungswinkel, 320
 - fiktiver, 347, 548
- Phasenwinkeldiagramm, 444
- Phonon, 12
- Photo
 - Bipolartransistor, 677
 - MOSFET, 677
 - Thyristor, 677
 - diode, 675
 - effekt
 - inverser innerer, 677
 - element, 675
 - pn-FET, 677
 - strom, 675
- Photoemission, 582
- Photon, 637
- Photowiderstand, 42
- physikalische
 - Wirkungsrichtung, 22
- pin-Diode, 655
- pinch-off-Spannung, 663
- Planartechnik, 680
- Plancksches Wirkungsquantum, 583, 695
- Plasma, 11, 598
- Plasma-Display, 606
- Plattenelektroden, 191
- Plattenkondensator, 204, 208, 217
- pn-Übergang, 640
- pn-FET, 662
- pnp, 668
- polare Form, 333
- Polarisation
 - elektrische, 216
 - magnetische, 258
- Polarisations-Spannung, 610
- Polarität einer Quelle, 44
- Polarkoordinaten, 332
- Polladung, 269
- Polrad, 316
- Polygonschaltung, 80, 495
- polykristalliner Zustand, 616
- Post Processor, 154
- Potenzial
 - elektrisches, 14, 185, 196
 - mechanisches, 14
 - Mehrdeutigkeit, 308
- Potenzialdifferenz, 16
- Potenzialfeld, 186
 - elektrisches, 158
- potenzielle Feldenergie, 186
- Potenzimeter, 41, 74
- prellen, 555
- primäre
 - Hauptinduktivität, 427
 - Streuinduktivität, 427
- Primärseite, 415
- Primärzelle, 612
- Probekapazität, 169, 194
- Proton, 10
- Protons
 - Ruhemasse, 695
- PSPICE, 152
- PTC-Widerstand, 42
- Pulszahl, 541
- Punktladung, 163
- quadratischer
 - Mittelwert, 314
 - Temperaturkoeffizient, 38
- Qualität, 1
- qualitative
 - Ortskurve, 432
- qualitativer
 - Feldverlauf, 204
- qualitatives
 - Zeigerdiagramm, 385
- Quantität, 1
- quantitative
 - Ortskurve, 431
- quantitatives
 - Zeigerdiagramm, 385
- Quelle
 - deaktivierte, 50

- gesteuerte, 44
- ideale, 43, 46
- lineare, 44, 46
- Polarität, 44
- reale, 44, 50
- Quellen
 - elektrische, 43
- Quellenfeld, 307
- Quellengröße, 44
- Quellenkennlinie, 50, 59
- Quellenspannung, 44
 - elektrische, 270
 - magnetische, 244
- Quellenstrom, 45
- Querinduktivität, 423

- Röntgenröhre, 596
- Rückwärtsdiode, 660
- Rückwirkung, 85
- Radiant, 6
- Randverzerrung, 260
- Raumladungsdichte, 160
- Raumladungsfeld, 591
- Raumladungszone, 642
- RC-Reihenschaltung, 372
- Reaktanz, 342
- Reaktionsgröße, 91
- reale Quelle, 44, 50
- reales
 - Amperemeter, 85
 - Voltmeter, 86
- Realteil, 331
- Rechteckschwingung
 - symmetrische, 525
- Rechteckspannung
 - symmetrische, 532
- Rechtsschraubenregel, 220
- reduzierte Größe, 418
- reelle Achse, 331
- Referenz-Diode, 651
- Reihen-Ersatzschaltungen, 405
- Reihenschaltung, 64, 367
 - von Kondensatoren, 209
 - von magnetischen Widerständen, 245
 - von Widerständen, 72
- Reihenschwingkreis
 - elementarer, 474, 551, 564
- Rekombination, 600, 631
 - von Ladungsträgern, 597
- Rekombinationskoeffizient, 600
- Rekursive Berechnung, 98
- relative
 - Frequenz, 472
 - Molekülmasse, 609
 - Permeabilität, 228
 - Permittivität, 170, 205
- relativistische Korrektur, 586
- Reluktanz, 244
- Remanenzflussdichte, 253
- Reproduzierbarkeit, 1
- resistiver Zweipol, 27
- Resonanzbedingung, 472
- Resonanzfall, 554
- Resonanzfrequenz, 472
- Resonanzkreisfrequenz, 472
- Resonanzkurve, 473, 480
- Resonanzschärfe, 473
- Resonanzspannung, 481, 483
- Resonanzstrom, 476, 484
- reversible Permeabilität, 257
- Ringintegral, 198
- Ringschaltung, 80, 495
- Ringspule, 224
- RL-Reihenschaltung, 370
- RLC-Reihenschaltung, 373
- RMS, 314
- rotierender
 - Scheitelwertzeiger, 338
- ruhender
 - Effektivwertzeiger, 339
 - Scheitelwertzeiger, 339
- Sägezahnspannung
 - symmetrische, 530
- Sättigung, 254
- Sättigungsbereich, 601, 664
- Sättigungsstrom, 593
- Südpol
 - magnetischer, 220
- Satz
 - von Helmholtz, 113
 - von Mayer, 114
- Saugkreis, 467
- Schale, 619

- Schaltdiode, 653
- Schalten
 - von Gleichspannungen, 555
 - von Schwingkreisen, 564
 - von Sinusspannungen, 572
- Schaltplan, 20
- Schaltplan-Editor, 152
- Schaltsymbol, 376
- Schalttransistor, 661
- Schaltung
 - äquivalente, 405
 - gemischte, 75, 385
- Schaltungseingabe, 154
- Schaltvorgänge, 550
- Schaltwinkel, 574
- Schaltzeichen, 20
- Scheinleistung, 345, 546
- Scheinleitwert, 343
- Scheinwiderstand, 342
- Scheitelfaktor, 315, 323
- Scheitelwert, 312
- Scheitelwertzeiger
 - rotierender, 324, 338
 - ruhender, 325, 339
- Schleifer, 74
- Schleifkontakt, 41
- Schmelzelektrolyse, 612
- Schottky
 - Diode, 649
 - Kontakt, 648
- Schrittspannung, 189
- Schwellspannung, 663
- Schwinggröße, 473, 476, 481, 483, 484
- Schwingkreis, 468
 - elementarer, 474
 - mit mehreren Freiheitsgraden, 489
 - nichtelementarer, 486
- Schwingkreise
 - gekoppelte, 620
- Schwingquarz, 489
- Schwingung
 - erzwungene, 470
 - freie, 469
- Schwingungsbreite, 311
- schwingungsfähig, 468
- Schwingungsgehalt, 528
- Sekundärelektron, 583, 601
- Sekundärseite, 415
- Sekundärzelle, 612
- Selbstentladung, 412
- Selbstinduktionsspannung, 283, 290, 420
- Selbstinduktivität, 285
 - äußere, 287
- SI-Basiseinheiten, 5
- SI-Einheiten, 4
- Siemens, 28
- Silberoxid-Zink-Zelle, 613
- Siliziumdioxid, 680
- Sinusgröße, 309, 316
- Sinusgrößen
 - Addition, 326
 - Differenziation, 329
 - Integration, 329
 - Subtraktion, 326
 - Zählpeile, 325
- Sinusspannung, 316
 - Erzeugung, 316
- Sinusspannungsgenerator, 317
- Sinusstrom, 316
- Sinusstromnetzwerk, 309
- Sinusstromtechnik, 309
- snap off diode, 654
- SoC, 681
- Solarzelle, 676
- Solver, 153
- Source, 662
- Spannung
 - elektrische, 16, 180
 - komplexe, 340
 - magnetische, 229, 262
 - pinch-off-, 663
 - Schwell-, 663
- Spannungs-Resonanz, 478
- Spannungsüberhöhung, 478
- Spannungsübertragungsfunktion, 447
- Spannungsabfall, 66
- spannungsabhängiger Widerstand, 42
- Spannungsebene, 414
- Spannungseinspeisung, 44
- Spannungsmesser, 86
 - elektrostatisher, 204
- Spannungsquelle
 - elektronisch geregelte, 51
 - ideale, 44

- lineare, 49
- spannungsrichtiges Messen, 87
- Spannungsstabilisierung, 144, 650, 652
- Spannungssystem, 508
- Spannungsteiler
 - belasteter, 75
 - mehrstufiger, 76, 388
 - unbelasteter, 75
 - zweistufiger, 78
- Spannungsteilerregel, 74, 368
 - magnetische, 245
- Spannungswandler, 414
- Spannungszählpfeil, 183
- Spartransformator, 415
- Speicher-Varaktor, 654
- spektrale Komponente, 309
- Sperrbereich, 451, 622
- Sperrkreis, 467
- Sperrschicht, 640
 - Kapazität, 644
 - Photoeffekt, 675
 - Varaktor, 654
- Sperrstrom, 643
- spezielle Lösung, 552
- spezifischer elektrischer Widerstand, 626
- SPICE, 151
 - Netzlistenformat, 155
- Spitze-Spitze-Wert, 311
- Spitzeneffekt, 583
- Spitzenwert, 311
- Sprühentladung, 604
- Sprungfunktion
 - Einheits-, 551
- Sprungtemperatur, 628
- Spule, 352
 - mit ferromagnetischem Kern, 413
- Spulenfluss
 - magnetischer, 282
- Ständerwicklung, 317
- Störfunktion, 550
- Störstellenleitung, 632, 633
- Stabilität des Arbeitspunktes, 148
- Stabilitätsbedingung, 150
- starres Netz, 508
- stationäres elektrisches Strömungsfeld, 158
- statischer
 - Leitwert, 37
- Widerstand, 36
- Steilheit, 664
- step recovery diode, 654
- Stern-Dreieck-Transformation, 82, 388
- Sternleitwert, 83
- Sternpunkt, 80, 495
- Sternschaltung, 80, 495, 513
 - symmetrische, 501
- Sternspannung, 499
- Steuerdaten, 153
- Steuerstrom, 223
- Stimuli, 153
- Stoffe
 - diamagnetische, 249
 - ferromagnetische, 249
 - hartmagnetische, 249
 - paramagnetische, 249
 - weichmagnetische, 249
- Stoßionisation, 597, 648
- Strömungsfeld
 - homogenes, 181
 - inhomogenes, 181
 - Leistungsdichte, 190
- Strömungslinie, 173
- Strömungsröhre, 178
- Strahlerzeugungssystem, 594
- Strang, 492
- Strangleistung
 - komplexe, 504
- Strangspannung, 499, 501, 502
- Strangstrom, 499, 501, 502, 512
- Streufluss, 261, 288
- Streuinduktivität
 - primäre, 427
 - reduzierte sekundäre, 427
- Strom
 - elektrischer, 11
 - komplexer, 340
- Strom-Spannungs-Kennlinie, 45, 46
- Stromübertragungsfunktion, 448
- Stromdichte, 175
- Stromeinspeisung, 45
- Stromlaufplan, 20
- Strommesser, 85
- Strommessung
 - indirekte, 86
- Stromquelle

- elektronisch geregelte, 51
- ideale, 45
- lineare, 49
- Stromröhre, 172
- stromrichtiges Messen, 87
- Stromrichtung
 - technische, 13
- Stromstärke
 - elektrische, 12
- Stromteiler
 - mehrstufiger, 77
- Stromteilerregel, 71, 378
 - magnetische, 245
- Stromverdrängung, 350, 426
- Stromwärmeverlust, 395
- Stromwandler, 414
- Summenwiderstand, 127
- Superknoten, 64, 69
- Superpositionsverfahren, 107
- Supraleiter
 - Hochtemperatur-, 628
- Supraleitung, 627
- Suszeptanz, 343
- Suszeptibilität, 257, 259
- symbolische Methode, 338
- symmetrische
 - Dreieckschaltung, 502
 - Last, 499
 - Sternschaltung, 501
- symmetrischer
 - Dreiphasengenerator, 493
 - Verbraucher, 499
- symmetrisches
 - Dreiphasensystem, 498
 - Mehrphasensystem, 492
 - Zählpeilsystem, 26
 - Zweiphasensystem, 495
- Synthese, 21
- T-Schaltung, 389
- Technik, 1
- technische Stromrichtung, 13
- technisches Vakuum, 11
- Temperaturkoeffizient
 - linearer, 37
 - quadratischer, 38
- Temperaturspannung, 645
- Tesla, 227
- Thévenin's Theorem, 113
- Thaleskreis, 436
- thermodynamisches Gleichgewicht, 640
- Thyristor, 670, 671
 - Light Triggered, 673
 - Zündvorgang, 673
- Thyristor-Diode, 670
- Tiefpass, 451
- Topologie, 93
- Tor, 20
- Torbedingung, 20
- Toroidspule, 224, 292
- Total Harmonic Distortion, 528
- Townsend-Entladung, 601
- Trägerleitung, 607
- Transformation
 - Dreieck-Stern-, 81
 - Stern-Dreieck-, 82
- Transformator, 414
 - idealer, 415
 - Klein-, 414
 - Leistungs-, 414
 - mit Streuung ohne Verluste, 425
 - mit Streuung und Kupferverlusten, 426
 - mit Streuung und Verlusten, 428
 - Modelle, 415
 - Spar-, 415
 - T-Ersatzschaltung, 422
 - Trenn-, 414
 - vereinfachte Ersatzschaltung mit reduzierten Größen, 429
 - verlust- und streuungsloser, 419
 - Voll-, 415
- Transformatorgleichungen, 421
- Transistor, 661
 - Feldeffekt-, 662
 - Schalt-, 661
 - Unipolar-, 662
- Trenntransformator, 414
- TRIAC, 673
- trigonometrische Form, 333
- Trimmer, 41
- Trockenzelle, 612
- TTL, 682
- Tunnel
 - diode, 658

- effekt
 - wellenmechanischer, 658
- strom, 660
- ULSI, 680
- Umkehrpunkt, 253
- Umlaufanalyse, 120
- Umlaufintegral, 198
- Umlaufsinn, 65
 - einer Masche, 101
- Umlaufspannung, 66
 - magnetische, 229
- Ummagnetisierungsverluste, 294, 428, 545
- Ummagnetisierungszyklus, 253
- Umpolarisierungsverlust, 412
- ungerade Funktion, 525
- Unipolar-Transistor, 662
- unsymmetrische
 - Dreiphasenbelastung, 507
- unsymmetrischer
 - Dreiphasengenerator, 494
- unsymmetrisches
 - Mehrphasensystem, 492
 - Zweiphasensystem, 496
- Ursachenfeldgröße, 169
 - magnetisches Feld, 227
- VA, 345
- Vakuum, 11, 581
 - Elektronenströmung, 583
 - ideales, 11
 - technisches, 11
- Vakuum-Diode, 593
- Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, 583, 695
- Valenz, 620
 - band, 623
 - elektron, 620
- Varaktordiode, 654
- Varistor, 42, 541
- VDR, 42
- Vektor, 3
- Vektorfeld, 219
- Verbindungs-Halbleiter, 617
- Verbindungsweig, 94
- verbotenes Band, 622
- Verbraucher, 19, 24, 53
 - symmetrischer, 499
- Verbraucher-Zählpeilsystem, 24
- verfügbare Leistung, 61
- Verlustdichte, 190
- Verluste, 57
 - dielektrische, 215
- Verlustfaktor, 404, 473
 - dielektrischer, 215
- Verlustleistung
 - dielektrische, 215
 - im elektrischen Feld, 215
- Verlustwinkel, 404
- Verschiebung
 - virtuelle, 216
- Verstimmung, 472
- Vervielfachungsfaktor, 583
- Verzerrungen
 - lineare, 533
 - nichtlineare, 539
- Verzerrungs-Blindleistung, 400, 547
- Vierleiternetz, 508
- Vierleitersystem, 498
- Vierpol, 20, 447
- virtuelle Verschiebung, 216
- VLSI, 680
- Vollkompensation, 396
- vollständiger Baum, 93
- Volltransformator, 415
- Volt, 14, 17
- Voltampere, 345
- Voltmeter, 86
 - elektronisches, 86
 - ideales, 86
 - Innenwiderstand, 86
 - reales, 86
- Vormagnetisierung, 257
- Vorsätze, 6
- Vorsatzzeichen, 6
- VST, 419
- VZS, 24
- Wärmedurchbruch, 650
- Wafer, 680
- Wattmeter, 88
- Weber, 239
- Wechselgröße, 312
- Wechselmagnetisierung, 257
- Wechselstrom, 312
- Wehneltzylinder, 596

- weichmagnetisch, 253
- weichmagnetische Stoffe, 249
- Welligkeit, 541
- wertdiskrete Größe, 11
- Wertigkeit, 620
- wertkontinuierliche Größe, 11
- Wicklung, 415
- Wicklungspunkte, 420
- Wicklungssinn, 420
 - gegensinniger, 420
 - gleichsinniger, 420
- Wicklungsstrang, 492
- Widerstände
 - Ausführungsformen, 41
 - lineare, 41
 - Parallelschaltung, 68
 - Reihenschaltung, 72
- Widerstand, 29
 - Bemessungsgleichung, 31
 - Blind-, 342
 - differenzieller, 37
 - dynamischer, 37, 648
 - negativer, 655
 - elektrischer, 28
 - Festwert-, 41
 - Gleichstrom-, 36
 - komplexer, 341
 - linearer, 35
 - magnetfeldabhängiger, 638
 - magnetischer, 244
 - nichtlinearer, 36, 42
 - NTC-, 42
 - Oberflächen-, 215
 - Ohmscher, 29, 348
 - parasitärer, 348
 - Photo-, 42
 - PTC-, 42
 - Schein-, 342
 - spannungsabhängiger, 42
 - statischer, 36
 - temperaturabhängig
 - fremderwärmt, 42
 - selbsterwärmt, 42
 - Wirk-, 342, 349
- Widerstandsmatrix, 126
- Widerstandsthermometer, 42
- Wiederverwendung von Entwurfsdaten, 153
- Windung, 220, 282
- Windungszahl, 419
- Wirbelfeld
 - elektrisches, 158, 268
- Wirbelstrom, 290
- Wirbelstromverluste, 413, 428
- Wirkleistung, 344, 546
- Wirkleitwert, 343, 349
- Wirkspannung, 405
- Wirkstrom, 395, 409
- Wirkungsfeldgröße, 169
 - magnetisches Feld, 227
- Wirkungsgrad, 57
 - energetischer, 58
- Wirkungsrichtung
 - physikalische, 22
- Wirkwiderstand, 342, 349
- Wurtzitgitter, 618
- Z-Diode, 144, 650
- Zählpfeil, 22
 - Durchflutungs-, 226
 - elektrischer Fluss, 201
 - magnetische Spannung, 230
 - magnetischer Fluss, 241
 - Spannung-, 194
 - Spannungs-, 22
 - Strom-, 22, 178
- Zählpfeile
 - für Sinusgrößen, 325
- Zählpfeilgröße, 22, 201, 226, 230, 241
- Zählpfeilsystem, 22
 - Erzeuger-, 24
 - Ketten-, 26
 - symmetrisches, 26
 - Verbraucher-, 24
- Zünden, 670
- Zündspannung, 601
- Zahlenwert, 1
- Zahlenwertgleichung, 7
- Zeiger, 323
 - Bezugs-, 340
 - Inversion, 335
 - rotierender, 323
 - ruhender, 325
- Zeigerdiagramm, 323
 - qualitatives, 385

- quantitatives, 385
- Zeitbereich, 338
- zeitinvariant, 3, 27
- Zeitkonstante, 556, 557
- zeitvariant, 3, 27
- Zelle
 - Alkali-Mangan-, 613
 - Braunstein-Zink-, 612
 - Knopf-, 613
 - Kohle-Zink-, 612
 - Leclanché-, 612
 - Lithium-, 613
 - Silberoxid-Zink-, 613
- Zener
 - Durchbruch, 648
 - Spannung, 648, 650
- zentraler Knoten, 132
- Zersetzungsspannung, 610
- Zinkblendegitter, 617
- zugeführte Leistung, 61
- Zugeschnittene Größengleichung, 7
- zusammenhängendes Netzwerk, 90
- Zustand
 - amorpher, 616
 - eingeschwungener, 309
 - einkristalliner, 616
 - kristalliner, 616
 - polykristalliner, 616
- Zustandsgröße, 159
- Zweielektrodenröhre, 585
- Zweig, 64
- Zweige
 - inzidente, 64
- Zweigspannung, 66
- Zweiphasensystem, 495
 - symmetrisches, 495
 - unsymmetrisches, 496
- Zweipol, 18
 - aktiver, 19, 43
 - dualer, 362
 - Energieumsatz, 53
 - Leistungsumsatz, 55
 - linearer, 348
 - nichtlinearer, 546
 - passiver, 19
 - Modell, 405
 - resistiver, 27
- Zweipole
 - elementare, 27
 - zweistufiger Spannungsteiler, 78
- Zweiter, 20, 26, 447
- Zweiweggleichrichtung, 312